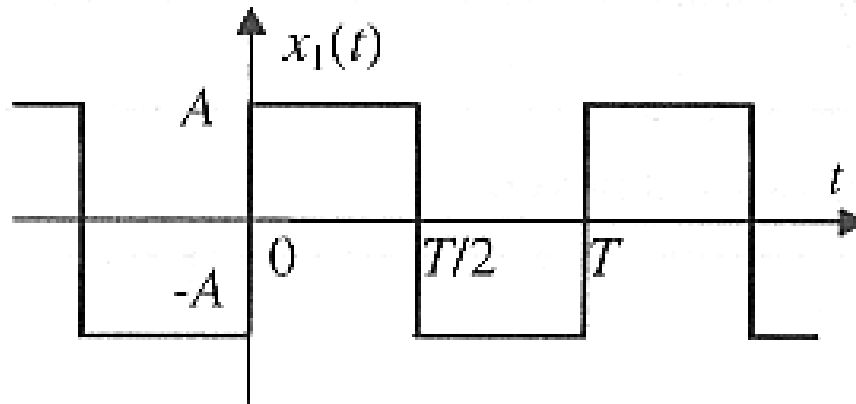


Sygnały i Systemy

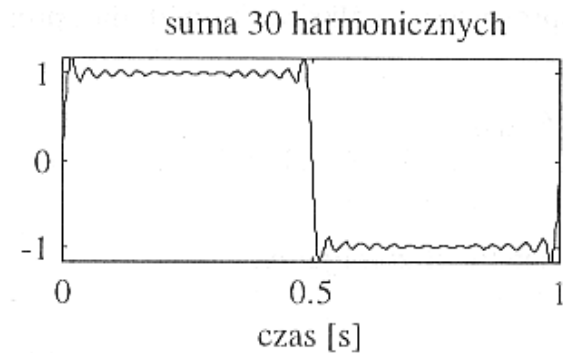
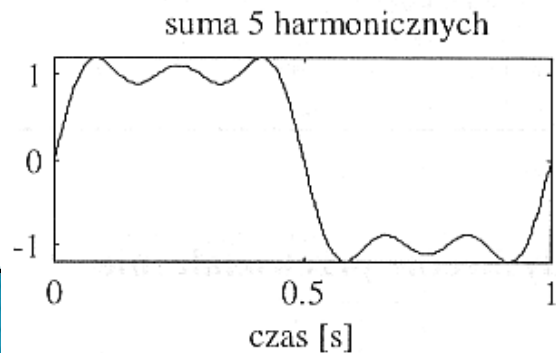
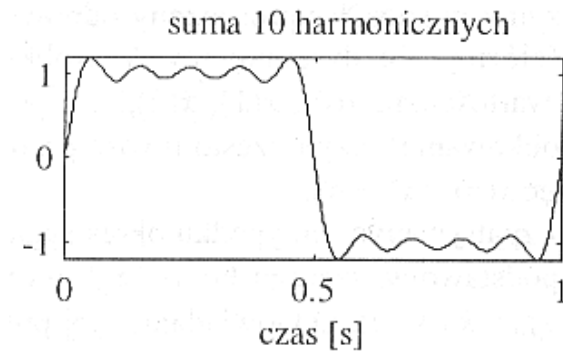
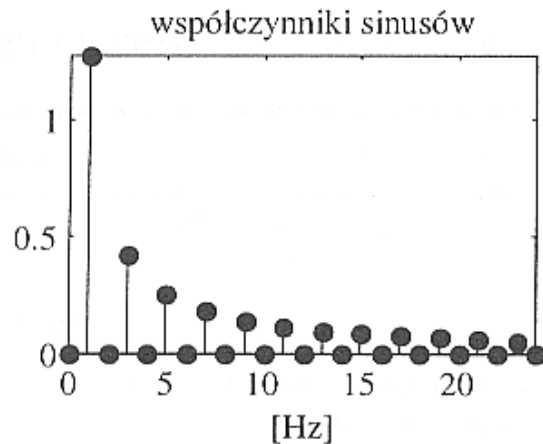
**Transformata Fouriera –
widmo sygnału**

Analiza widmowa sygnałów okresowych niesinusoidalnych



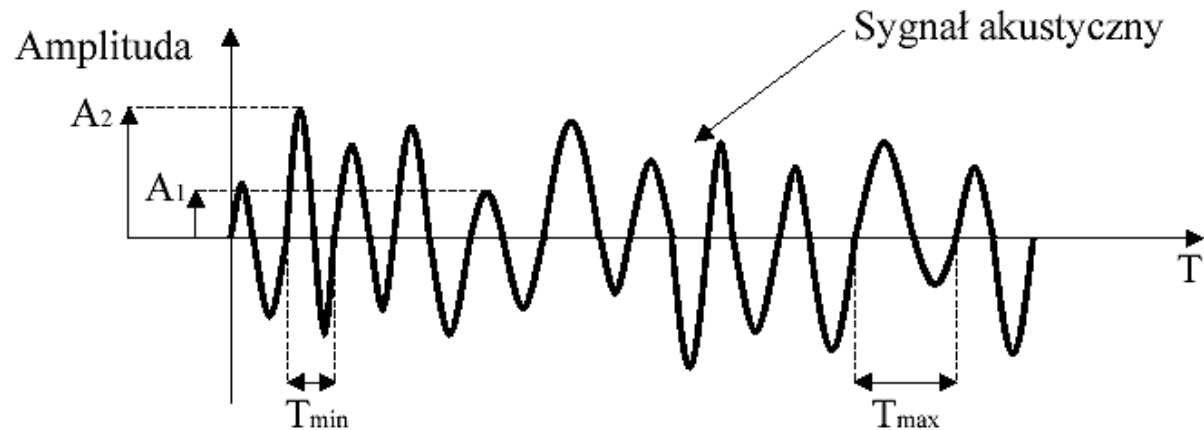
$$\frac{4A}{\pi} \left(\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t + \frac{1}{7} \sin 7\omega_1 t + \dots \right)$$

Analiza widmowa sygnałów okresowych niesinusoidalnych

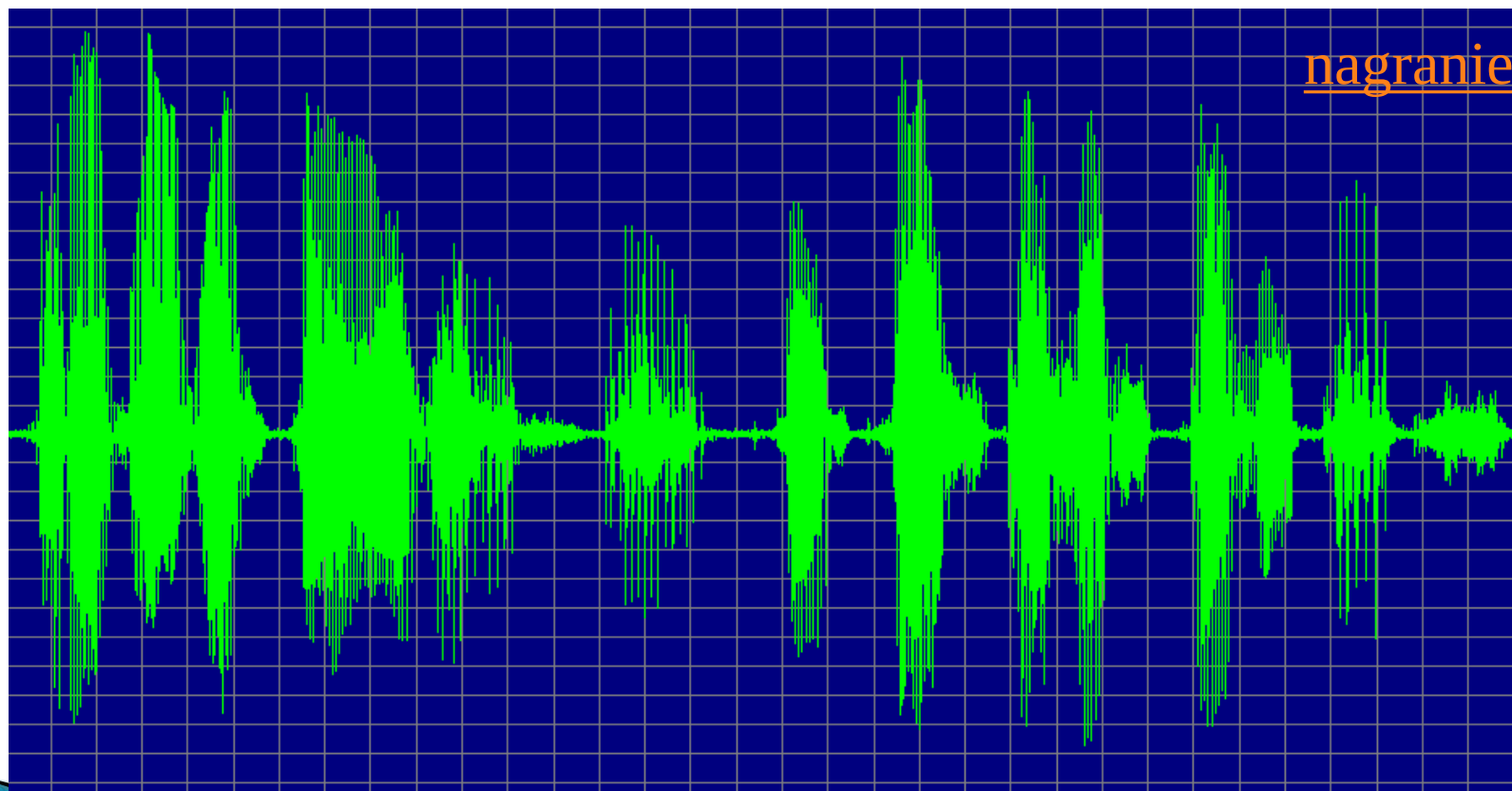


Analiza widmowa sygnałów nieokresowych i impulsowych

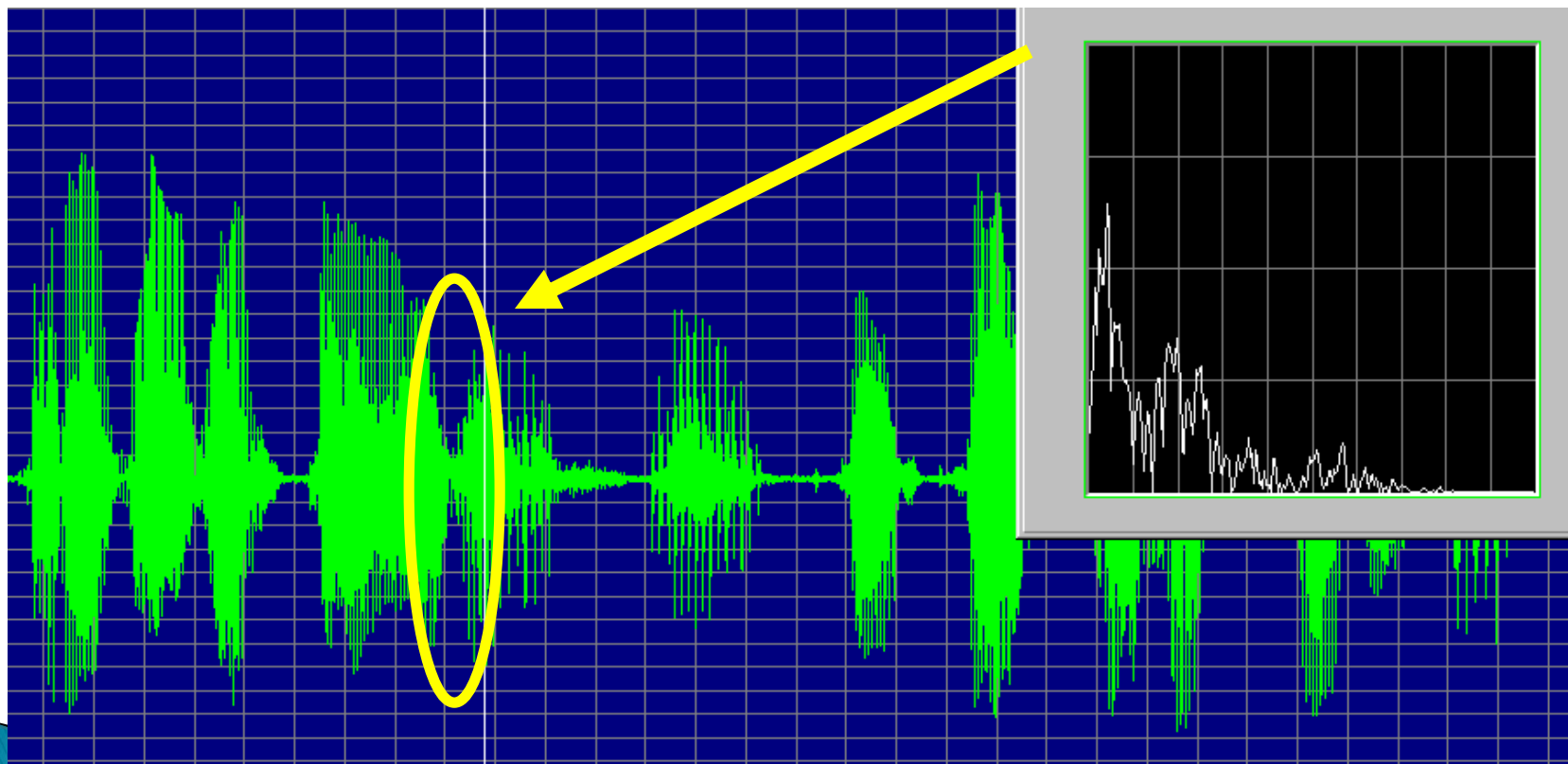
- ▶ W przypadku sygnałów nieskończonych i nieokresowych oraz sygnałów o skończonym czasie trwania należy wykorzystać do analizy widmowej całkowite przekształcenie Fouriera.



Sygnał mowy – analiza czasowa



Analiza widmowa sygnału



Przekształcenie Fouriera

- ✚ Całkowe przekształcenie Fouriera jest określone parą następujących transformacji

Proste przekształcenie Fouriera

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

Odwrotne przekształcenie Fouriera

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

- Aby sygnał posiadał transformatę Fouriera to musi on spełniać tzw. **warunki Dirichleta**

Przekształcenie Fouriera

- Całkowe przekształcenie Fouriera można wyprowadzić jako graniczny przypadek szeregu Fouriera, gdy okres sygnału dąży do nieskończoności ($T \rightarrow \infty$), czyli pulsacja podstawowa dąży do zera

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{a}_k e^{jk\omega_1 t} \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

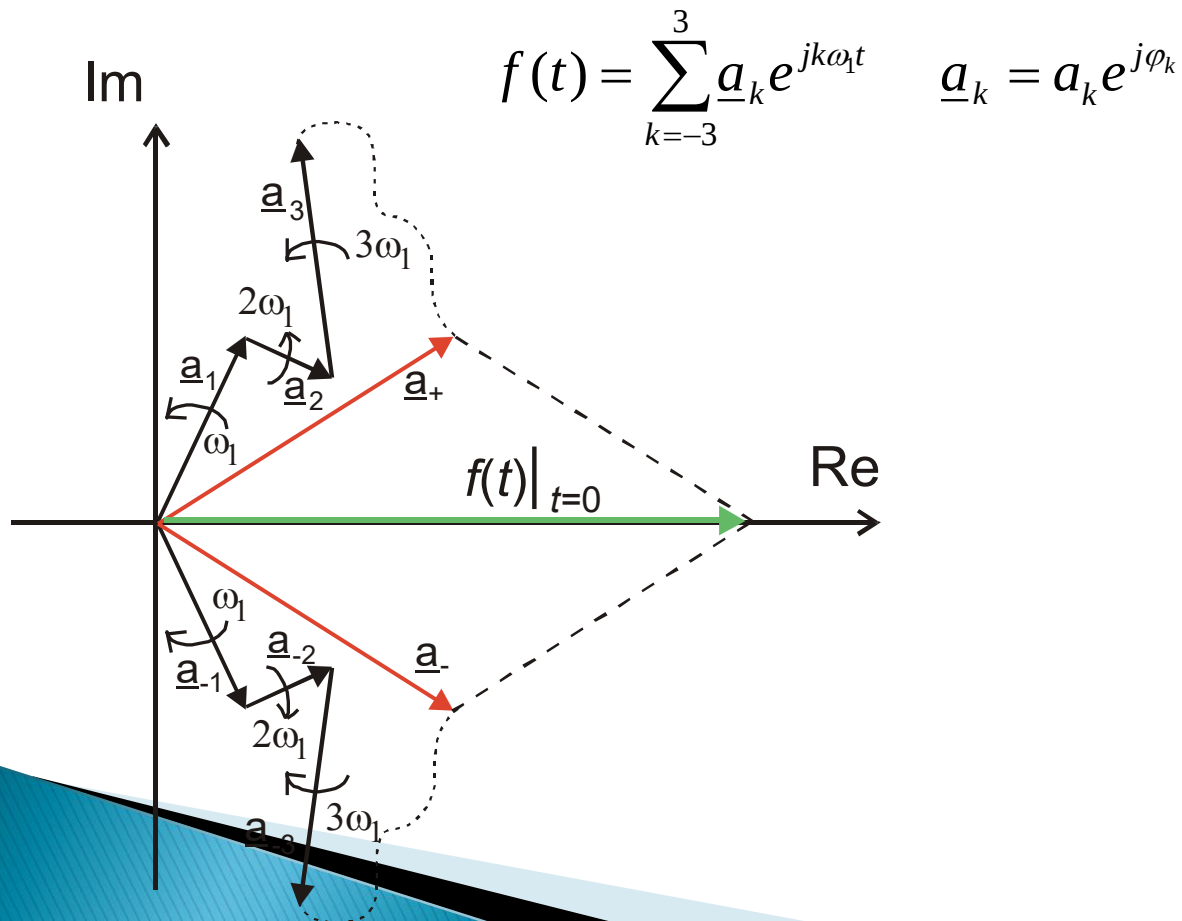
$$T \rightarrow \infty$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$$

1. Pulsacja podstawowa dąży do zera!
2. Wartości dyskretne pulsacji składowych harmoniczných przechodzą w wartości ciągłe $k\omega_1 \rightarrow \omega$

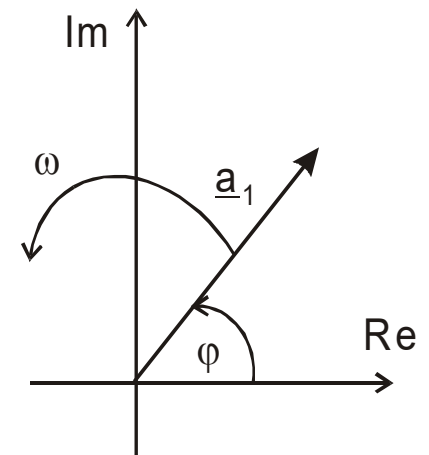
Interpretacja graficzna szeregu Fouriera

Szereg Fouriera dla sygnału złożonego z trzech harmonicznych.

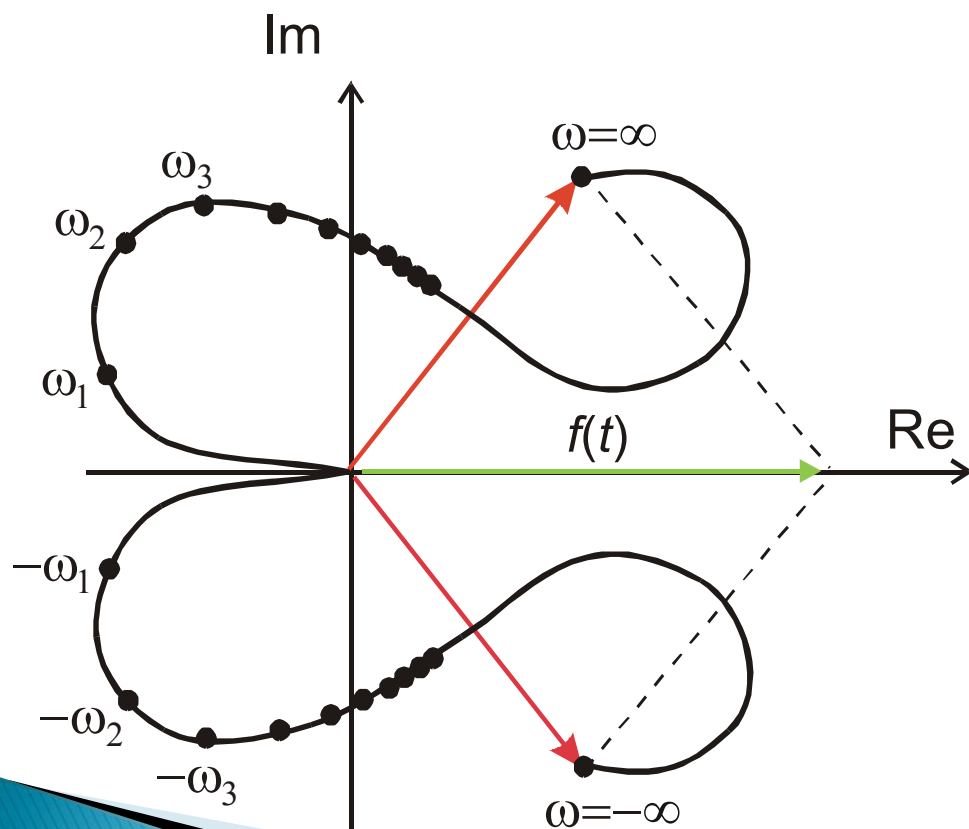


Przypomnienie:

Pojedynczy wirujący wektor wskazowy reprezentuje sygnał sinusoidalny (kosinusoidalny)



Interpretacja graficzna przekształcenia Fouriera



1. Wektory wskazowe poszczególnych harmoniczych mają nieskończenie małą długość, a zatem zamiast krzywej łamanej otrzymuje się krzywą gładką.
2. Jeśli z nieskończonego zbioru harmoniczych wybierzemy ciąg równoodległych pulsacji (np. co 10 kHz), to wektory odpowiadające tym pulsacjom będą położone coraz bliżej na wykresie wskazowym.
3. Wirowanie wszystkich wektorów powoduje, że kształt krzywej cały czas się zmienia, a rzut wektorów łączących początek układu z końcem krzywej na oś rzeczywistą wyznacza nam sygnał

$f(t)$

Własności przekształcenia Fouriera

1. Liniowość przekształcenia Fouriera

$$ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(j\omega) + bY(j\omega)$$

2. Przesunięcie w czasie

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

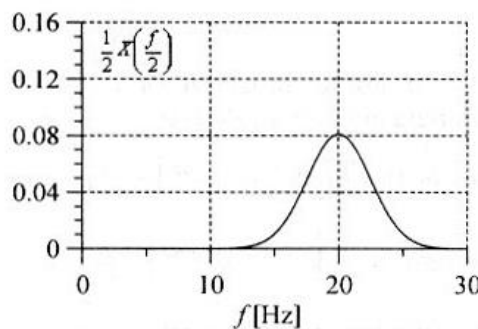
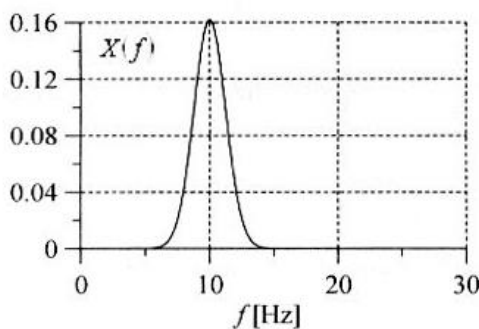
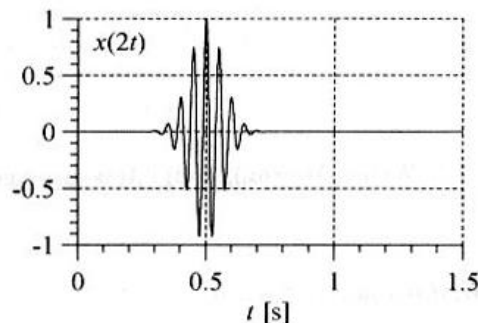
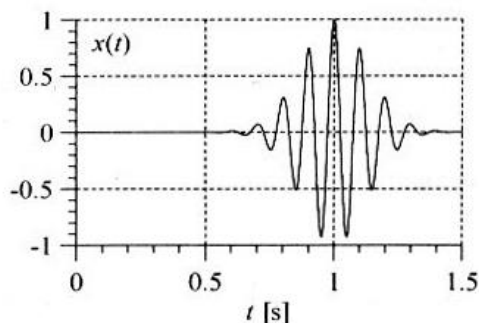
3. Przesunięcie w dziedzinie częstotliwości

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(j\omega - j\omega_0)$$

Własności przekształcenia Fouriera

4. Przeskalowanie

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(j\frac{\omega}{a}\right) \quad \text{dla } a > 0$$



Po dwukrotnym „przyśpieszeniu” sygnału szerokość jego pasma zwiększa się od 10Hz do 20 Hz, natomiast amplituda zmniejsza się o połowę.

Własności przekształcenia Fouriera

5. Pochodna

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(j\omega)$$

6. Całka

$$\int_{-\infty}^t x(t) dt \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$$

7. Równość Parsevala

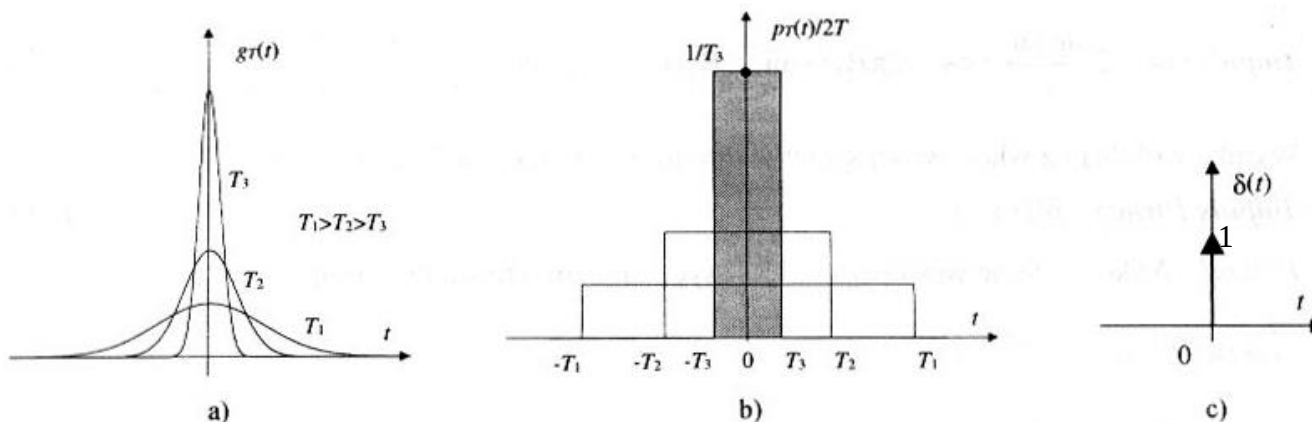
(przekształcenie Fouriera
zachowuje energię sygnału)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Transformaty Fouriera wybranych sygnałów

Definicja impulsu Diraca

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq 0 \\ \infty & \text{dla } t = 0 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

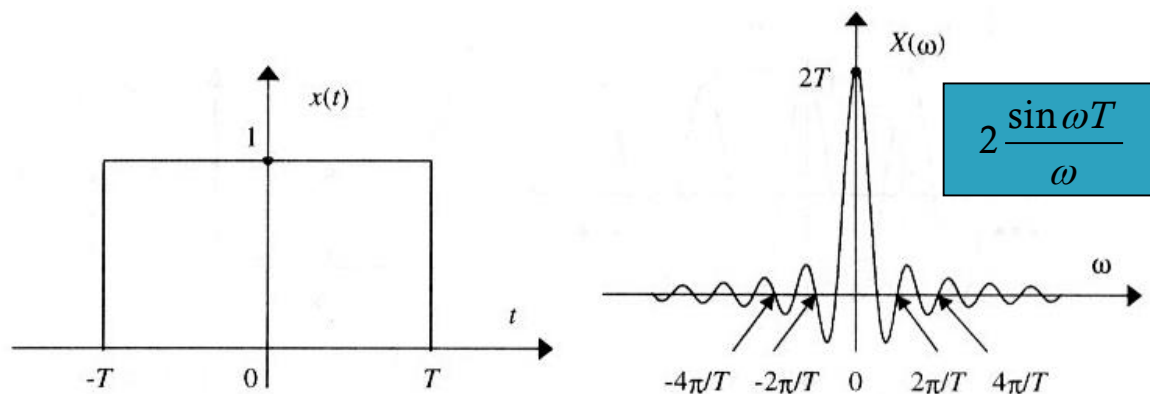


Impuls dąży do ∞ , ale jego pole wynosi 1

Aproksymacja sygnału delty Diraca $\delta(t)$ za pomocą: a) funkcji gaussowskich, b) impulsów prostokątnych, c) graficzne oznaczenie sygnału delty Diraca.

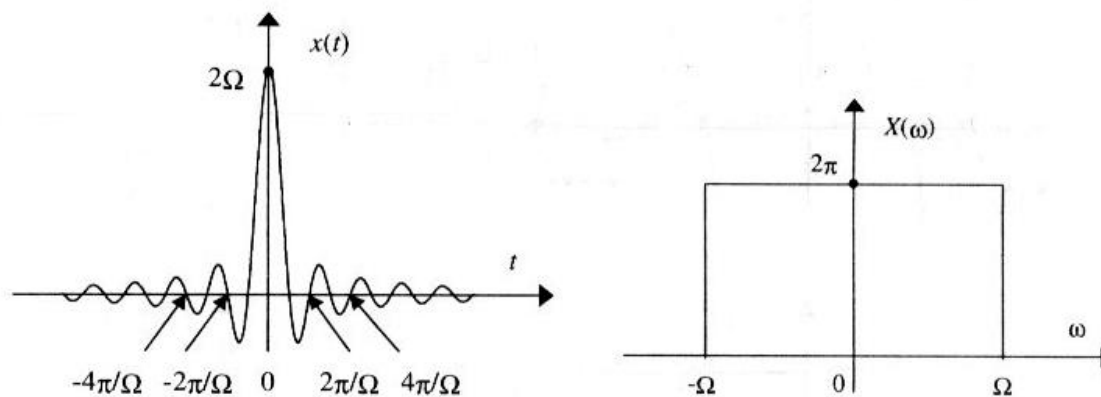
Transformaty Fouriera wybranych sygnałów

Impuls
prostokątny



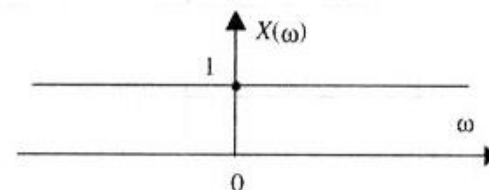
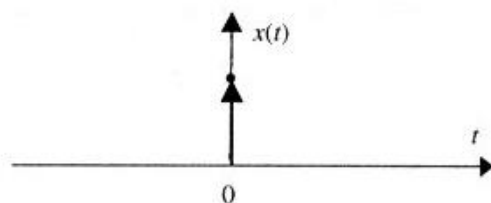
Funkcja sinc

$$2 \frac{\sin \Omega t}{t}$$

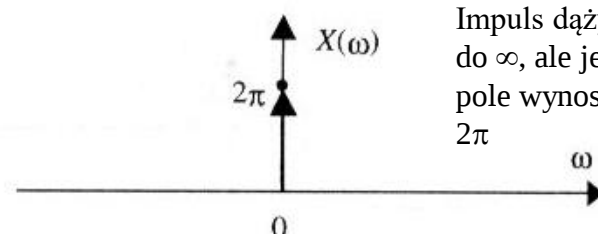
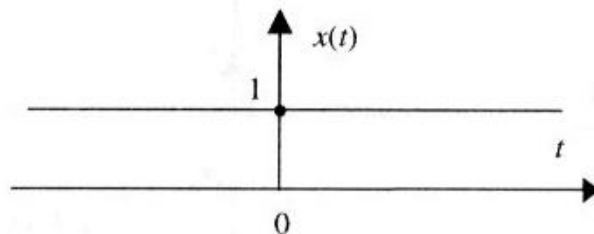


Transformaty Fouriera wybranych sygnałów

Impuls
DIRACA

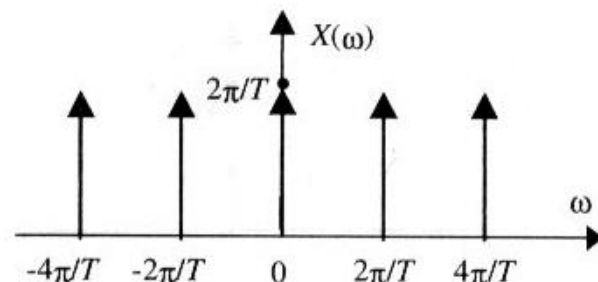
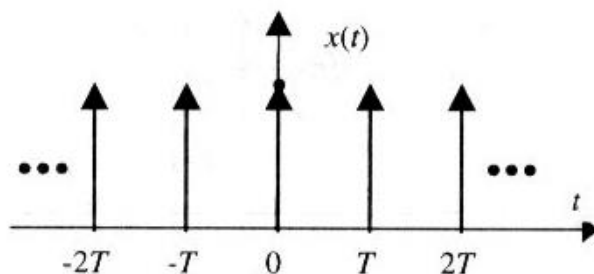


Sygnał
stały



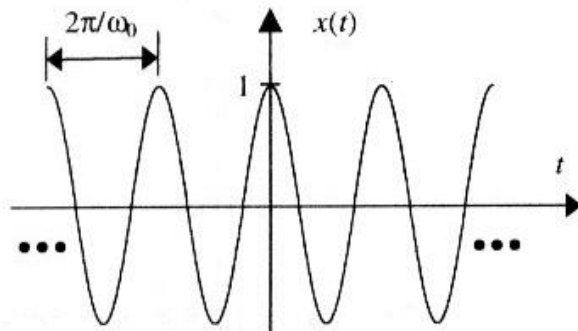
Impuls dąży
do ∞ , ale jego
pole wynosi
 2π

Szereg
impulsów
Diraca

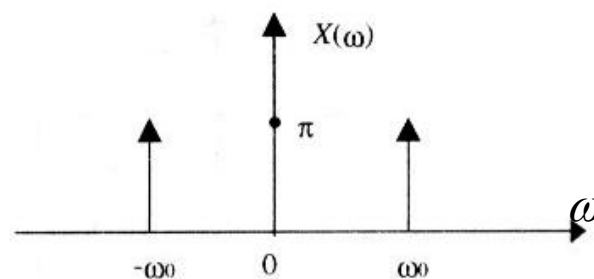


Transformaty Fouriera wybranych sygnałów

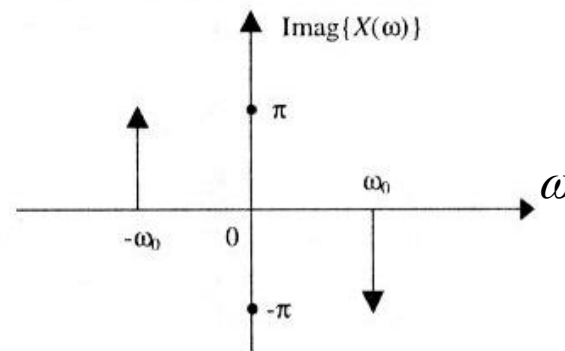
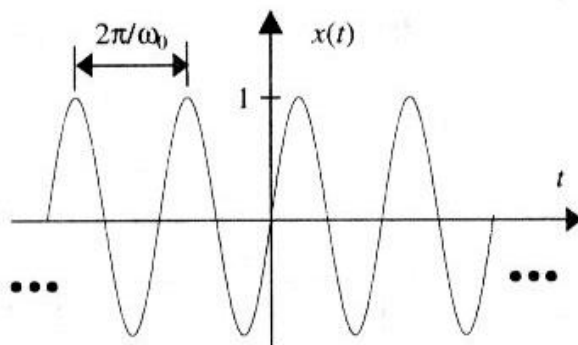
Sygnał
kosinusoidalny



$$\frac{1}{2}(2\pi\delta(\omega - \omega_0) + 2\pi\delta(\omega + \omega_0))$$



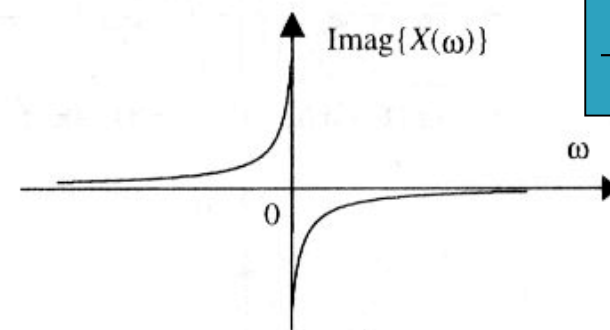
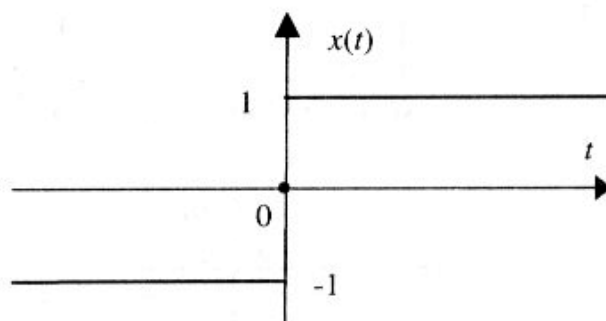
Sygnał
sinusoidalny



$$\frac{j}{2}(2\pi\delta(\omega - \omega_0) - 2\pi\delta(\omega + \omega_0))$$

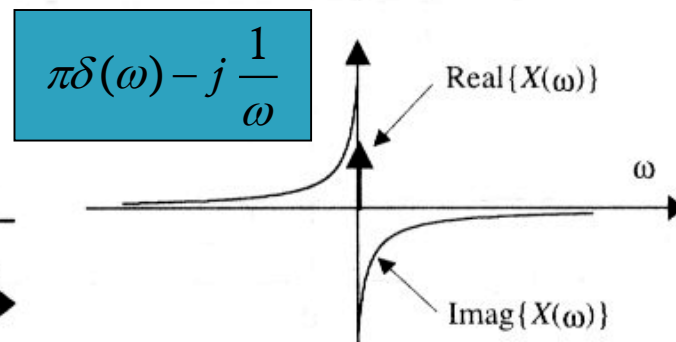
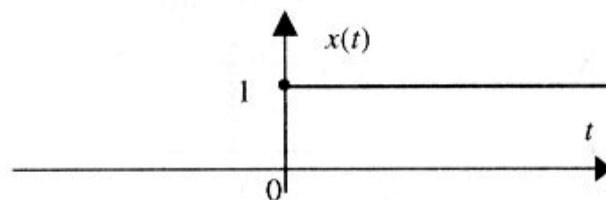
Transformaty Fouriera wybranych sygnałów

Sygnał
znaku



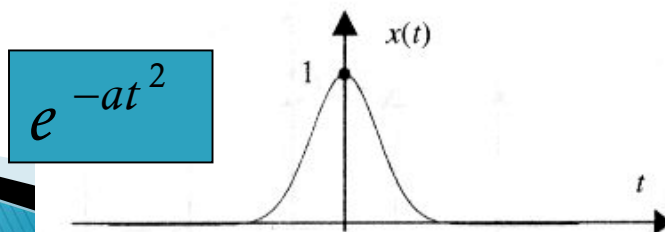
$$-j \frac{2}{\omega}$$

Skok
jednostkowy

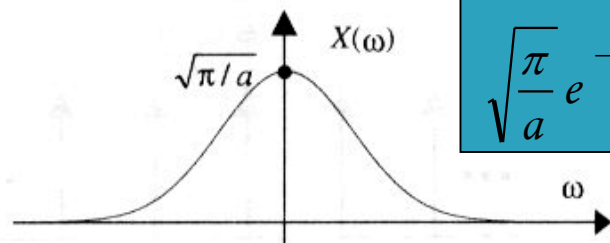


$$\pi\delta(\omega) - j \frac{1}{\omega}$$

Sygnał
gaussowski



$$e^{-at^2}$$

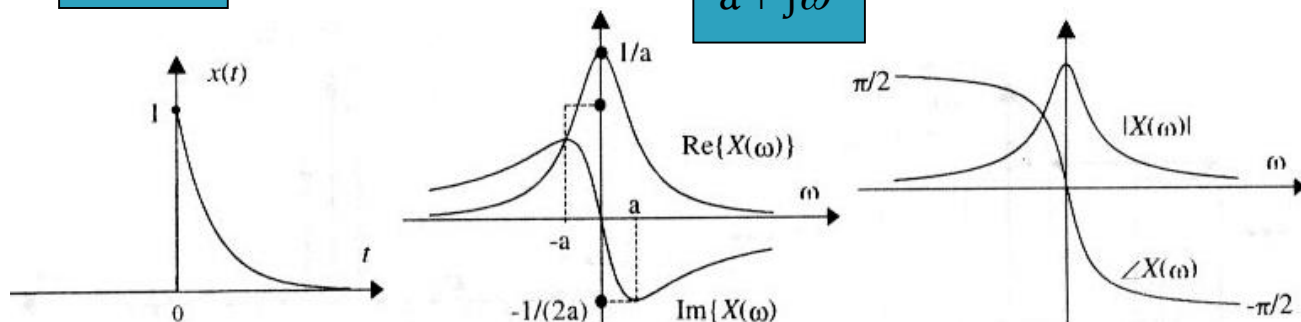


$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

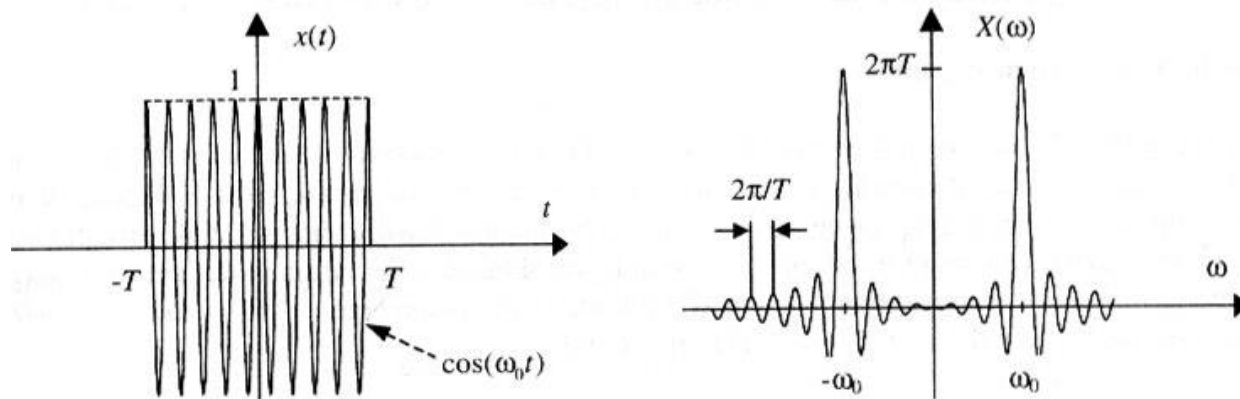
Transformaty Fouriera wybranych sygnałów

$$e^{-at}$$

Sygnał
wykładniczy



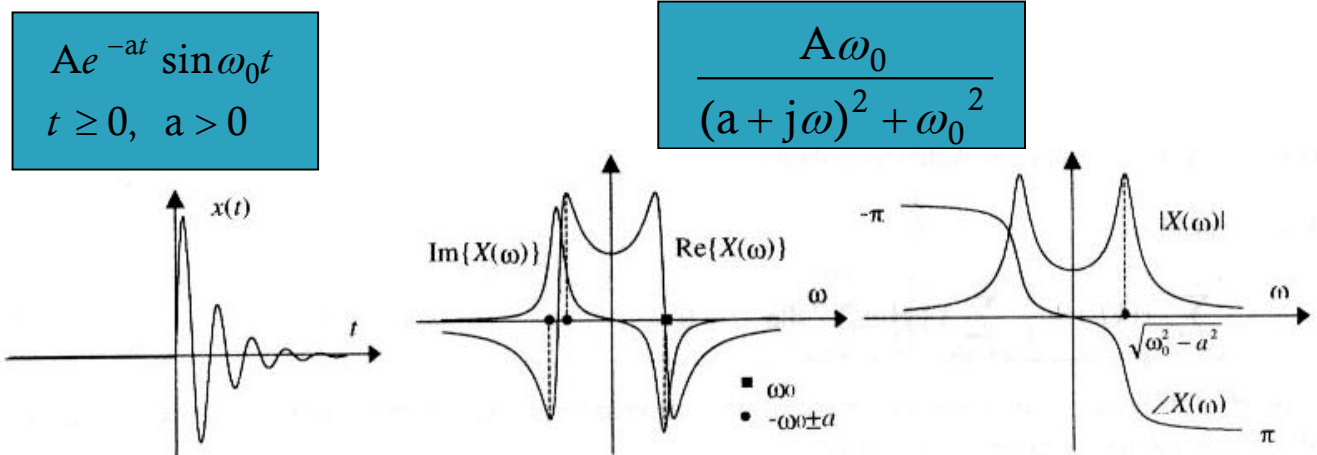
Fragment sygnału
kosinusoidalnego,
wycięty przez
czasowe okno
prostokątne



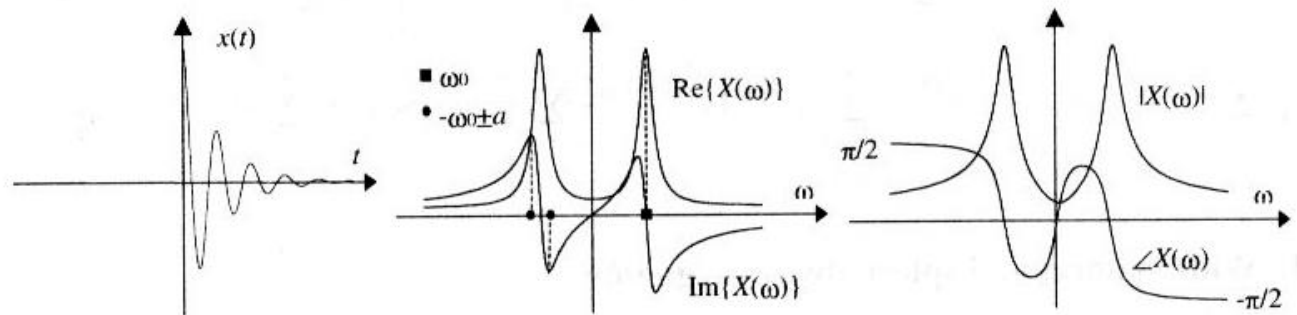
$$\frac{\sin((\omega - \omega_0)T)}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin((\omega + \omega_0)T)}{\omega + \omega_0}$$

Transformaty Fouriera wybranych sygnałów

Sygnał
sinusoidalny
z obwiednią
wykładniczą



Sygnał
kosinusoidalny z
obwiednią
wykładniczą



$$Ae^{-at} \cos \omega_0 t$$

$$t \geq 0, \quad a > 0$$

$$A \frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$$