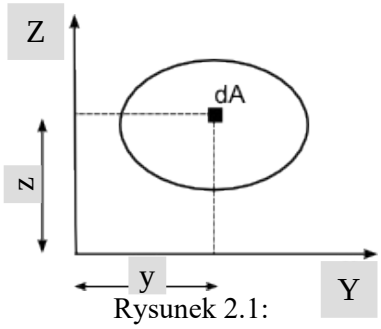
2. CHARAKTERYSTYKI GEOMETRYCZNE FIGUR PŁASKICH

2.1. MOMENTY STATYCZNE POLA

W podstawowych obliczeniach elementów konstrukcyjnych występują pewne wielkości związane z przekrojem poprzecznym tych elementów, które zależą od kształtu linii ograniczającej pole powierzchni, wielkości pola powierzchni i jego położenia względem przyjętego układu odniesienia. Noszą one ogólną nazwę charakterystyk geometrycznych figur płaskich. Zaliczamy do nich momenty statyczne i momenty bezwładności.

Weźmy pod uwagę dowolną figurę płaską związaną z układem współrzędnych Y,Z (rys. 2.1) i rozważmy dwie całki (2.1) i (2.2).



Rysunek 2.1:

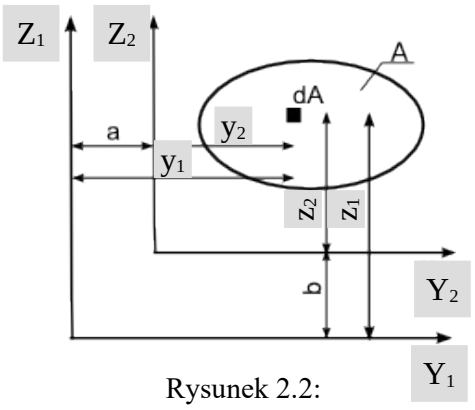
$$S_Y = \iint_A z \cdot dA \qquad (2.1)$$

$$S_Z = \iint_A y \cdot dA \qquad (2.2)$$

gdzie: A- oznacza całkowanie po całej powierzchni figury płaskiej

Każda całka przedstawia sumę iloczynów elementarnych powierzchni przez ich odległości od określonej osi (Y lub Z). **Całka S_y nosi nazwę momentu statycznego figury płaskiej względem osi Y, a całka S_z to moment statyczny figury płaskiej względem osi Z.** Moment statyczny pola wyrażamy w jednostkach długości do trzeciej potęgi (cm^3, m^3).

Przy równoległym przesunięciu osi wielkość momentów statycznych zmienia się. Rozpatrzmy dwie pary równoległych osi Y_1,Z_1 i Y_2,Z_2(rys. 2.2). Odległość między osiami Y_1 i Y_2 wynosi **b**, natomiast między osiami Z_1 i Z_2 równa jest **a**. Załóżmy, że powierzchnia figury płaskiej A oraz momenty statyczne S_{y1} i S_{z1} są znane. Obliczamy S_{Y2} i S_{Z2}.



Rysunek 2.2:

$$y_2 = y_1 - a \qquad z_2 = z_1 - b$$

szukane momenty statyczne będą równe:

$$S_{Y_2} = \iint_A (z_1 - b) \cdot dA$$

$$S_{Y_2} = \iint_A (y_1 - a) \cdot dA$$

czyli:

$$S_{Y_2} = S_{Y_1} - b \cdot A \qquad (2.3)$$

$$S_{Y_2} = S_{Y_1} - a \cdot A \qquad (2.4)$$

A zatem, przy równoległym przesunięciu osi moment statyczny zmienia się o wielkość iloczynu powierzchni **A** przez odległość między tymi osiami. Wielkości **a** i **b** mogą być zarówno dodatnie jak i ujemne.

Oś względem której moment statyczny jest równy zeru nazywa się osią centralną.
Z równań (2.3) i (2.4) otrzymamy współrzędne początku nowego układu względem którego momenty statyczne będą równe zero.

$$0 = S_{YI} - b \cdot A$$

$$b = z_c = \frac{S_{YI}}{A} \tag{2.5}$$

analogicznie dla drugiego przypadku osi równoległych:

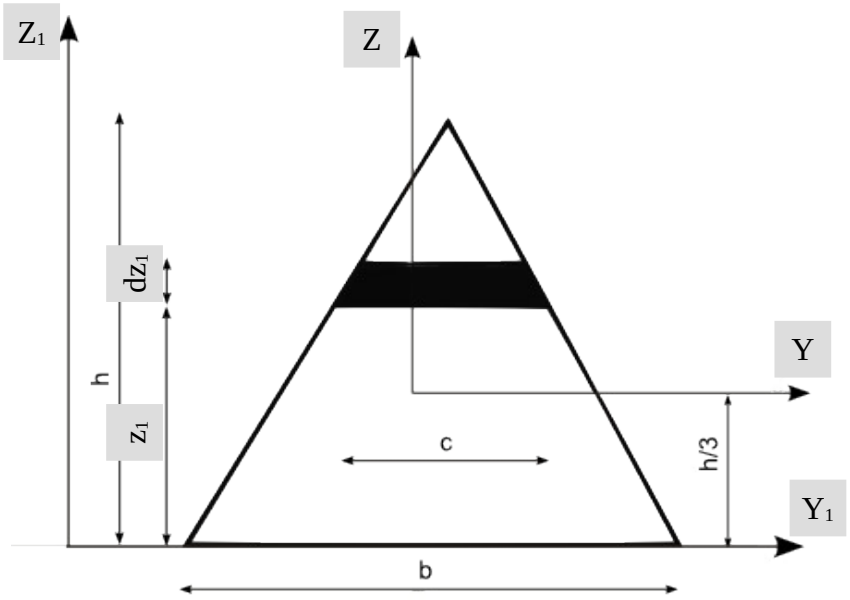
$$a = y_c = \frac{S_{YI}}{A} \tag{2.6}$$

Punkt przecięcia się osi centralnych nazywamy **środkiem ciężkości figury płaskiej**, którego współrzędne względem dowolnego układu osi Y_1, Z_1 określają zależności (2.5) i (2.6).

Jeżeli figura płaska ma oś symetrii, to jej środek ciężkości leży na tej osi, w przypadku zaś dwu osi symetrii środek ciężkości takiej figury znajduje się w punkcie ich przecięcia.

Na zakończenie zauważmy, że wzory (2.5) i (2.6) pozwalają określić położenie środka ciężkości, jeśli znamy momenty statyczne, oraz odwrotnie, znaleźć momenty statyczne, jeśli znane jest położenie środka ciężkości figury płaskiej.

Przykład 2.1. Znaleźć odległość środka ciężkości trójkąta od jego podstawy b (rys. 2.3).



Rysunek 2.3:

Na wstępie obliczamy moment statyczny trójkąta względem przyjętej osi Y_1 korzystając z równania (2.1):

$$S_{YI} = \iint_A z_1 \cdot dA$$

Dzielimy pole trójkąta na paski o szerokości c i wysokości dz_1. Pole powierzchni elementarnego paska $dA = c \cdot dz_1$

Z podobieństwa trójkątów dostajemy:

$$c=\frac{b}{h}\cdot(h-z_1),$$

gdzie: ***b*** jest szerokością podstawy trójkąta, a ***h*** - jego wysokością. Wobec tego, po podstawieniu otrzymamy:

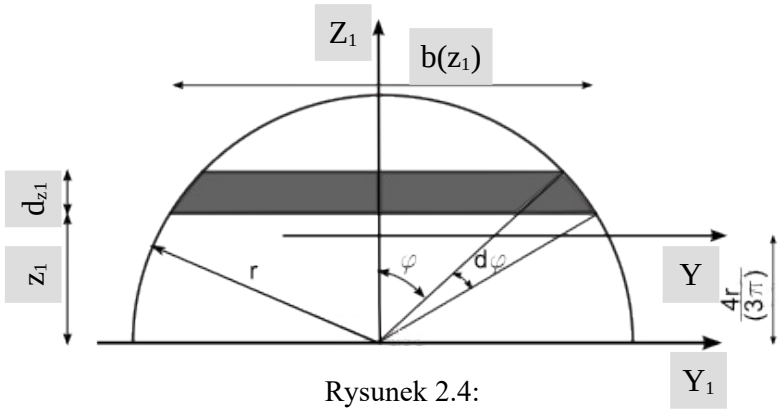
$$S_{YI}=\frac{b}{h}\cdot\int_0^h(h-z_1)\cdot z_1\cdot dz_1 \qquad (2.7)$$

$$S_{YI}=\frac{1}{6}\cdot b\cdot h^2$$

a zatem (korzystając z równania 2.5), odległość od podstawy trójkąta do środka ciężkości wynosi:

$$z_c=\frac{S_{YI}}{A}=\frac{\frac{b\cdot h^2}{6}}{\frac{b\cdot h}{2}}=\frac{h}{3}$$

Przykład 2.2. Określić położenie środka ciężkości półokręgu o promieniu **r** (rys.2.4).



Rysunek 2.4:

Przyjmujemy układ osi y_1, z_1. Ponieważ oś z_1 jest osią symetrii więc, y_c=0. Odległość środka ciężkości od osi y_1 obliczamy ze wzoru (2.5)

$$z_c=\frac{S_{YI}}{A}$$

gdzie: $S_{YI}=\iint_A z_1\cdot dA$ i $A=\frac{\pi\cdot r^2}{2}$

Dzielimy pole półokręgu na paski o elementarnej powierzchni $dA=b(z_1)\cdot dz_1$. Moment statyczny S_{YI} wynosi:

$$S_{YI}=\int_0^r b(z_1)\cdot z_1\cdot dz_1$$

Przechodząc do współrzędnych biegunowych:

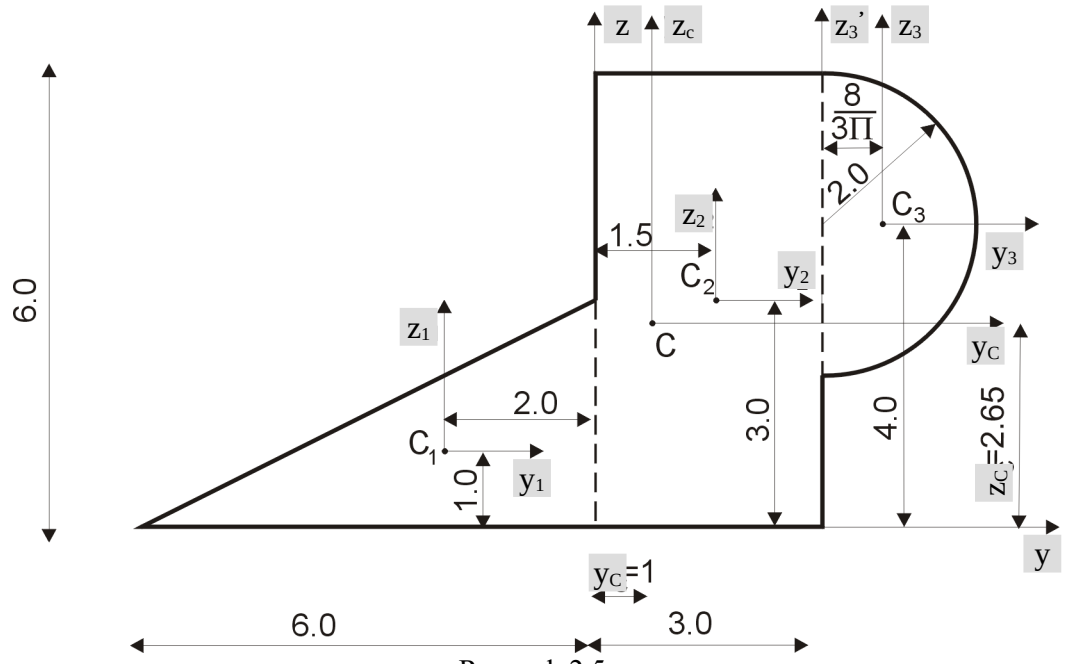
$b(z_1)=2\cdot r\cdot\sin\varphi$, $z_1=r\cdot\cos\varphi$, $dz_1=-r\cdot\sin\varphi\, d\varphi$, otrzymamy moment statyczny półokręgu względem osi y_1:

$$S_{yl} = -2 \cdot r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \sin^3 \varphi / \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3} \cdot r^3$$

Druga współrzędna środka ciężkości będzie wynosić:

$$z_c = \frac{2 \cdot r^3}{3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi r^2} = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$$

Przykład 2.3. Określić położenie środka ciężkości figury złożonej (rys.2.5). Wymiary podano w [cm].



Rysunek 2.5:

Dzielimy figurę złożoną na figury proste: trójkąt, prostokąt i półokrąg. Przyjmujemy dowolny układ współrzędnych y, z i określamy współrzędne środków ciężkości poszczególnych figur prostych.

Momenty statyczne figury złożonej są równe sumie momentów statycznych figur prostych:

$$S_y = A_1 \cdot z_{c1} + A_2 \cdot z_{c2} + A_3 \cdot z_{c3}$$
$$S_z = A_1 \cdot y_{c1} + A_2 \cdot y_{c2} + A_3 \cdot y_{c3}$$

A zatem:

$$S_y = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 6 \cdot 3 + \pi \cdot \frac{2^2}{2} \cdot 4 = 88{,}1 \ cm^3$$

$$S_z = -\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 + 3 \cdot 6 \cdot 1{,}5 + \pi \cdot \frac{2^2}{2} \cdot (3 + \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot \pi}) = 33{,}2 \ cm^3$$

Pole powierzchni figury złożonej jest równe:

$$A=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3+3\cdot 6+\pi\cdot\frac{2^2}{2}=33{,}3\ cm^3$$

Szukane współrzędne środka ciężkości w układzie Y, Z mają więc następujące wartości:

$$y_c=\frac{S_Z}{A}\approx 1\ cm$$

$$z_c=\frac{S_Y}{A}=2{,}65\ cm$$

2.2. MOMENT BEZWŁADNOŚCI POLA

W uzupełnieniu przedstawionych w poprzednim rozdziale momentów statycznych rozpatrzmy jeszcze trzy całki:

$$J_Y=\iint_A z^2\cdot dA \tag{2.8}$$

$$J_Z=\iint_A y^2\cdot dA \tag{2.9}$$

$$J_{YZ}=\iint_A y\cdot z\cdot dA \tag{2.10}$$

gdzie: y i z oznaczają bieżące współrzędne elementarnej powierzchni dA w dowolnie przyjętym układzie współrzędnych Y, Z (rys. 2.1).

Pierwsze dwie całki noszą nazwę osiowych momentów bezwładności względem osi Y i Z. Trzecia całka nazywa się odśrodkowym momentem bezwładności (momentem dewiacji) względem osi Y, Z. Ze wzorów (2.8), (2.9), (2.10) wynika, że momenty bezwładności pól wyrażają się w jednostkach długości do czwartej potęgi (cm^4, m^4).

Osiowe momenty bezwładności są zawsze dodatnie, odśrodkowy moment bezwładności może być zarówno dodatni, jak i ujemny, w zależności od położenia powierzchni dA względem osi Y, Z.

Wyprowadźmy wzory pozwalające obliczać momenty bezwładności względem osi przesuniętych równolegle (rys. 2.2). Przyjmijmy, że dane są momenty statyczne i momenty bezwładności pola względem osi Y_1 i Z_1. Momenty bezwładności względem osi Y_2 i Z_2 wynoszą:

$$J_{Y2}=\iint_A z_2^2\cdot dA$$

$$J_{Z2}=\iint_A y_2^2\cdot dA$$

$$J_{Y2Z2}=\iint_A y_2\cdot z_2\cdot dA$$

Podstawiając $y_2 = y_1 - a$ oraz $z_2 = z_1 - b$ otrzymamy:

$$J_{Y2}=\iint_A (z_1-b)^2\cdot dA$$

$$J_{Z2}=\iint_A (y_1-a)^2\cdot dA$$

$$J_{Y2Z2}=\iint_A (y_1-a)\cdot(z_1-b)\cdot dA$$

Po uwzględnieniu zależności (2.1) i (2.2) oraz (2.8), (2.9), (2.10) oraz dokonaniu prostych przekształceń, momenty bezwładności wynoszą:

$$J_{Y2} = J_{Y1} - 2 \cdot b \cdot S_{Y1} + b^2 \cdot A \tag{2.11}$$

$$J_{Z2} = J_{Z1} - 2 \cdot a \cdot S_{Z1} + a^2 \cdot A \tag{2.12}$$

$$J_{Y2Z2} = J_{Y1Z1} - a \cdot S_{Y1} \cdot b \cdot S_{Z1} + a \cdot b \cdot A \tag{2.13}$$

Jeżeli osie Y_1 i Z_1 są osiami centralnymi, to $S_{Y1} = S_{Z1} = 0$ i wyrażenia (2.11), (2.12), (2.13) upraszczają się do postaci:

$$J_{Y2} = J_{Y1} + b^2 \cdot A \tag{2.14}$$

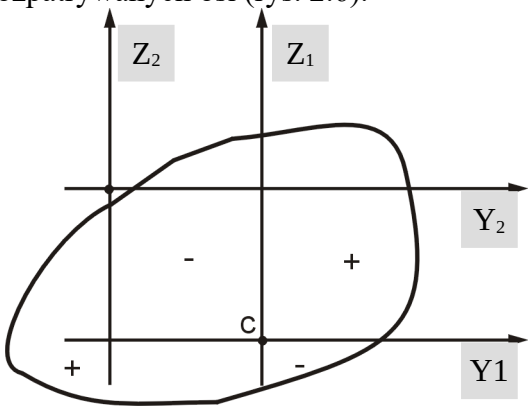
$$J_{Z2} = J_{Z1} + a^2 \cdot A \tag{2.15}$$

$$J_{Y2Z2} = J_{Y1Z1} + a \cdot b \cdot A \tag{2.16}$$

Z równań (2.14) i (2.15) wynika że minimalne osiowe momenty bezwładności odpowiadają osiom centralnym (a = 0, b = 0). Przy przejściu od osi centralnych do osi dowolnych, osiowe momenty bezwładności zwiększają się odpowiednio o wielkości $a^2 \cdot A$ i $b^2 \cdot A$, natomiast przy przejściu odwrotnym, osiowe momenty bezwładności maleją odpowiednio o $a^2 \cdot A$ i $b^2 \cdot A$.

Przy obliczaniu odśrodkowego momentu bezwładności zgodnie ze wzorem (2.16) należy prawidłowo ustalić znak wielkości a i b (mogą być zarówno dodatnie jak i ujemne)

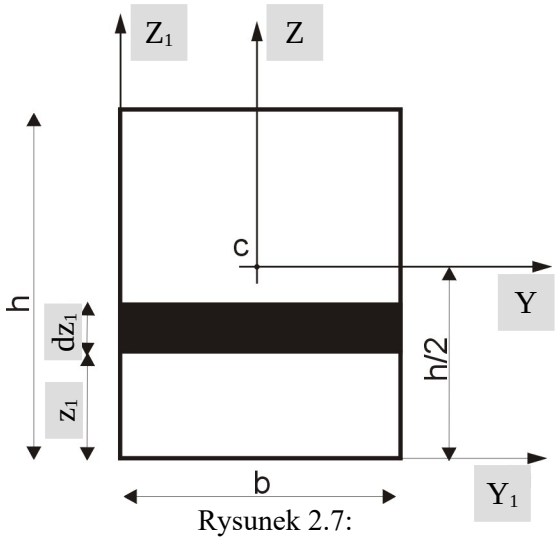
Znak odśrodkowego momentu bezwładności można określić również analizując położenie powierzchni względem rozpatrywanych osi (rys. 2.6).



Rysunek 2.6:

Część powierzchni znajdująca się w 1 i 3 ćwiartce układu współrzędnych y_1, z_1 daje dodatnie wartości odśrodkowego momentu bezwładności, natomiast część znajdująca się w 2 i 4 ćwiartce daje wartości ujemne. Dlatego też, przy równoległym przesuwaniu osi najprościej jest ustalić znak iloczynu $a \cdot b \cdot A$ zgodnie z tym, która z czterech dodawanych powierzchni zwiększa się, a która ulega zmniejszeniu. Przechodząc od osi centralnych y_1, z_1 (rys. 2.6) do osi y_2, z_2, rośnie powierzchnia w 4 ćwiartce. Dlatego też iloczyn $a \cdot b \cdot A$ należy odjąć od momentu I_{y1z1}, wskutek czego odśrodkowy moment bezwładności I_{y2z2} maleje, stając się ujemny co do wartości.

Przykład 2.4. Wyznaczyć osiowe momenty bezwładności prostokąta względem osi y_1 i względem osi centralnej y (rys.2.7).



Rysunek 2.7:

Dzielimy pole prostokąta na paski o szerokości **b** i wysokości **dz**$_1$. Zgodnie z definicją osiowego momentu bezwładności (wzór 2.8):

$$J_{YI}=\iint_A z_1^2\cdot dA$$

Po podstawieniu pola powierzchni elementarnego paska $dA=b\cdot dz_1$, otrzymamy:

$$J_{YI}=\int_0^h z_1^2\cdot b\cdot dz_1=\frac{(b\cdot h^3)}{3}$$

Po przekształceniu i podstawieniu do równania (2.14) osiowy moment bezwładności względem osi centralnej y, wyniesie:

$$J_{YI}=J_Y+\left(\frac{h}{2}\right)^2\cdot A$$

$$J_Y=J_{YI}-\left(\frac{h}{2}\right)^2\cdot A=\frac{b\cdot h^3}{3}-\frac{h^2}{4}\cdot h\cdot b=\frac{b\cdot h^3}{12}$$

Ten sam wynik uzyskamy bezpośrednio z wzoru (2.8):

$$J_Y=\iint_A z^2\cdot dA=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2\cdot b\cdot dz=\frac{b\cdot h^3}{12}$$

Przykład 2.5. Wyznaczyć osiowe momenty bezwładności trójkąta (rys. 2.3) względem osi Y_I i osi centralnej Y.

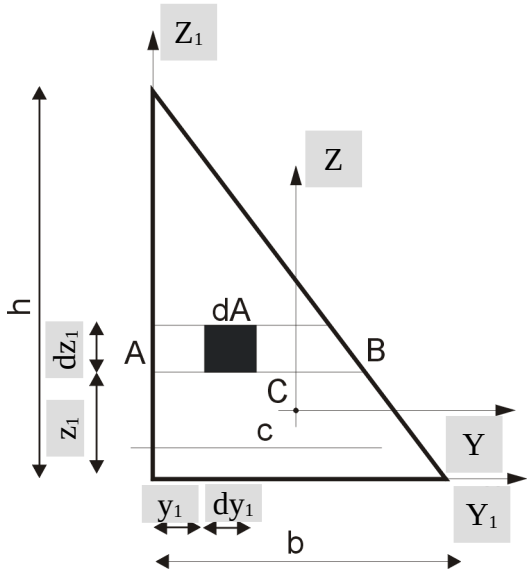
Korzystając z równania (2.8), analogicznie jak w przykładzie 2.1, po podstawieniu pola powierzchni elementarnego paska, otrzymamy:

$$J_{YI}=\frac{b}{h}\cdot\int_0^h (h-z_1)\cdot z_1^2\cdot b\cdot dz_1=\frac{b\cdot h^3}{12}$$

Przechodząc do osi centralnej y osiowy centralny moment bezwładności wyniesie:

$$J_Y=J_{YI}-\left(\frac{h}{3}\right)^2\cdot A=\frac{b\cdot h^3}{36}$$

Przykład 2.6. Wyznaczyć odśrodkowe momenty bezwładności trójkąta prostokątnego względem osi Y_1, Z_1 oraz względem osi centralnych Y, Z (rys. 2.8).



Rysunek 2.8:

Wyodrębniamy elementarną powierzchnię $dA = dy_1 \cdot dz_1$. Odśrodkowy moment bezwładności paska AB względem osi y_1, z_1 wynosi:

$$J_{Y1Z1}(AB) = z_1 \cdot dz_1 \cdot \int_0^c y_1 \cdot dy_1 = z_1 \cdot dz_1 \cdot \frac{c^2}{2}$$

ponieważ

$$c = \frac{b}{h} \cdot (h - z_1)$$

więc:

$$J_{Y1Z1}(AB) = \frac{b^2}{2 \cdot h^2} \cdot (h - z_1)^2 \cdot z_1 \cdot dz_1$$

Całkując $J_{Y1Z1}(AB)$ po z_1 od 0 do h otrzymamy:

$$J_{Y1Z1}(AB) = \frac{b^2}{2 \cdot h^2} \cdot \int_0^h (h - z_1)^2 \cdot z_1 \cdot dz_1 = \frac{b^2 \cdot h^2}{24}$$

Przechodząc do osi centralnych y, z zwiększa się powierzchnia pola w II i IV ćwiartce, a zatem centralny odśrodkowy moment bezwładności przyjmuje wartość ujemną. Zgodnie z równaniem (2.16) otrzymamy:

$$J_{YZ} = J_{Y1Z1} - \frac{h}{3} \cdot \frac{b}{3} \cdot A = -\frac{b^2 \cdot h^2}{72}$$

Przykład 2.7. Obliczyć centralne osiowe momenty bezwładności oraz centralny odśrodkowy moment bezwładności figury przedstawionej na rys. 2.5.
Położenie środka ciężkości figury wyznaczono w przykładzie 2.3.
Obliczmy momenty bezwładności poszczególnych figur prostych względem osi Y i Z.
Trójkąt:

$$J_Y=\frac{6\cdot 3^3}{12}=13{,}5\ cm^4,\ J_Z=\frac{3\cdot 6^3}{12}=54\ cm^4,\ J_{YZ}=-\frac{3^2\cdot 6^2}{24}=-13{,}5\ cm^4$$

Prostokąt:

$$J_Y=\frac{3\cdot 6^3}{3}=216\ cm^4,\ J_Z=\frac{6\cdot 3^3}{3}=54\ cm^4$$

Odśrodkowy moment bezwładności prostokąta względem osi y, z określamy korzystając ze wzoru (2.16):

$$J_{YZ}=J_{Y2Z2}+a\cdot b\cdot A,\qquad J_{YZ}=0+3\cdot 1{,}5\cdot 3\cdot 6=81\ cm^4$$

Półokrąg:

Na wstępie obliczamy momenty bezwładności względem osi centralnych Y_3, Z_3:

$$J_{Y3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\cdot(2\cdot r)^4}{64}=\frac{\pi\cdot 4^4}{128}=6{,}28\ cm^4$$

$$J_{Z3}=J_{Z3'}-c^2\cdot A=\frac{\pi\cdot 4^4}{128}-\left(\frac{4\cdot 2}{3\cdot\pi}\right)^2\cdot\frac{\pi\cdot 2^2}{2}=1{,}76\ cm^4$$

$$J_{Y3Z3}=0$$

Przechodząc do osi Y, Z otrzymamy:

$$J_Y=6{,}28+4^2\cdot\frac{\pi\cdot 2^2}{2}=107\ cm^4$$

$$J_Z=1{,}76+(3+c)^2\cdot\frac{\pi\cdot 2^2}{2}=94{,}8\ cm^4$$

$$J_{YZ}=0+(3+c)\cdot 4\cdot\frac{\pi\cdot 2^2}{2}=96{,}7\ cm^4$$

Sumując otrzymane wartości momentów bezwładności poszczególnych figur prostych, znajdujemy momenty bezwładności względem osi y, z całej figury złożonej:

$$J_Y=13{,}5+216+107=336{,}5\ cm^4$$

$$J_Z=54+54+94{,}8=202{,}8\ cm^4$$

$$J_{YZ}=-13{,}5+81+96{,}7=164{,}2\ cm^4$$

Zgodnie z równaniem (2.14, 2.15, 2.16) centralne momenty bezwładności wynoszą:

$$J_{Yc}=336{,}5-2{,}65^2\cdot 33{,}3=103\ cm^4$$

$$J_{Zc}=202{,}8-1^2\cdot 33{,}3=169{,}5\ cm^4$$

$$J_{YcZc}=164{,}2-1\cdot 2{,}65\cdot 33{,}3=76{,}3\ cm^4$$