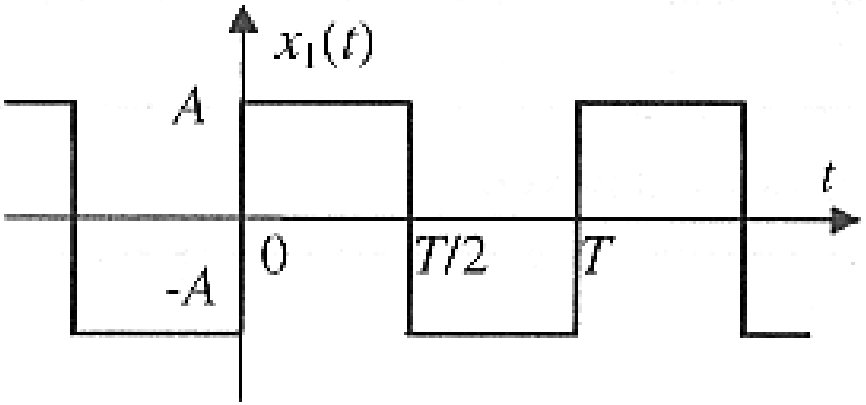
Sygnały i Systemy

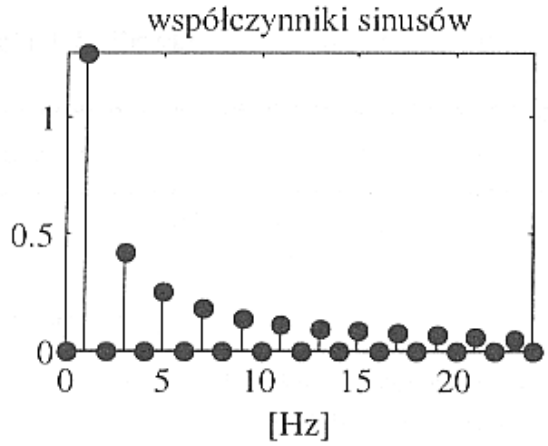
Transformata Fouriera – widmo sygnału

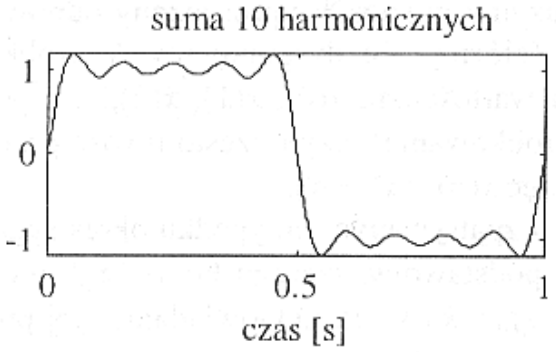
Analiza widmowa sygnałów okresowych niesinusoidalnych

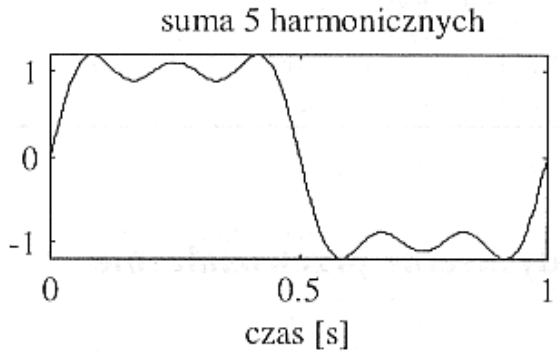


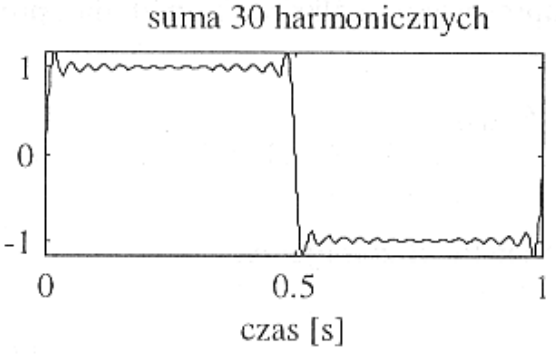
$$\frac{4A}{\pi}\left(\sin\omega_1 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t+\frac{1}{5}\sin 5\omega_1 t+\frac{1}{7}\sin 7\omega_1 t+\ldots\right)$$

Analiza widmowa sygnałów okresowych niesinusoidalnych



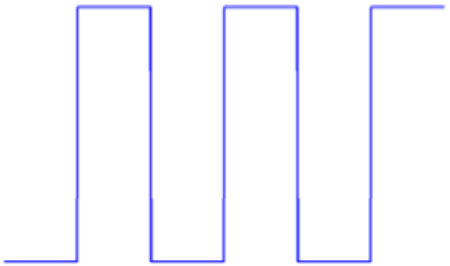






Analiza widmowa sygnałów okresowych niesinusoidalnych

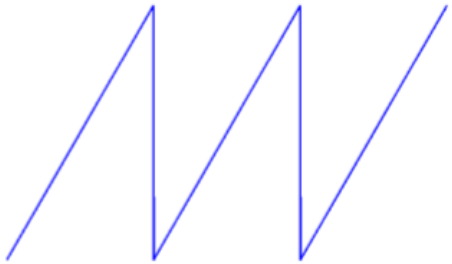
$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi x}{T}\right)$$



$$f(x) = \frac{T}{\pi} - \frac{4T}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos\left(\frac{(2k-1)\pi x}{T}\right)$$

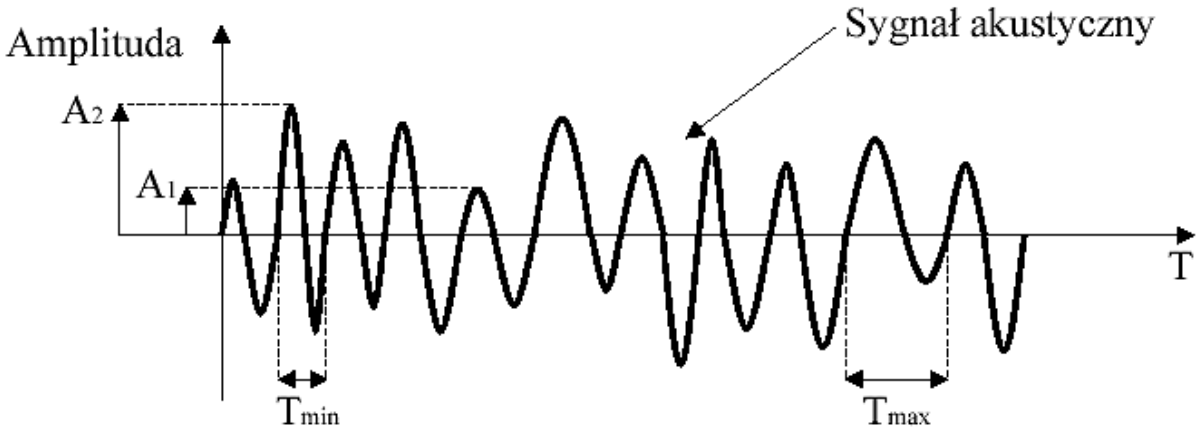


$$f(x) = \frac{2T}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right)$$

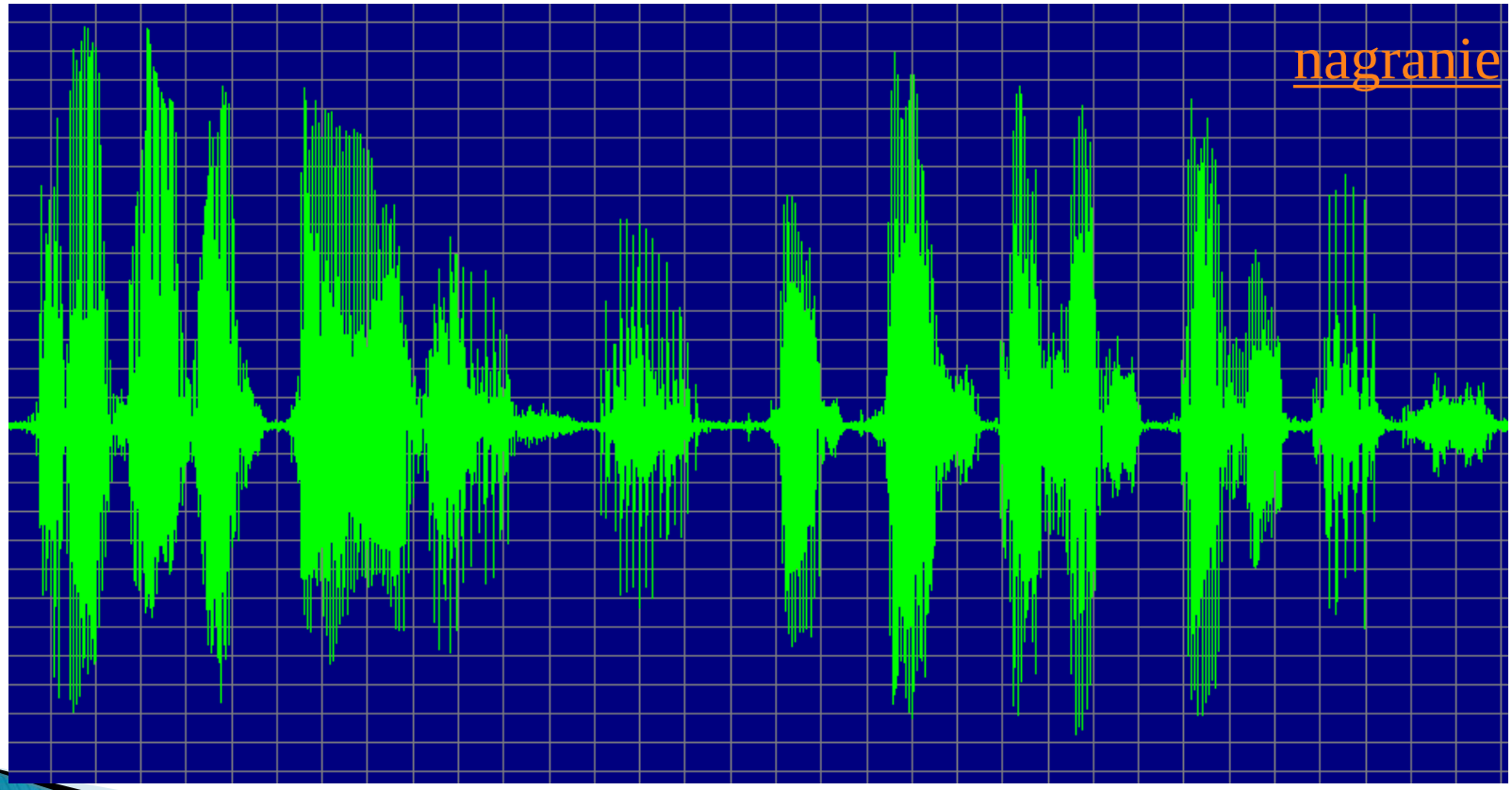


Analiza widmowa sygnałów nieokresowych i impulsowych

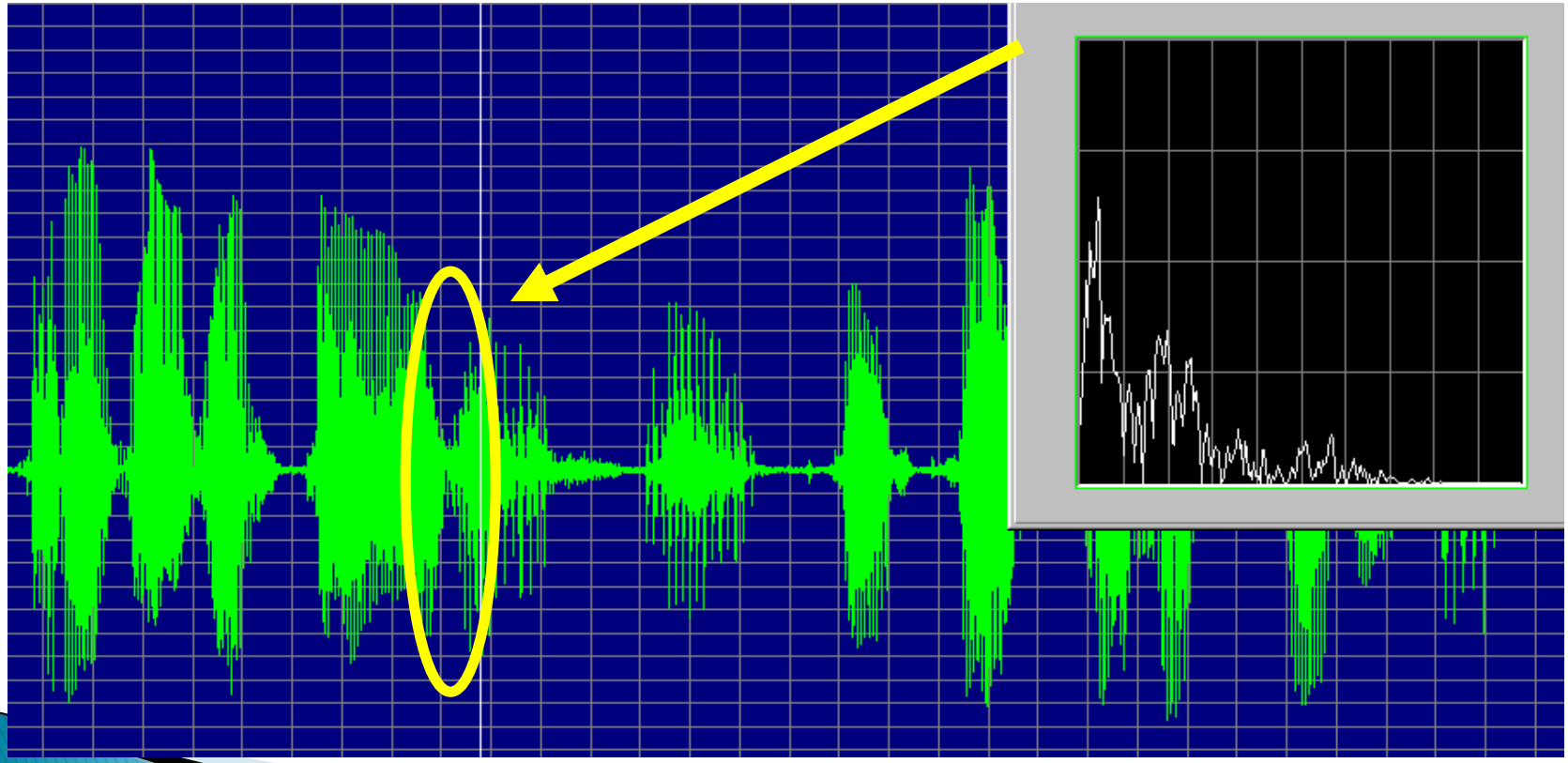
- W przypadku sygnałów nieskończonych i nieokresowych oraz sygnałów o skończonym czasie trwania należy wykorzystać do analizy widmowej całkowe przekształcenie Fouriera.

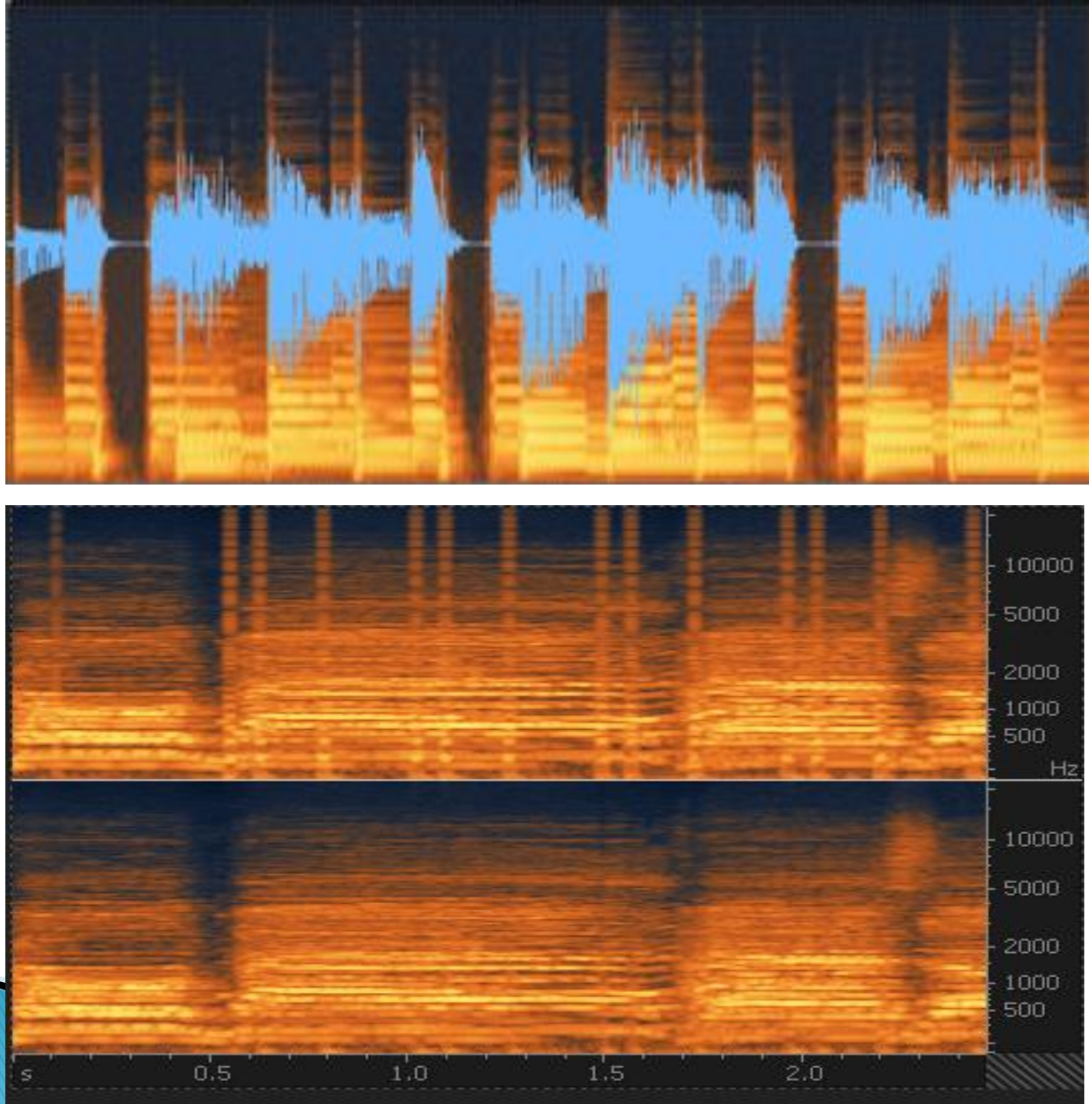


Sygnał mowy – analiza czasowa



Analiza widmowa sygnału




10000
5000
2000
1000
500
Hz
10000
5000
2000
1000
500
s
0.5
1.0
1.5
2.0

Przekształcenie Fouriera

- Całkowe przekształcenie Fouriera jest określone parą następujących transformacji

Proste przekształcenie Fouriera

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Odwrotne przekształcenie Fouriera

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- Aby sygnał posiadał transformatę Fouriera to musi on spełniać tzw. **warunki Dirichleta**

Przekształcenie Fouriera

- Całkowe przekształcenie Fouriera można wyprowadzić jako graniczny przypadek szeregu Fouriera, gdy okres sygnału dąży do nieskończoności ($T \to \infty$), czyli pulsacja podstawowa dąży do zera

$$\mathrm{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{a}_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_1 t} \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$T \to \infty$$

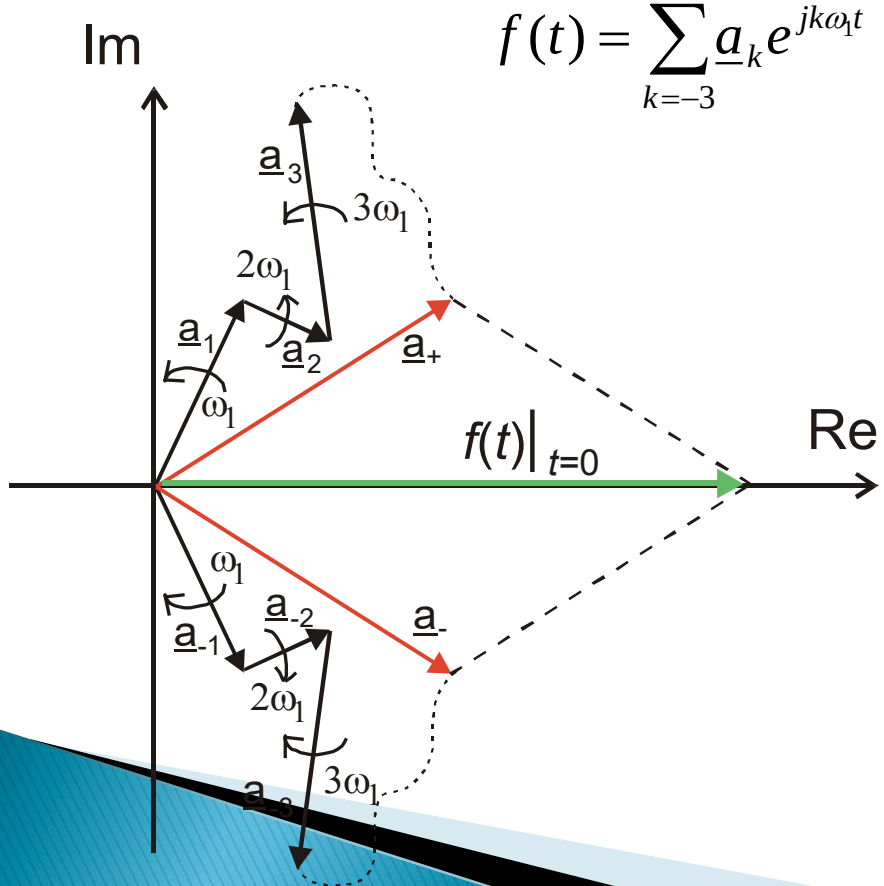
$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \to 0$$

1. Pulsacja podstawowa dąży do zera!
2. Wartości dyskretne pulsacji składowych harmonicznych przechodzą w wartości ciągłe $k\omega_1 \to \omega$

Interpretacja graficzna szeregu Fouriera

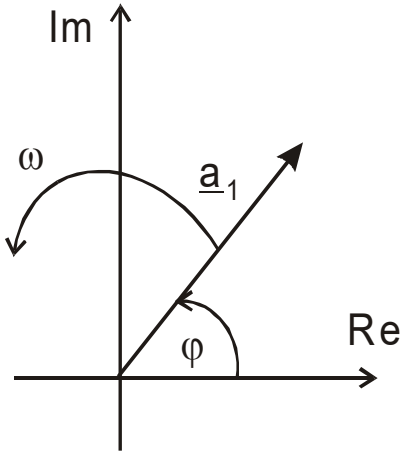
Szereg Fouriera dla sygnału złożonego z trzech harmonicznych.

$$f(t) = \sum_{k=-3}^{3} \underline{a}_k e^{jk\omega_1 t} \qquad \underline{a}_k = a_k e^{j\varphi_k}$$

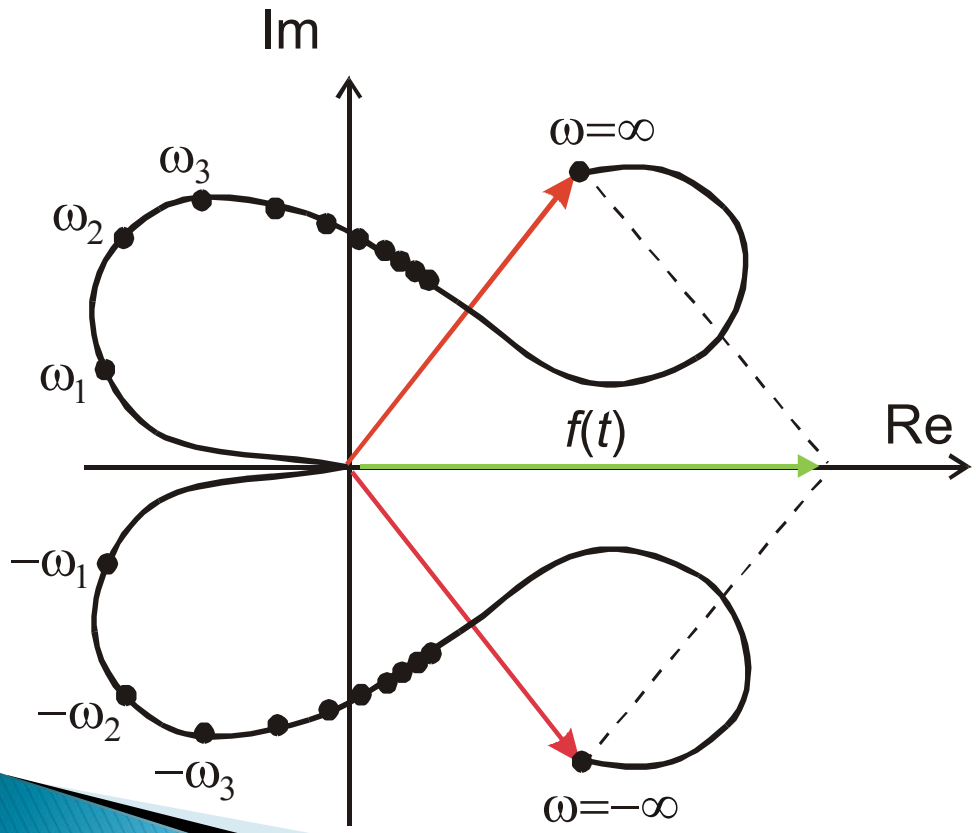


Przypomnienie:

Pojedynczy wirujący wektor wskazowy reprezentuje sygnał sinusoidalny (kosinusoidalny)



Interpretacja graficzna przekształcenia Fouriera



1. Wektory wskazowe poszczególnych harmonicznych mają nieskończenie małą długość, a zatem zamiast krzywej łamanej otrzymuje się krzywą gładką.
2. Jeśli z nieskończonego zbioru harmonicznych wybierzemy ciąg równoodległych pulsacji (np. co 10 kHz), to wektory odpowiadające tym pulsacjom będą położone coraz bliżej na wykresie wskazowym.
3. Wirowanie wszystkich wektorów powoduje, że kształt krzywej cały czas się zmienia, a rzut wektorów łączących początek układu z końcem krzywej na oś rzeczywistą wyznacza nam sygnał

$$f(t)$$

Własności przekształcenia Fouriera

1. Liniowość przekształcenia Fouriera

$$\mathrm{a}x(t)+\mathrm{b}y(t) \leftrightarrow \mathrm{a}X(\mathrm{j}\omega)+\mathrm{b}Y(\mathrm{j}\omega)$$

2. Przesunięcie w czasie

$$x(t-t_0) \leftrightarrow X(\mathrm{j}\omega)e^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$

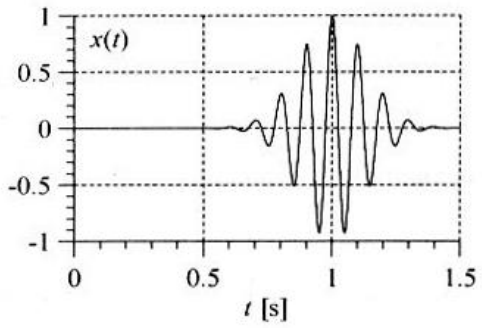
3. Przesunięcie w dziedzinie częstotliwości

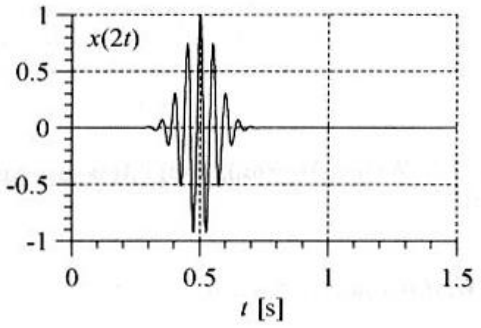
$$x(t)e^{\mathrm{j}\omega_0 t} \leftrightarrow X(\mathrm{j}\omega-\mathrm{j}\omega_0)$$

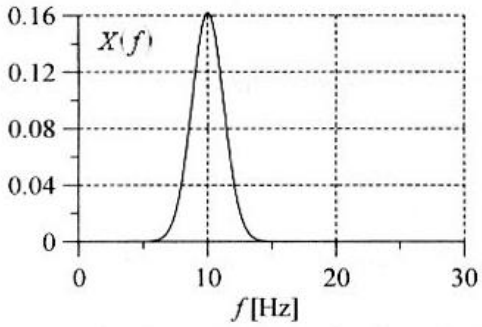
Własności przekształcenia Fouriera

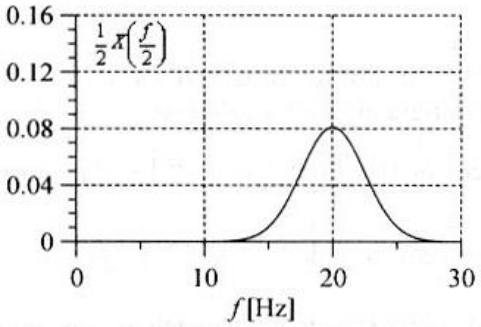
4. Przeskalowanie

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{a}} X\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\right) \quad \text{dla} \quad \mathrm{a} > 0$$









Po dwukrotnym „przyśpieszeniu” sygnału szerokość jego pasma zwiększa się od 10Hz do 20 Hz, natomiast amplituda zmniejsza się o połowę.

Własności przekształcenia Fouriera

5. Pochodna

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \leftrightarrow \mathrm{j}\omega X(\mathrm{j}\omega)$$

6. Całka

$$\int_{-\infty}^{t} x(t)\mathrm{d}t \leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{j}\omega} X(\mathrm{j}\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

7. Równość Parsevala

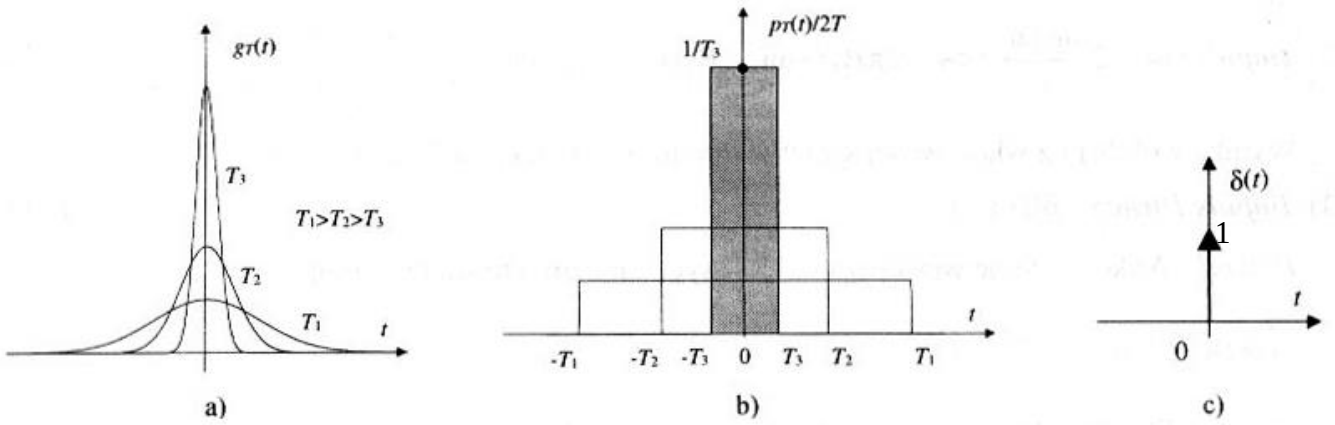
(przekształcenie Fouriera zachowuje energię sygnału)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\mathrm{j}\omega)|^2 d\omega$$

Transformaty Fouriera wybranych sygnałów

Definicja impulsu Diraca

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t \neq 0 \\ \infty & \text{dla} \quad t = 0 \end{cases} \qquad \text{oraz} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

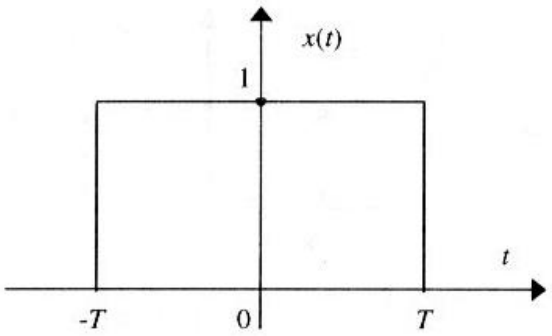


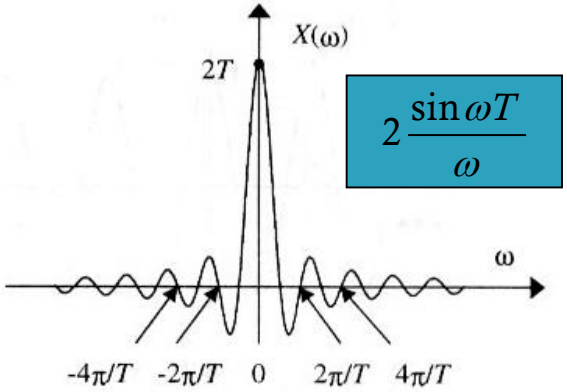
Aproksymacja sygnału delty Diraca $\delta(t)$ za pomocą: a) funkcji gaussowskich, b) impulsów prostokątnych, c) graficzne oznaczenie sygnału delty Diraca.

Impuls dąży do ∞, ale jego pole wynosi 1

Transformaty Fouriera wybranych sygnałów

Impuls prostokątny

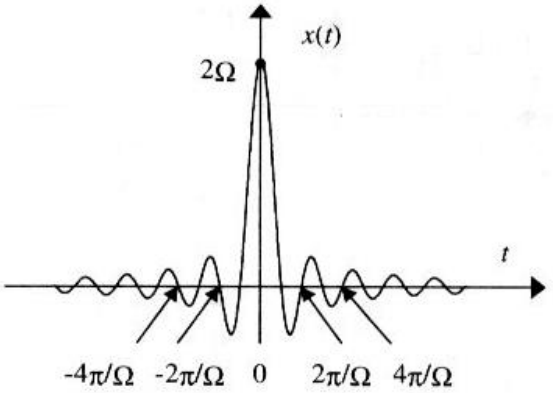


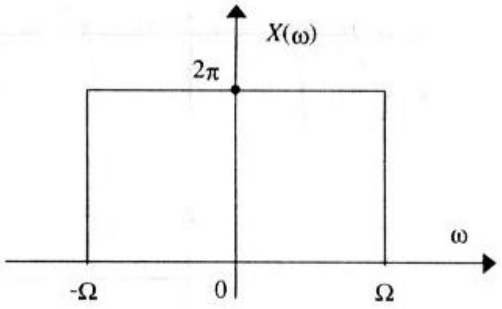


$$2\frac{\sin \omega T}{\omega}$$

Funkcja sinc

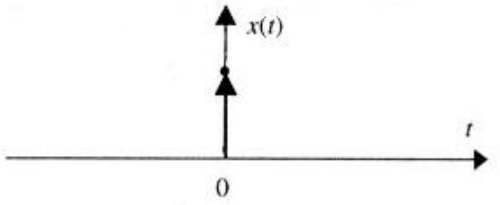
$$2\frac{\sin \Omega t}{t}$$

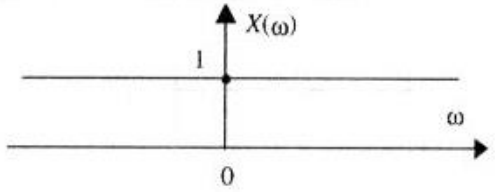




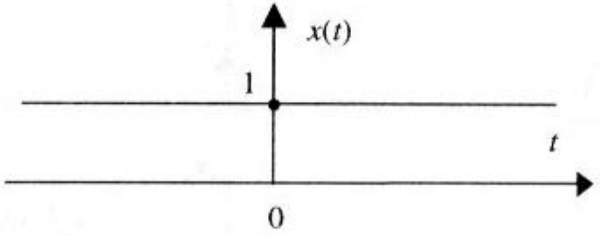
Transformaty Fouriera wybranych sygnałów

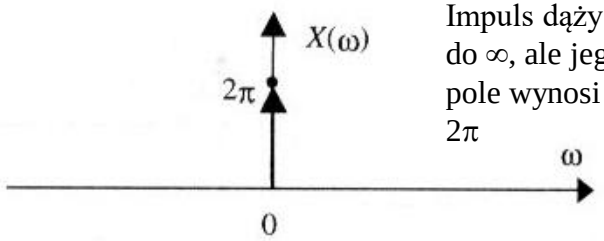
Impuls DIRACA





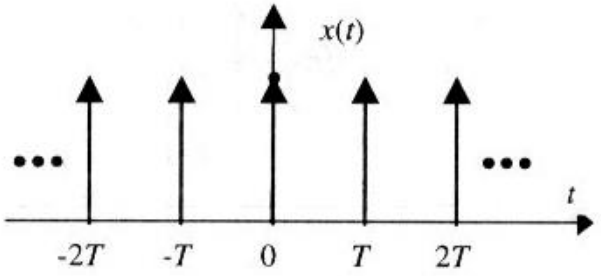
Sygnał stały

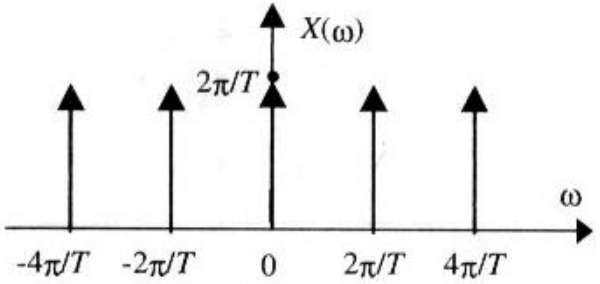




Impuls dąży do ∞, ale jego pole wynosi 2π

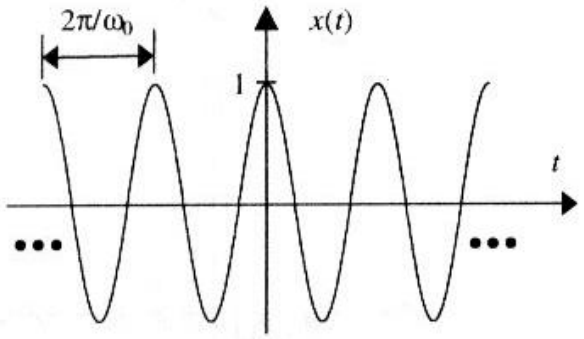
Szereg impulsów Diraca



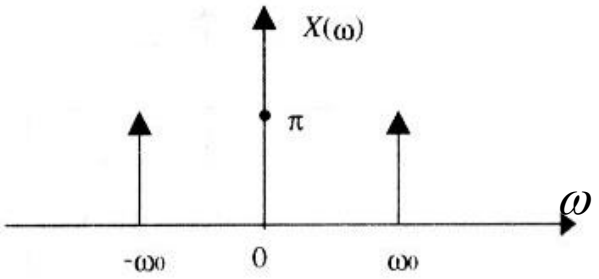


Transformaty Fouriera wybranych sygnałów

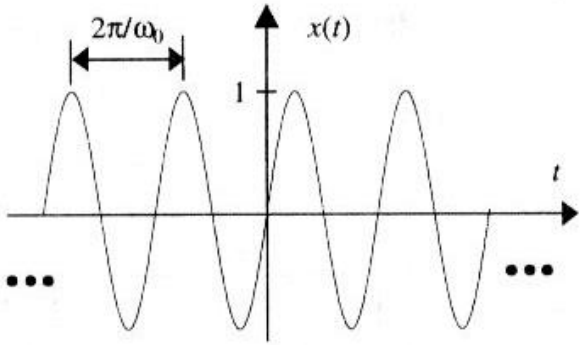
Sygnał kosinusoidalny

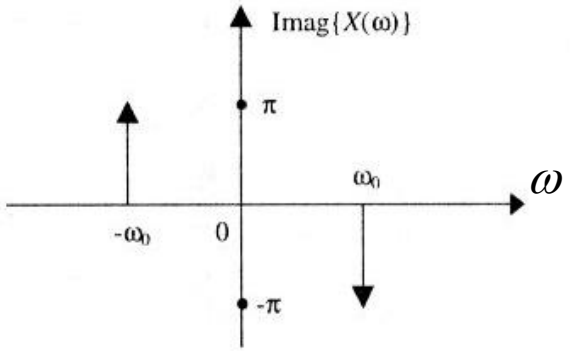


$$\frac{1}{2}\left(2\pi\delta(\omega-\omega_0)+2\pi\delta(\omega+\omega_0)\right)$$



Sygnał sinusoidalny

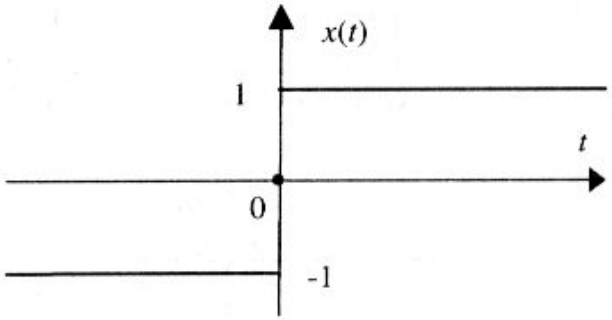


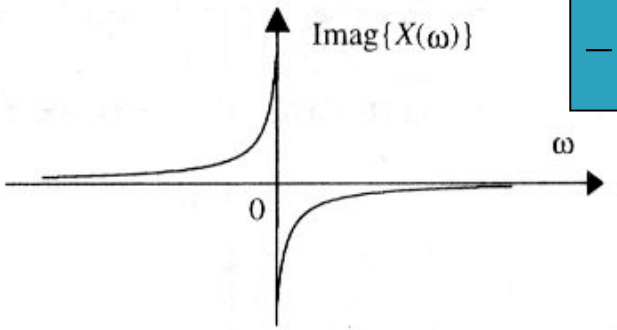


$$\frac{j}{2}\left(2\pi\delta(\omega-\omega_0)-2\pi\delta(\omega+\omega_0)\right)$$

Transformaty Fouriera wybranych sygnałów

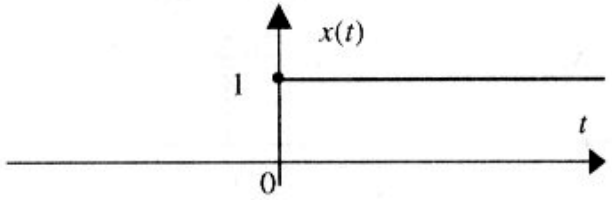
Sygnał znaku



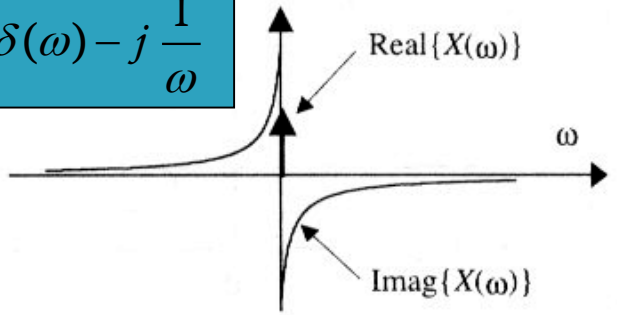


$$-\mathrm{j}\frac{2}{\omega}$$

Skok jednostkowy

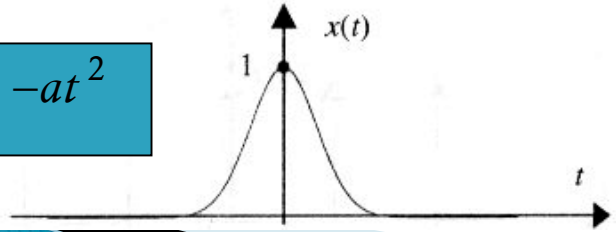


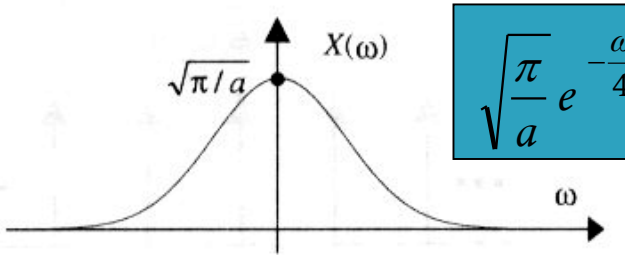
$$\pi\delta(\omega) - j\frac{1}{\omega}$$



Sygnał gaussowski

$$e^{-at^2}$$





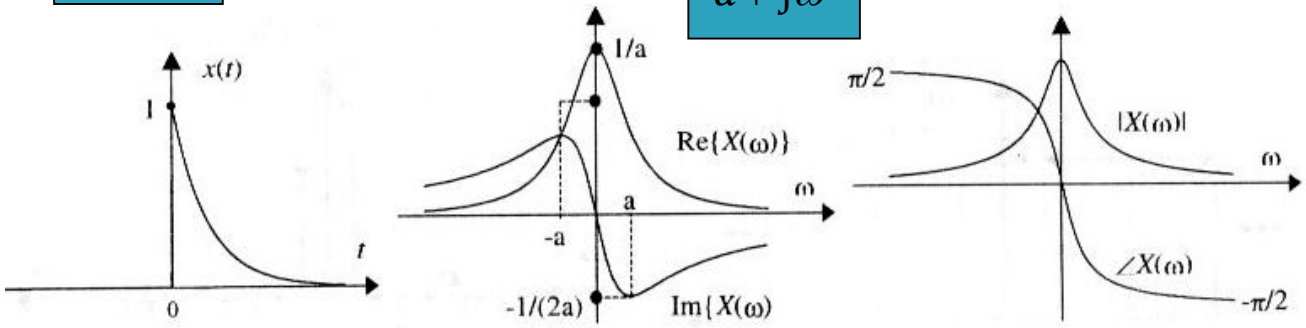
$$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

Transformaty Fouriera wybranych sygnałów

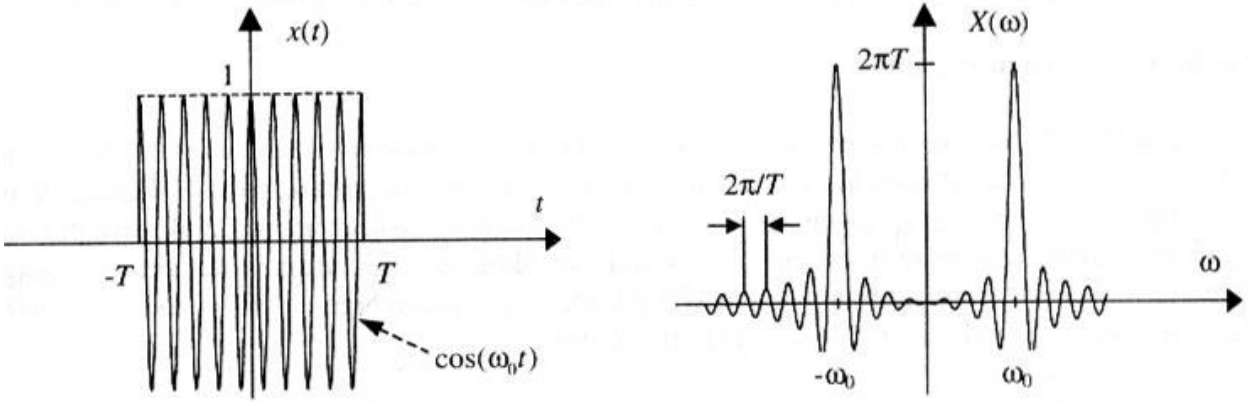
Sygnał wykładniczy

e^{-at}

$\frac{1}{a+j\omega}$



Fragment sygnału kosinusoidalnego, wycięty przez czasowe okno prostokątne



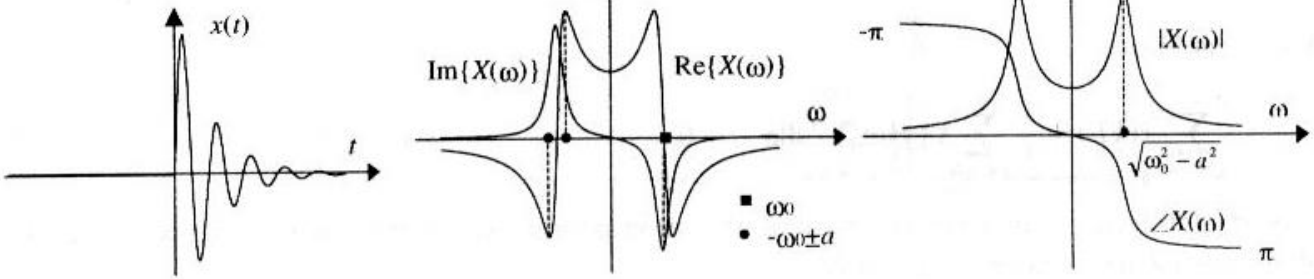
$$\frac{\sin((\omega-\omega_0)T)}{\omega-\omega_0}+\frac{\sin((\omega+\omega_0)T)}{\omega+\omega_0}$$

Transformaty Fouriera wybranych sygnałów

Sygnał sinusoidalny z obwiednią wykładniczą

$$Ae^{-at}\sin\omega_0 t \qquad t \geq 0,\ a > 0$$

$$\frac{A\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$$



Sygnał kosinusoidalny z obwiednią wykładniczą

$$Ae^{-at}\cos\omega_0 t \qquad t \geq 0,\ a > 0$$

$$A\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$$

