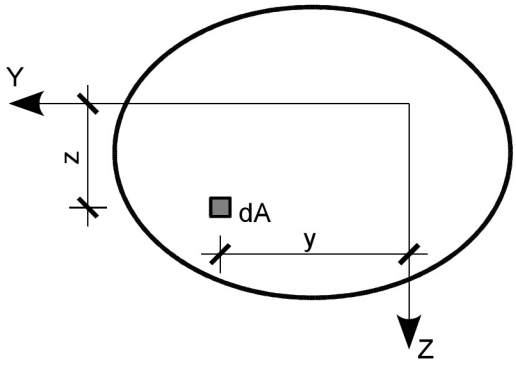
2.

2. Charakterystyki geometryczne przekroju

2.1 Podstawowe definicje

Z przekrojem pręta związane są trzy wielkości fizyczne nazywane charakterystykami geometrycznymi przekroju. Służą one na przykład do wyznaczenia naprężeń w prętach poddanych działaniu siły osiowej, momentu zginającego, siły poprzecznej oraz momentu skręcającego.

Rysunek 2.1 przedstawia dowolny przekrój pręta wraz ze związanym z nim układem współrzędnych YZ. Elementarne pole powierzchni dA posiada współrzędne y oraz z.



Rys. 2.1. Przekrój pręta.

Pierwszą wielkością charakteryzującą przekrój pręta jest **pole powierzchni**. Definicja tej wielkości ma postać

$$A=\int_A dA \quad . \tag{2.1}$$

Jednostką pola powierzchni w układzie SI jest m^2. W budownictwie najczęściej używa się cm^2. Pole powierzchni jest zawsze większe od zera.

Drugą wielkością charakteryzującą przekrój pręta jest **moment statyczny**. Definicje momentu statycznego względem osi Y S_Y oraz względem osi Z S_Z mają postać

$$S_Y=\int_A z\cdot dA \quad , \tag{2.2}$$

$$S_Z=\int_A y\cdot dA \quad . \tag{2.3}$$

Jednostką momentu statycznego jest m^3. W budownictwie najczęściej używa się cm^3. Moment statyczny może przyjmować wartości dodatnie, ujemne oraz zero.

Trzecią wielkością charakteryzującą przekrój pręta jest **moment bezwładności**. Definicje momentów bezwładności względem osi Y I_Y oraz względem osi Z I_Z (są to tak zwane **osiowe momenty bezwładności)** mają postać

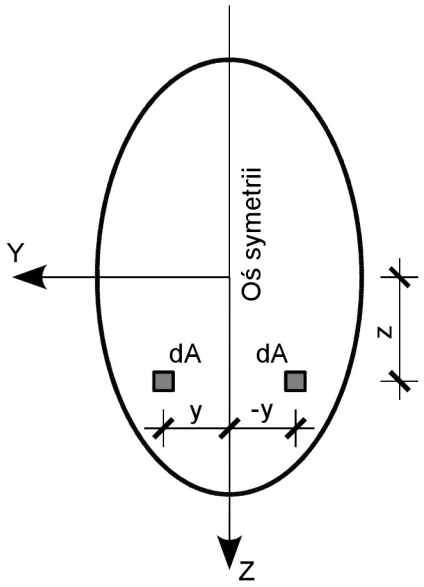
$$I_Y = \int_A z^2 \cdot dA \quad , \tag{2.4}$$

$$I_Z = \int_A y^2 \cdot dA \quad . \tag{2.5}$$

Oprócz osiowych momentów bezwładności istnieje jeszcze **moment dewiacyjny**. Jego definicja ma postać

$$I_{YZ} = \int_A y \cdot z \cdot dA \quad . \tag{2.6}$$

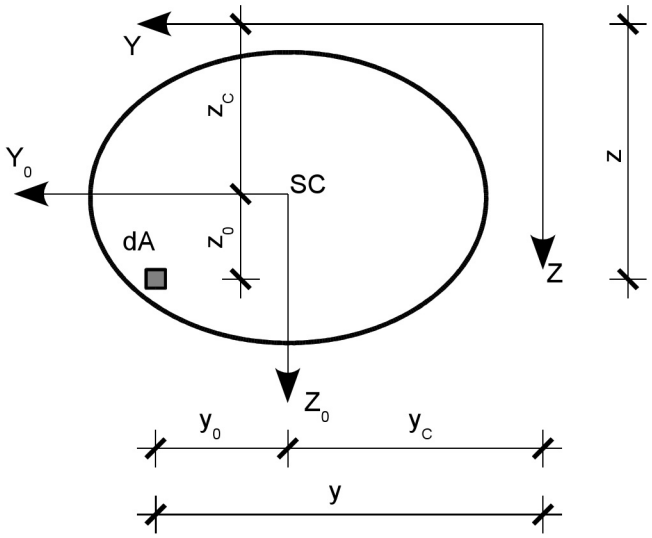
Jednostką momentu bezwładności jest m^4. W budownictwie najczęściej używa się cm^4. Osiowe momenty bezwładności przyjmują zawsze wartości dodatnie, natomiast moment dewiacyjny może być dodatni, ujemny lub równy zero. Osiowe momenty bezwładności są pewną miarą rozproszenia przekroju względem danej osi. Im osiowy moment bezwładności jest większy tym rozproszenie przekroju jest większe. Wartość bezwzględna momentu dewiacyjnego jest miarą asymetrii przekroju względem przyjętego układu współrzędnych. Łatwo zauważyć, że jeśli jedna z osi układu współrzędnych jest osią symetrii to moment dewiacyjny względem tego układu wynosi **zero**. Przedstawia to rysunek 2.2.



Rys. 2.2. Przekrój pręta z jedną osią symetrii.

Oś środkowa – jest to oś, względem której moment statyczny wynosi zero. **Środek ciężkości** – jest to punkt przecięcia dwóch dowolnych osi środkowych.

Chcąc wyznaczyć współrzędne y_C, z_C środka ciężkości SC obieramy dowolny układ współrzędnych YZ. Przedstawia to rysunek 2.3.



Rys. 2.3. Wyznaczenie środka ciężkości przekroju.

Współrzędne elementarnego pola powierzchni dA w układzie osi środkowych Y_0Z_0 wynoszą

$$y_0 = y - y_C \quad , \tag{2.7}$$

$$z_0 = z - z_C \quad . \tag{2.8}$$

Momenty statyczne względem osi Y_0 oraz Z_0 wynoszą (y_C oraz z_C traktujemy jako stałą)

$$S_{Y0} = \int_A z_0 \cdot dA = \int_A (z - z_c)\, dA = \int_A z \cdot dA - z_C \int_A dA \quad , \tag{2.9}$$

$$S_{Z0} = \int_A y_0 \cdot dA = \int_A (y - y_c)\, dA = \int_A y \cdot dA - y_C \int_A dA \quad . \tag{2.10}$$

Wzory 2.9 i 2.10 po przekształceniu i uwzględnieniu faktu, że moment statyczny względem osi środkowej wynosi zero będą miały postać

$$S_{Y0} = S_Y - z_C \cdot A = 0 \quad , \tag{2.11}$$

$$S_{Z0} = S_Z - y_C \cdot A = 0 \quad . \tag{2.12}$$

Ostatecznie współrzędne środka ciężkości wynoszą

$$z_C = \frac{S_Y}{A} \quad , \tag{2.13}$$

$$y_C = \frac{S_Z}{A} \quad . \tag{2.14}$$

Jeżeli przekrój składa się z n części o znanych polach powierzchni A_i oraz współrzędnych środków ciężkości y_i i z_i to współrzędne środka ciężkości oblicza się ze wzorów

$$z_C = \frac{S_Y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \quad , \tag{2.15}$$

$$y_C = \frac{S_Z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \quad . \tag{2.16}$$

Oczywiście jeżeli przekrój posiada oś symetrii to środek ciężkości musi znajdować się na niej. W przekroju posiadającym dwie osie symetrii środek ciężkości znajduje się w punkcie ich przecięcia.

2.2 Momenty bezwładności przy przesunięciu układu współrzędnych

Załóżmy, że znane są momenty bezwładności w układzie osi środkowych Y_0Z_0. Poszukujemy momentów bezwładności w dowolnym układzie YZ. Współrzędne środka ciężkości przekroju w układzie YZ wynoszą y_P oraz z_P. Przedstawia to rysunek 2.4. Moment bezwładności względem osi Y zgodnie z definicją wyrażoną przez wzór (2.4) wynosi

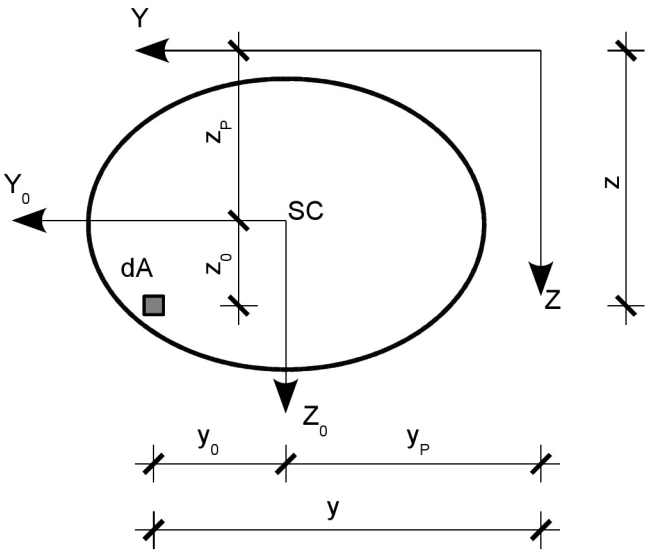
$$I_Y = \int_A z^2 \cdot dA = \int_A \left(z_0 + z_P \right)^2 dA \quad . \tag{2.17}$$

Po rozwinięciu wyrażenia w nawiasie wzór 2.17 będzie miał postać

$$I_Y = \int_A \left(z_0^2 + 2 \cdot z_0 \cdot z_P + z_P^2 \right) dA \quad . \tag{2.18}$$

Całkę z sumy zamieniamy na sumę całek. Wzór 2.18 będzie miał postać (z_P jako stałą wyciągamy przed całkę)

$$I_Y = \int_A z_0^2 \cdot dA + 2 \cdot z_P \int_A z_0 \cdot dA + z_P^2 \int_A dA \quad . \tag{2.19}$$



Rys. 2.4. Wyznaczenie momentów bezwładności przy przesunięciu układu współrzędnych..

Interpretując poszczególne całki otrzymano

$$I_Y = I_{Y0} + 2 \cdot z_P \cdot S_{Y0} + z_P^2 \cdot A \quad . \tag{2.20}$$

Ponieważ oś Y_0 jest osią środkową więc moment statyczny względem tej osi S_{Y0} wynosi zero. Ostatecznie wzór na obliczenie momentu bezwładności I_Y będzie miał postać

$$I_Y = I_{Y0} + z_P^2 \cdot A \quad . \tag{2.21}$$

Analogicznie wzór na obliczenie momentu bezwładności I_Z będzie miał postać

$$I_Z = I_{Z0} + y_P^2 \cdot A \quad , \tag{2.22}$$

W celu wyznaczenia momentu dewiacyjnego wykorzystano definicję według wzoru (2.6).

$$I_{YZ} = \int_A y \cdot z \cdot dA = \int_A \left(y_0 + y_P\right) \cdot \left(z_0 + z_P\right) dA \quad . \tag{2.23}$$

Po rozwinięciu wyrażeń w nawiasach wzór 2.23 będzie miał postać

$$I_{YZ}=\int_A \left(y_0\cdot z_0+y_0\cdot z_P+z_0\cdot y_P+y_P\cdot z_P\right)dA \quad . \tag{2.24}$$

Całkę z sumy zamieniamy na sumę całek. Wzór 2.24 będzie miał postać (y_P oraz z_P taktujemy jako stałe)

$$I_{YZ}=\int_A y_0\cdot z_0\cdot dA+z_P\cdot\int_A y_0\cdot dA+y_P\cdot\int_A z_0\cdot dA+y_P\cdot z_P\int_A dA \quad . \tag{2.25}$$

Interpretując poszczególne całki otrzymano

$$I_{YZ}=I_{Y0Z0}+z_P\cdot S_{Z0}+y_P\cdot S_{Y0}+y_P\cdot z_P\cdot A \quad . \tag{2.26}$$

Ponieważ osie Y_0 oraz Z_0 są osiami środkowymi więc momenty statyczne względem tych osi S_{Y0} oraz S_{Z0} wynoszą zero. Ostatecznie wzór na obliczenie momentu bezwładności I_{YZ} będzie miał postać

$$I_{YZ}=I_{Y0Z0}+y_P\cdot z_P\cdot A \quad . \tag{2.27}$$

Wzory 2.21, 2.22 oraz 2.27 noszą nazwę wzorów Steinera i są podstawowymi wzorami służącymi do obliczania momentów bezwładności dowolnego przekroju względem dowolnego układu współrzędnych.

2.3 Momenty bezwładności przy obrocie układu współrzędnych

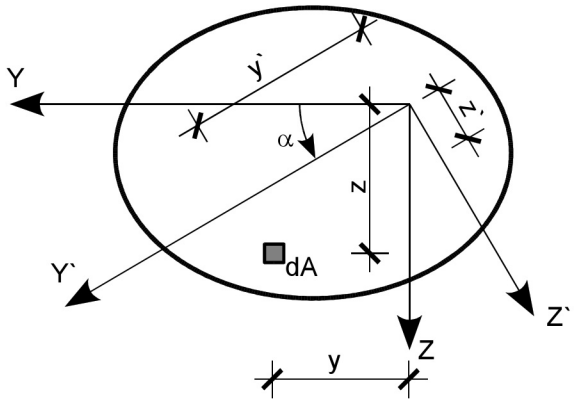
Zakładamy, że znamy momenty bezwładności w układzie YZ. Szukamy momentów bezwładności w układzie Y`Z` obróconym o kąt α. Dodatni kąt jest zgodny z obrotem osi Y w kierunku osi Z. Przedstawia to rysunek 2.5. Współrzędne elementarnego pola powierzchni dA w układzie Y`Z` opisują wzory transformacyjne, które mają znaną postać

$$y'=y\cdot\cos\alpha+z\cdot\sin\alpha \quad , \tag{2.28}$$

$$z'=-y\cdot\sin\alpha+z\cdot\cos\alpha \quad . \tag{2.29}$$

Korzystając z definicji momentu bezwładności względem osi Y` otrzymano

$$I_{Y'}=\int_A z'^2\cdot dA=\int_A \left(-y\cdot\sin\alpha+z\cdot\cos\alpha\right)^2 dA \quad . \tag{2.30}$$



Rys. 2.5. Przekrój z obróconym układem współrzędnych Y`Z`.

Rozwijając wyrażenie w nawiasie wzór (2.30) będzie miał postać

$$I_{Y'} = \int_A \left(y^2 \cdot \sin^2\alpha - y \cdot z \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + z^2 \cdot \cos^2\alpha \right) dA \quad . \tag{2.31}$$

Ponieważ sinus i cosinus kąta α są stałe możemy wyciągnąć je przed znak całki. Zapisując całkę sumy jako sumę całek wzór (2.31) przybierze postać

$$I_{Y'} = \sin^2\alpha \int_A y^2 \cdot dA - \sin\alpha \cdot \cos\alpha \int_A y \cdot z \cdot dA + \cos^2\alpha \int_A z^2 \cdot dA \quad . \tag{2.32}$$

Interpretując poszczególne całki wzór (2.32) będzie miał postać

$$I_{Y'} = \sin^2\alpha \cdot I_Z - \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot I_{YZ} + \cos^2\alpha \cdot I_Y \quad . \tag{2.33}$$

Wprowadzając funkcje kąta 2α, które mają postać

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(2 \cdot \alpha\right)\right) \quad , \tag{2.34}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(2 \cdot \alpha\right)\right) \quad , \tag{2.35}$$

$$2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin\left(2 \cdot \alpha\right) \quad , \tag{2.36}$$

otrzymano ostateczną postać wzoru transformacyjnego.

$$I_{Y'}=\frac{I_Y+I_Z}{2}+\frac{I_Y-I_Z}{2}cos\left(2\cdot\alpha\right)-I_{YZ}\cdot sin\left(2\cdot\alpha\right) \quad . \tag{2.37}$$

Postępując analogicznie otrzymano następujące wzory transformacyjne

$$I_{Z'}=\frac{I_Y+I_Z}{2}-\frac{I_Y-I_Z}{2}cos\left(2\cdot\alpha\right)+I_{YZ}\cdot sin\left(2\cdot\alpha\right) \quad , \tag{2.38}$$

$$I_{Y'Z'}=\frac{I_Y-I_Z}{2}sin\left(2\cdot\alpha\right)+I_{YZ}\cdot cos\left(2\cdot\alpha\right) \quad . \tag{2.39}$$

2.4 Główne momenty bezwładności

Istnieje pewien wyróżniony układ współrzędnych, w którym osiowe momenty bezwładności przyjmują wartości ekstremalne, a moment dewiacyjny znika. Taki układ nazywamy układem **głównych osi bezwładności**, a momenty osiowe w tym układzie **głównymi momentami bezwładności.** Kąt, który określa położenie głównych osi bezwładności wyznacza się ze wzoru

$$tg\left(2\cdot\alpha_{gl}\right)=-\frac{2\cdot I_{YZ}}{I_Y-I_Z} \quad . \tag{2.40}$$

Wstawiając wartość kąta α_{gl} do wzorów transformacyjnych (2.37) i (2.38) otrzymamy wzory na obliczenie momentów głównych w postaci

$$I_{Ygl}=\frac{I_Y+I_Z}{2}+\frac{I_Y-I_Z}{2}cos\left(2\cdot\alpha_{gl}\right)-I_{YZ}\cdot sin\left(2\cdot\alpha_{gl}\right) \quad , \tag{2.41}$$

$$I_{Zgl}=\frac{I_Y+I_Z}{2}-\frac{I_Y-I_Z}{2}cos\left(2\cdot\alpha_{gl}\right)+I_{YZ}\cdot sin\left(2\cdot\alpha_{gl}\right) \quad . \tag{2.42}$$

Główne momenty możemy uporządkować tak aby

$$I_I=max\begin{cases}I_{Ygl}\\I_{Zgl}\end{cases} \quad , \tag{2.43}$$

$$I_{II}=min\begin{cases}I_{Ygl}\\I_{Zgl}\end{cases} \quad . \tag{2.44}$$

Momenty I_I oraz I_{II} można wyznaczyć także z następujących wzorów (można je wykorzystać do sprawdzenia obliczeń głównych momentów bezwładności)

$$I_I = \frac{I_Y + I_Z}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_Y - I_Z}{2}\right)^2 + I_{YZ}^2} \quad , \tag{2.45}$$

$$I_{II} = \frac{I_Y + I_Z}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_Y - I_Z}{2}\right)^2 + I_{YZ}^2} \quad . \tag{2.46}$$

2.5 Niezmienniki

Niezmiennikiem nazywamy taką wielkość fizyczną, która nie zmienia swojej wartości przy obrocie układu współrzędnych. W przypadku charakterystyk geometrycznych mamy dwie takie wielkości. Pierwszy niezmiennik ma postać sumy momentów osiowych. Wynosi on odpowiednio w dowolnym układzie współrzędnych i w układzie osi głównych

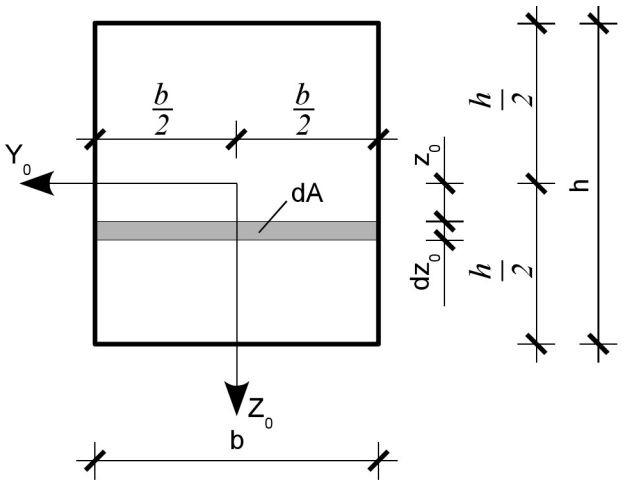
$$J_1 = I_Y + I_Z = I_{Ygl} + I_{Zgl} \quad . \tag{2.47}$$

Drugi niezmiennik w dowolnym układzie współrzędnych oraz w układzie osi głównych wynosi (moment dewiacyjny w układzie osi głównych równa się zero)

$$J_2 = I_Y \cdot I_Z - I_{YZ}^2 = I_{Ygl} \cdot I_{Zgl} \quad . \tag{2.48}$$

2.6 Momenty bezwładności prostokąta

Jako przykład zostanie wyznaczony moment bezwładności względem osi Y_0 przekroju prostokątnego o szerokości b i wysokości h. Oczywiście środek ciężkości znajduje się w środku wysokości i szerokości prostokąta. Przedstawia to rysunek 2.6.



Rys. 2.6. Przekrój prostokątny.

Elementarne pole dA wynosi

$$dA = b \cdot dz_0 \quad . \tag{2.49}$$

Moment bezwładności względem osi Y_0 zgodnie z definicją będzie wynosił

$$I_{Y0} = \int_A z_0^2 \cdot dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z_0^2 \cdot b \cdot dz_0 = b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z_0^2 \cdot dz_0 \quad . \tag{2.50}$$

Ostatecznie wartość momentu bezwładności będzie miał wartość

$$I_{Y0} = b \cdot \left[\frac{z_0^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = b \cdot \left[\frac{h^3}{24} + \frac{h^3}{24} \right] = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad . \tag{2.51}$$

Analogicznie moment bezwładności względem osi Z_0 będzie wynosił

$$I_{Z0} = \frac{h \cdot b^3}{12} \quad . \tag{2.52}$$

Ogólnie osiowe momenty bezwładności prostokąta względem osi środkowych będą miały postać

$$I_{oś} = \frac{wymiar\ równoległy\ do\ osi \times wymiar\ prostopadły\ do\ osi^3}{12} \quad . \tag{2.53}$$

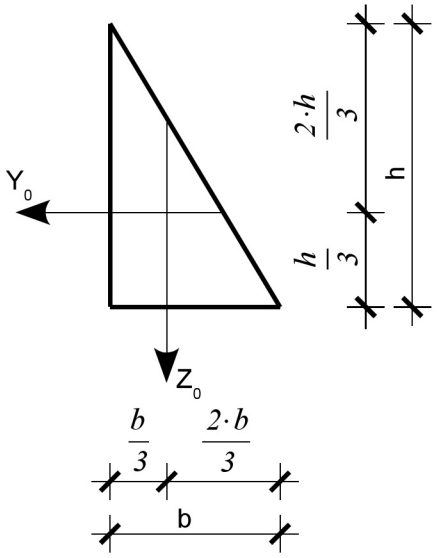
Ponieważ osie Y_0 oraz Z_0 są osiami symetrii to moment dewiacyjny prostokąta będzie wynosił **zero**.

2.7 Momenty bezwładności innych figur

Położenie środka ciężkości trójkąta prostokątnego o wymiarach przyprostokątnych b i h przedstawia rysunek 2.7. Momenty osiowe bezwładności trójkąta prostokątnego wynoszą

$$I_{Y0} = \frac{b \cdot h^3}{36} \quad , \tag{2.54}$$

$$I_{Z0} = \frac{h \cdot b^3}{36} \quad . \tag{2.55}$$



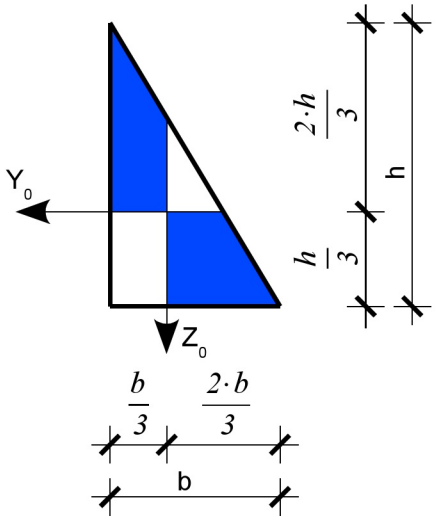
Rys. 2.7. Przekrój w formie trójkąta prostokątnego.

Ogólnie osiowe momenty bezwładności trójkąta prostokątnego względem osi środkowych będą miały postać

$$I_{oś}=\frac{wymiar\,równoległy\,do\,osi\times wymiar\,prostopadły\,do\,osi^3}{36} \quad . \tag{2.56}$$

Osie Y_0 i Z_0 nie są osiami głównymi dla trójkąta prostokątnego więc moment dewiacyjny będzie różny od zera. Jego wartość bezwzględną oblicza się ze wzoru

$$|I_{Y0Z0}|=\frac{b^2\cdot h^2}{72} \quad . \tag{2.57}$$



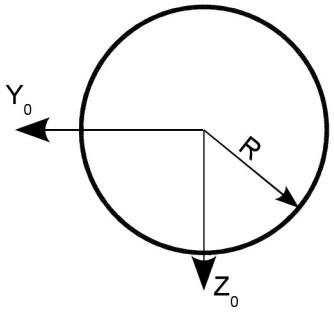
Rys. 2.8. Trójkąt prostokątny z zaznaczonym większym polem powierzchni w ćwiartkach ujemnych.

Znak momentu dewiacyjnego ustala się na podstawie położenia trójkąta prostokątnego w układzie współrzędnych. Na rysunku 2.8 została zaznaczona większa część przekroju trójkąta. Część ta znajduje się w ćwiartkach, w których wyrażenie $y_0 z_0 dA$ jest ujemne (będą to tak zwane ćwiartki ujemne) więc moment dewiacyjny trójkąta ma wartość ujemną. W przypadku innego usytuowania trójkąta w układzie współrzędnych znak momentu dewiacyjnego należy ustalić w zależności od położenia większej części przekroju.

W przypadku przekroju kołowego o promieniu R środek ciężkości znajduje się oczywiście w środku koła. Osiowe momenty bezwładności w układzie osi środkowych wynoszą

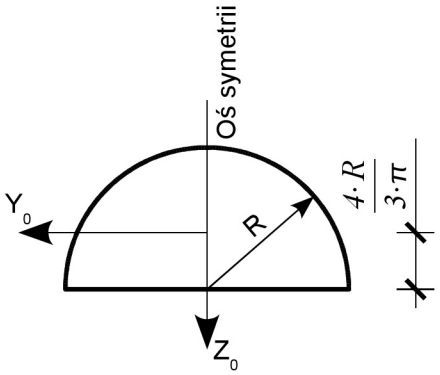
$$I_{Y0} = I_{Z0} = \frac{\pi \cdot R^4}{4} \quad . \tag{2.58}$$

Moment dewiacyjny przekroju kołowego wynosi oczywiście **zero**.



Rys. 2.9. Przekrój kołowy.

W przypadku przekroju będącego połową koła położenie środka ciężkości zostało pokazane na rysunku 2.10.



Rys. 2.10. Przekrój będący połową koła.

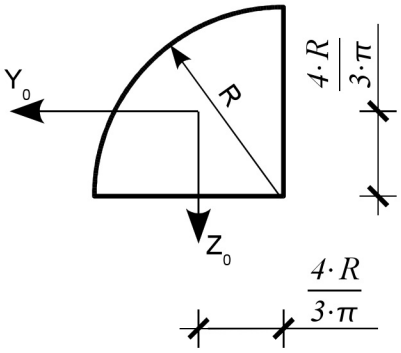
Osiowe momenty bezwładności wynoszą

$$I_{Y0}=\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\cdot\pi}\right)R^4=0,1098\cdot R^4 \quad , \tag{2.59}$$

$$I_{Z0}=\frac{\pi\cdot R^4}{8}=0,3927\cdot R^4 \quad . \tag{2.60}$$

Moment dewiacyjny wynosi oczywiście **zero**.

Położenie środka ciężkości w przekroju będącego ćwiartką koła o promieniu R przedstawione zostało na rysunku 2.11.



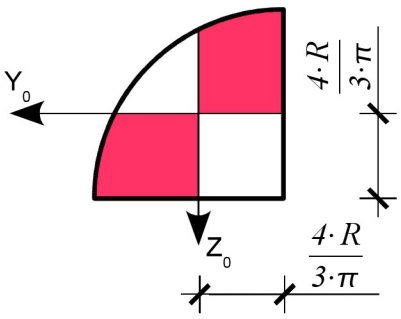
Rys. 2.11. Przekrój będący ćwiartką koła.

Osiowe momenty bezwładności wynoszą

$$I_{Y0}=I_{Z0}=0,05488\cdot R^4 \quad . \tag{2.61}$$

Wartość bezwzględna momentu dewiacyjnego wynosi

$$|I_{Y0Z0}|=0,01647\cdot R^4 \quad . \tag{2.62}$$



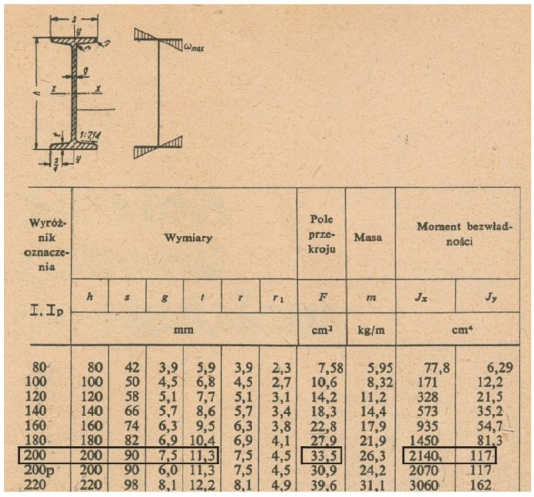
Rys. 2.12. Przekrój będący ćwiartką koła z zaznaczonym większym polem powierzchni w ćwiartkach dodatnich.

Znak momentu dewiacyjnego ustala się podobnie jak dla przekroju trójkątnego. Większą część przekroju przedstawia rysunek 2.12. W tym przypadku większa część przekroju znajduje się w ćwiartkach dodatnich więc moment dewiacyjny będzie dodatni.

2.8 Przekroje walcowane

Osobną grupę prętów stanowią pręty wykonane z kształtowników walcowanych. Charakterystyki tego typu przekrojów znajdują się w **Tablicach do projektowania konstrukcji metalowych**. Istnieje wiele rodzajów tego typu przekrojów. Poniżej zostaną przedstawione podstawowe typy.

1. Dwuteownik. Wygląd przekroju oraz wielkości potrzebne do wyznaczenia charakterystyk geometrycznych przedstawia rysunek 2.13.



Wyróżnik oznaczenia	Wymiary						Pole przekroju	Masa	Moment bezwładności	
	h	s	g	t	r	r_1	F	m	J_x	J_y
I, Ip	mm						cm²	kg/m	cm⁴	
80	80	42	3,9	5,9	3,9	2,3	7,58	5,95	77,8	6,29
100	100	50	4,5	6,8	4,5	2,7	10,6	8,32	171	12,2
120	120	58	5,1	7,7	5,1	3,1	14,2	11,2	328	21,5
140	140	66	5,7	8,6	5,7	3,4	18,3	14,4	573	35,2
160	160	74	6,3	9,5	6,3	3,8	22,8	17,9	935	54,7
180	180	82	6,9	10,4	6,9	4,1	27,9	21,9	1450	81,3
200	200	90	7,5	11,3	7,5	4,5	33,5	26,3	2140	117
200p	200	90	6,0	11,3	7,5	4,5	30,9	24,2	2070	117
220	220	98	8,1	12,2	8,1	4,9	39,6	31,1	3060	162

Rys. 2.13. Przekrój dwuteowy.

Poziome elementy nazywamy **półkami** natomiast pionowy element nazywany jest **środnikiem**.

2. Połówka dwuteownika. Wygląd przekroju oraz wielkości potrzebne do wyznaczenia charakterystyk geometrycznych przedstawia rysunek 2.14.
3. Ceownik. Wygląd przekroju oraz wielkości potrzebne do wyznaczenia charakterystyk geometrycznych przedstawia rysunek 2.15.
4. Kątownik równoramienny. Wygląd przekroju oraz wielkości potrzebne do wyznaczenia charakterystyk geometrycznych przedstawia rysunek 2.16. Dla grubości półki 3,0 mm odczytąc należy wartości górne a dla 4,0 mm dolne.
5. Kątownik nierównoramienny. Wygląd przekroju oraz wielkości potrzebne do wyznaczenia charakterystyk geometrycznych przedstawia rysunek 2.17. Dla grubości półki 5,0 mm odczytując należy wartości górne a dla 6,0 mm dolne.

4 Tablica

POŁÓWKI DWUTEOWNIKÓW NORMALNYCH

Wyróżnik oznaczenia ½I, ½I p	Wymiary h	Wymiary e	Pole przekroju F	Moment statyczny względem osi $x_1 - x_1$ S_{x_1}	Moment bezwładności J_x	Moment bezwładności J_y	Wskaźnik wytrzymałości W_x	Wskaźnik wytrzymałości W_y	Promień bezwładności i_x	Promień bezwładności i_y
	mm	cm	cm²	cm³	cm⁴		cm³		cm	
80	40	0,99	3,79	11,4	4,56	3,15	1,52	1,50	1,10	0,91
100	50	1,25	5,30	19,9	10,8	6,10	2,87	2,44	1,42	1,07
120	60	1,52	7,10	31,8	21,2	10,8	4,77	3,71	1,73	1,23
140	70	1,79	9,15	47,7	37,9	17,6	7,26	5,35	2,03	1,40
160	80	2,04	11,4	68,0	62,2	27,4	10,5	7,40	2,34	1,55
180	90	2,30	13,9	93,4	99,7	40,7	14,9	9,90	2,65	1,71
200	100	2,57	16,7	125	144	58,5	19,4	13,0	2,93	1,87
200p	100	2,30	15,5	124	124	58,3	14,7	12,4	2,72	1,94
220	110	2,82	19,8	162	205	81,0	25,4	16,6	3,21	2,02
220p	110	2,45	17,9	153	162	81,0	18,9	16,5	3,01	2,13
240	120	3,09	23,1	206	289	110	32,5	20,8	3,54	2,20

Rys. 2.14. Połówka dwuteownika.

Wyróżnik oznaczenia ⊏, ⊏p	Wymiary h	s	g	t	r	r_1	e	a	Pole przekroju F	Masa m	Moment bezwładności J_x	Moment bezwładności J_y
	mm						cm		cm²	kg/m	cm⁴	
35	35	35	5,0	6,0	6,0	3,0	1,31	1,02	5,33	4,18	9,32	5,75
40	40	20	5,0	5,0	5,0	2,5	0,65	1,28	3,51	2,75	7,26	1,06
45	45	38	5,0	6,0	6,0	3,0	1,34	1,11	6,17	4,84	18,7	7,81
50	50	38	5,0	7,0	7,0	3,5	1,37	1,37	7,12	5,59	26,4	9,12
65	65	42	5,5	7,5	7,5	4,0	1,42	1,47	9,03	7,09	57,5	14,1
80	80	45	6,0	8,0	8,0	4,0	1,45	1,54	11,0	8,64	106	19,4
80p	80	45	5,0	8,0	8,0	4,0	1,50	1,37	10,4	8,14	103	18,9
100	100	50	6,0	8,5	8,5	4,5	1,55	1,69	13,5	10,6	206	29,3

Rys. 2.15. Przekrój ceowy.

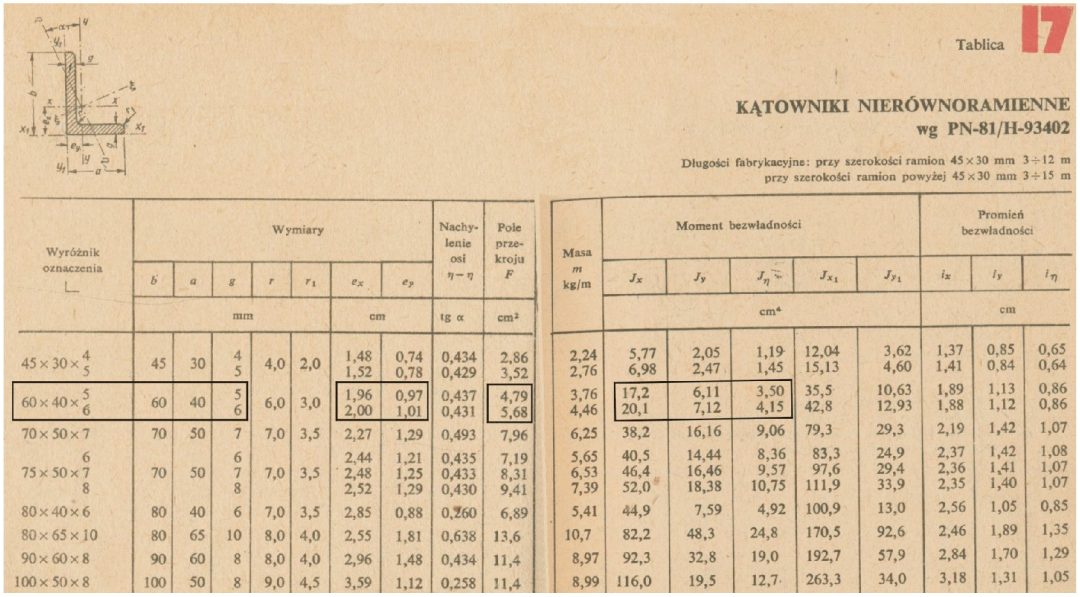
Tablica 15

KĄTOWNIKI RÓWNORAMIENNE wg PN-69/H-93401

Długości handlowe: przy szerokości ramion do 45×45 mm 3÷12 m; przy szerokości powyżej 45×45 mm 3÷15 m

Wyróżnik oznaczenia L	Wymiary a	g	r	r_1	e	w	v	Pole przekroju F	Masa m	Moment bezwładności J_x	J_ξ	J_η	J_{x_1}	Promień bezwładności i_x	i_ξ	i_η
	mm					cm		cm²	kg/m	cm⁴				cm		
20×20×3	20	3	3,5	2,0	0,06	1,41	0,85	1,12	0,88	0,39	0,62	0,15	0,79	0,59	0,74	0,37
4*)		4			0,64		0,90	1,45	0,14	0,48	0,77	0,19	1,07	0,58	0,73	0,36
25×25×3	25	3	3,5	2,0	0,73	1,77	1,03	1,42	1,12	0,79	1,27	0,31	1,55	0,75	0,95	0,47
4*)		4			0,76		1,08	1,85	1,45	1,01	1,61	0,40	2,08	0,74	0,93	0,47
3*)		3			0,84		1,18	1,74	1,36	1,41	2,24	0,57	2,64	0,90	1,14	0,57
30×30×4	30	4	5,0	2,5	0,89	2,12	1,24	2,27	1,78	1,81	2,85	0,76	3,61	0,89	1,12	0,57
5*)		5			0,92		1,30	2,78	2,18	2,16	3,41	0,91	4,51	0,88	1,11	0,57
3		3			0,96		1,36	2,04	1,60	2,29	3,63	0,95	4,17	1,06	1,34	0,68
35×35×4	35	4	5,0	2,5	1,00	2,47	1,41	2,67	2,10	2,96	4,68	1,24	5,63	1,05	1,33	0,68
5*)		5			1,04		1,47	3,28	2,57	3,56	5,63	1,49	7,11	1,04	1,31	0,67

Rys. 2.16. Kątownik równoramienny.



Tablica 17

KĄTOWNIKI NIERÓWNORAMIENNE
wg PN-81/H-93402

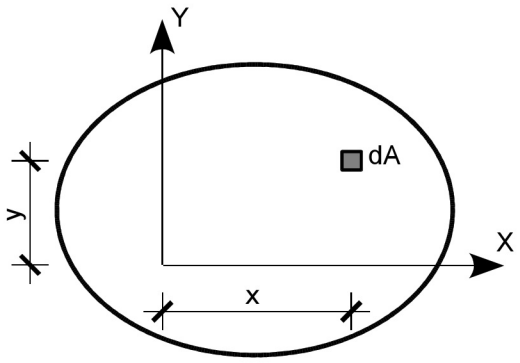
Długości fabrykacyjne: przy szerokości ramion 45×30 mm 3÷12 m
przy szerokości ramion powyżej 45×30 mm 3÷15 m

Wyróżnik oznaczenia	Wymiary b	a	g	r	r_1	e_x	e_y	Nachylenie osi $\eta-\eta$	Pole przekroju F	Masa m kg/m	Moment bezwładności J_x	J_y	J_η	J_{x_1}	J_{y_1}	Promień bezwładności i_x	i_y	i_η
	mm					cm		tg α	cm²		cm⁴					cm		
45×30×4	45	30	4	4,0	2,0	1,48	0,74	0,434	2,86	2,24	5,77	2,05	1,19	12,04	3,62	1,37	0,85	0,65
45×30×5			5			1,52	0,78	0,429	3,52	2,76	6,98	2,47	1,45	15,13	4,60	1,41	0,84	0,64
60×40×5	60	40	5	6,0	3,0	1,96	0,97	0,437	4,79	3,76	17,2	6,11	3,50	35,5	10,63	1,89	1,13	0,86
60×40×6			6			2,00	1,01	0,431	5,68	4,46	20,1	7,12	4,15	42,8	12,93	1,88	1,12	0,86
70×50×7	70	50	7	7,0	3,5	2,27	1,29	0,493	7,96	6,25	38,2	16,16	9,06	79,3	29,3	2,19	1,42	1,07
75×50×6	70	50	6	7,0	3,5	2,44	1,21	0,435	7,19	5,65	40,5	14,44	8,36	83,3	24,9	2,37	1,42	1,08
75×50×7			7			2,48	1,25	0,433	8,31	6,53	46,4	16,46	9,57	97,6	29,4	2,36	1,41	1,07
75×50×8			8			2,52	1,29	0,430	9,41	7,39	52,0	18,38	10,75	111,9	33,9	2,35	1,40	1,07
80×40×6	80	40	6	7,0	3,5	2,85	0,88	0,260	6,89	5,41	44,9	7,59	4,92	100,9	13,0	2,56	1,05	0,85
80×65×10	80	65	10	8,0	4,0	2,55	1,81	0,638	13,6	10,7	82,2	48,3	24,8	170,5	92,6	2,46	1,89	1,35
90×60×8	90	60	8	8,0	4,0	2,96	1,48	0,434	11,4	8,97	92,3	32,8	19,0	192,7	57,9	2,84	1,70	1,29
100×50×8	100	50	8	9,0	4,5	3,59	1,12	0,258	11,4	8,99	116,0	19,5	12,7	263,3	34,0	3,18	1,31	1,05

Rys. 2.17. Kątownik nierównoramienny.

2.9 Momenty bezwładności w "klasycznym" układzie XY

W wielu podręcznikach charakterystyki geometryczne są wyznaczone w układzie XY, który został przedstawiony na rysunku 2.18.



Rys. 2.18. Przekrój w "klasycznym" układzie współrzędnych XY.

Definicje momentu statycznego względem osi X i Y mają postać

$$S_X = \int_A y \cdot dA \quad , \tag{2.63}$$

$$S_Y = \int_A x \cdot dA \quad . \tag{2.64}$$

Definicje momentu bezwładności mają postać

$$I_X = \int_A y^2 \cdot dA \quad , \tag{2.65}$$

$$I_Y = \int_A x^2 \cdot dA \quad , \tag{2.66}$$

$$I_{YZ} = \int_A x \cdot y \cdot dA \quad . \tag{2.67}$$

Położenie środka ciężkości oblicza się ze wzorów

$$x_C = \frac{S_Y}{A} \quad , \tag{2.68}$$

$$y_C = \frac{S_X}{A} \quad .$$

Jeżeli przekrój składa się z n części o znanych polach powierzchni A_i oraz współrzędnych środków ciężkości x_i i y_i to współrzędne środka ciężkości oblicza się ze wzorów

$$x_C = \frac{S_Y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \quad , \tag{2.69}$$

$$y_C = \frac{S_X}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \quad . \tag{2.70}$$

Twierdzenie Steinera będzie miało postać

$$I_X = I_{X0} + y_P^2 \cdot A \quad , \tag{2.71}$$

$$I_Y = I_{Y0} + x_P^2 \cdot A \quad , \tag{2.72}$$

$$I_{XY} = I_{X0Y0} + x_P \cdot y_P \cdot A \quad . \tag{2.73}$$

We wzorach (2.71), (2.72) i (2.73) I_{X0}, I_{Y0} i I_{X0Y0} oznaczają momenty względem osi środkowych, x_P i y_P oznaczają współrzędne środka ciężkości w układzie XY.

Wzory transformacyjne będą miały postać

$$I_{X'}=\frac{I_X+I_Y}{2}+\frac{I_X-I_Y}{2}cos\left(2\cdot\alpha\right)-I_{XY}\cdot sin\left(2\cdot\alpha\right) \quad , \tag{2.74}$$

$$I_{Y'}=\frac{I_X+I_Y}{2}-\frac{I_X-I_Y}{2}cos\left(2\cdot\alpha\right)+I_{XY}\cdot sin\left(2\cdot\alpha\right) \quad , \tag{2.75}$$

$$I_{X'Y'}=\frac{I_X-I_Y}{2}sin\left(2\cdot\alpha\right)+I_{XY}\cdot cos\left(2\cdot\alpha\right) \quad . \tag{2.76}$$

Kąt nachylenia osi głównych oblicza się ze wzoru

$$tg\left(2\cdot\alpha_{gl}\right)=-\frac{2\cdot I_{XY}}{I_X-I_Y} \quad . \tag{2.77}$$

Wartości głównych momentów bezwładności oblicza sięze wzorów

$$I_{Xgl}=\frac{I_X+I_Y}{2}+\frac{I_X-I_Y}{2}cos\left(2\cdot\alpha_{gl}\right)-I_{XY}\cdot sin\left(2\cdot\alpha_{gl}\right) \quad , \tag{2.78}$$

$$I_{Ygl}=\frac{I_X+I_Y}{2}-\frac{I_X-I_Y}{2}cos\left(2\cdot\alpha_{gl}\right)+I_{XY}\cdot sin\left(2\cdot\alpha_{gl}\right) \quad . \tag{2.79}$$

Do sprawdzenia obliczeń można zastosować następujące wzory

$$I_I=\frac{I_X+I_Y}{2}+\sqrt{\left(\frac{I_X-I_Y}{2}\right)^2+I_{XY}^2} \quad , \tag{2.80}$$

$$I_{II}=\frac{I_X+I_Y}{2}-\sqrt{\left(\frac{I_X-I_Y}{2}\right)^2+I_{XY}^2} \quad . \tag{2.81}$$

Wartości niezmienników w dowolnym układzie współrzędnych oraz w układzie osi głównych będą wynosiły

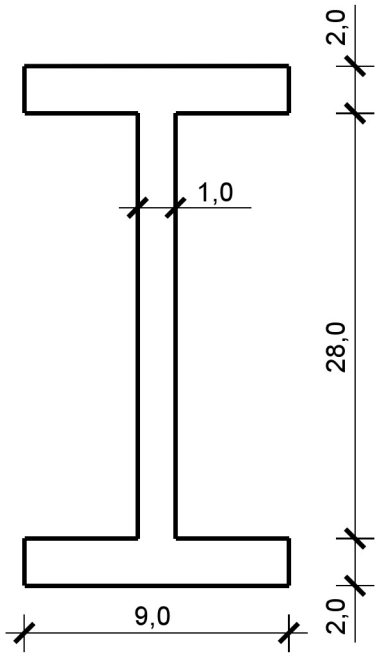
$$J_I=I_X+I_Y=I_{Xgl}+I_{Ygl} \tag{2.82}$$

$$J_2 = I_X \cdot I_Y - I_{XY}^2 = I_{Xgl} \cdot I_{Ygl} \tag{2.83}$$

2.10 Przykłady liczbowe

2.10.1 Przekrój blachownicowy - dwuteowy

Wyznaczyć główne momenty bezwładności I_{Ygl} oraz I_{Zgl} przekroju pokazanego na rysunku 2.19. Wszystkie wymiary są podane w centymetrach.

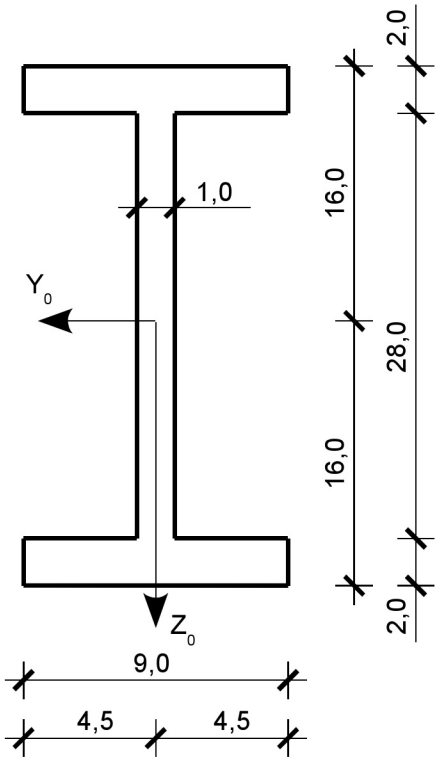


Rys. 2.19. Przekrój blachownicowy – dwuteowy.

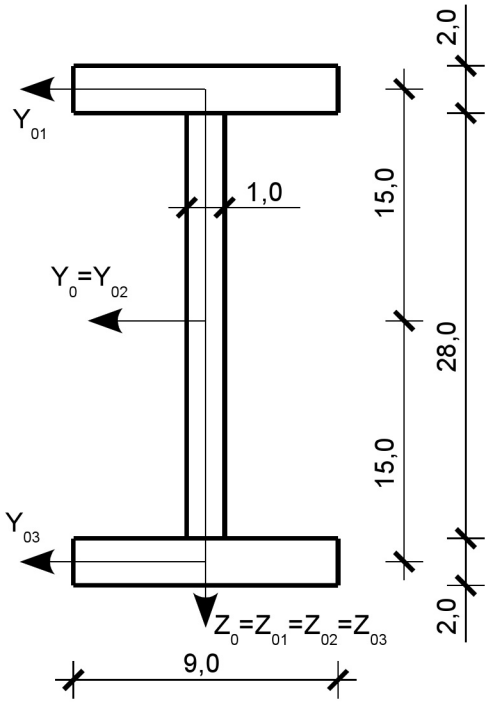
Ponieważ przekrój dwuteowy posiada dwie osie symetrii środek ciężkości znajduje się w punkcie przecięcia się obu osi symetrii. Przedstawia to rysunek 2.20. W celu wyznaczenia położenia środka ciężkości przekrój został podzielony na trzy figury składowe. Wszystkie figury są prostokątami. Zostało to przedstawione na rysunku 2.21.

Współrzędne środków ciężkości poszczególnych figur składowych wynoszą

$$\begin{aligned} y_{01} &= 0,0\ cm \quad z_{01} = -15,0\ cm \\ y_{02} &= 0,0\ cm \quad z_{02} = 0,0\ cm \\ y_{03} &= 0,0\ cm \quad z_{03} = +15,0\ cm \end{aligned} \tag{2.84}$$



Rys. 2.20. Położenie środka ciężkości przekroju dwuteowego.



Rys. 2.21. Podział dwuteownika na figury składowe.

Momenty bezwładności względem osi Y_0 oraz Z_0 wynoszą

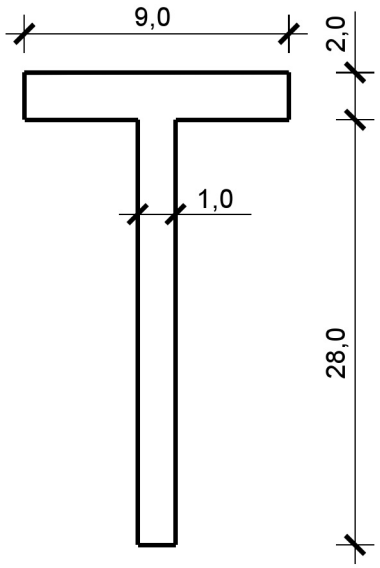
$$\begin{aligned} I_{Y0} &= \frac{9{,}0 \cdot 2{,}0^{\,3}}{12} + (-15{,}0)^2 \cdot 9{,}0 \cdot 2{,}0 \\ &+ \frac{1{,}0 \cdot 28{,}0^{\,3}}{12} + (0{,}0)^2 \cdot 1{,}0 \cdot 28{,}0 \\ &+ \frac{9{,}0 \cdot 2{,}0^{\,3}}{12} + (+15{,}0)^2 \cdot 9{,}0 \cdot 2{,}0 = 9941\ cm^4 \end{aligned} , \tag{2.85}$$

$$\begin{aligned} I_{Z0} &= \frac{2{,}0 \cdot 9{,}0^{\,3}}{12} + (0{,}0)^2 \cdot 9{,}0 \cdot 2{,}0 \\ &+ \frac{28{,}0 \cdot 1{,}0^{\,3}}{12} + (0{,}0)^2 \cdot 1{,}0 \cdot 28{,}0 \\ &+ \frac{2{,}0 \cdot 9{,}0^{\,3}}{12} + (0{,}0)^2 \cdot 9{,}0 \cdot 2{,}0 = 245{,}3\ cm^4 \end{aligned} . \tag{2.86}$$

Ze względu na to, że osie Y_0 oraz Z_0 są osiami symetrii przekroju dwuteowego moment dewiacyjny wynosi zero. Skoro więc moment dewiacyjny równa się zero to można wyciągnąć wniosek , że osie Y_0 i Z_0 są głównymi osiami bezwładności.

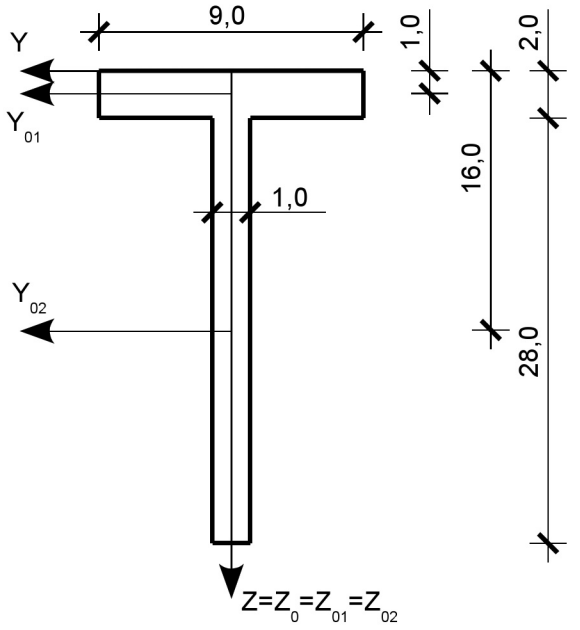
2.10.2 Przekrój blachownicowy - teowy

Wyznaczyć główne momenty bezwładności I_{Ygl} oraz I_{Zgl} przekroju pokazanego na rysunku 2.22. Wszystkie wymiary są podane w centymetrach.



Rys. 2.22. Przekrój blachownicowy teowy.

Ponieważ przekrój teowy posiada jedną oś symetrii środek ciężkości znajduje się na tej osi. W ten sposób znamy współrzędną y_C środka ciężkości. Chcąc wyznaczyć współrzędną z_C środka ciężkości został obrany układ współrzędnych YZ. Przedstawia to rysunek 2.23. Przekrój został podzielony na dwie figury składowe. Obie figury są prostokątami.



Rys. 2.23. Położenie środków ciężkości poszczególnych figur.

Współrzędne środków ciężkości poszczególnych figur w układzie YZ wynoszą

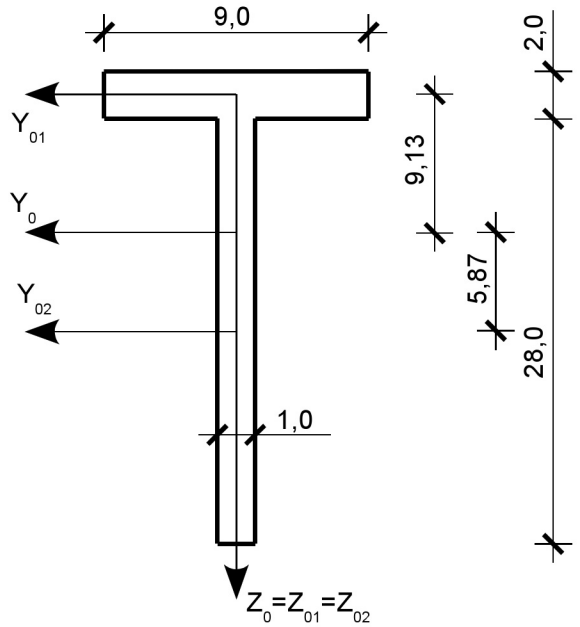
$$\begin{aligned} y_1 &= 0,0\ cm \quad z_1 = 1,0\ cm \\ y_2 &= 0,0\ cm \quad z_2 = 16,0\ cm \end{aligned} \quad . \tag{2.87}$$

Współrzędna z_C środka ciężkości wynosi

$$z_C = \frac{9.0 \cdot 2,0 \cdot 1,0 + 28,0 \cdot 1,0 \cdot 16,0}{9.0 \cdot 2,0 + 28,0 \cdot 1,0} = 10,13\ cm \quad . \tag{2.88}$$

Rysunek 2.24 przedstawia przekrój z zaznaczonym układem osi środkowych Y_0Z_0. Współrzędne środków ciężkości poszczególnych figur w układzie Y_0Z_0 wynoszą

$$\begin{aligned} y_{01} &= 0,0\ cm \quad z_{01} = -9,13\ cm \\ y_{02} &= 0,0\ cm \quad z_{02} = 5,87\ cm \end{aligned} \quad . \tag{2.89}$$



Rys. 2.24. Przekrój teowy z zaznaczonym układem osi środkowych.

Momenty bezwładności w układzie Y_0Z_0 wynoszą

$$I_{Y0}=\frac{9,0\cdot 2,0^{3}}{12}+\left(-9,13\right)^{2}\cdot 9,0\cdot 2,0 + \frac{1,0\cdot 28,0^{3}}{12}+\left(5,87\right)^{2}\cdot 1,0\cdot 28,0=4301\ cm^{4} \quad , \tag{2.90}$$

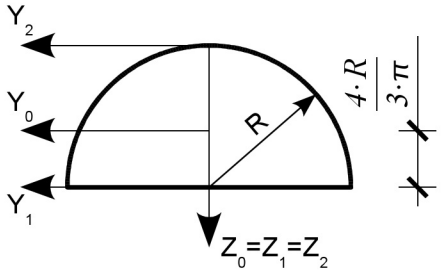
$$I_{Z0}=\frac{2,0\cdot 9,0^{3}}{12}+\left(0,0\right)^{2}\cdot 9,0\cdot 2,0 + \frac{28,0\cdot 1,0^{3}}{12}+\left(0,0\right)^{2}\cdot 1,0\cdot 28,0=123,8\ cm^{4} \quad . \tag{2.91}$$

Ze względu na to, że oś Z_0 jest osią symetrii przekroju teowego moment dewiacyjny wynosi zero. Skoro więc moment dewiacyjny równa się zero to można wyciągnąć wniosek , że osie Y_0 i Z_0 są głównymi osiami bezwładności.

2.10.3 Zastosowanie twierdzenia Steinera

Dany jest moment bezwładności przekroju będącego połówką koła względem osi Y_1. Wyznaczyć moment bezwładności względem osi Y_2. Przekrój został przedstawiony na rysunku 2.25.

$$I_{Y1}=\frac{\pi\cdot R^4}{8} \quad . \tag{2.92}$$



Rys. 2.25. Przekrój będący ćwiartką koła.

Zgodnie z twierdzeniem Steinera moment bezwładności względem osi Y_1 wynosi

$$I_{Y1}=I_{Y0}+z_1^2\cdot A \tag{2.93}$$

Współrzędna z_1 środka ciężkości przekroju w układzie Y_1Z_1 wynosił

$$z_1=-\frac{4\cdot R}{3\cdot\pi} \tag{2.94}$$

Ostatecznie moment bezwładności względem osi Y_1 wynosi

$$I_{Y1}=\frac{\pi\cdot R^4}{8}=I_{Y0}+\left(-\frac{4\cdot R}{3\cdot\pi}\right)^2\cdot\frac{\pi\cdot R^2}{2} \tag{2.95}$$

Moment bezwładności względem osi środkowej Y_0 wynosi

$$I_{Y0}=\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\cdot\pi}\right)\cdot R^4 \tag{2.96}$$

Moment bezwładności względem osi Y_2 wynosi (z_2 jest współrzędną środka ciężkości przekroju w układzie Y_2Z_2)

$$I_{Y2}=I_{Y0}+z_2^2\cdot A=\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\cdot\pi}\right)\cdot R^4+\left(R-\frac{4\cdot R}{3\cdot\pi}\right)^2\cdot\frac{\pi\cdot R^2}{2} \tag{2.97}$$