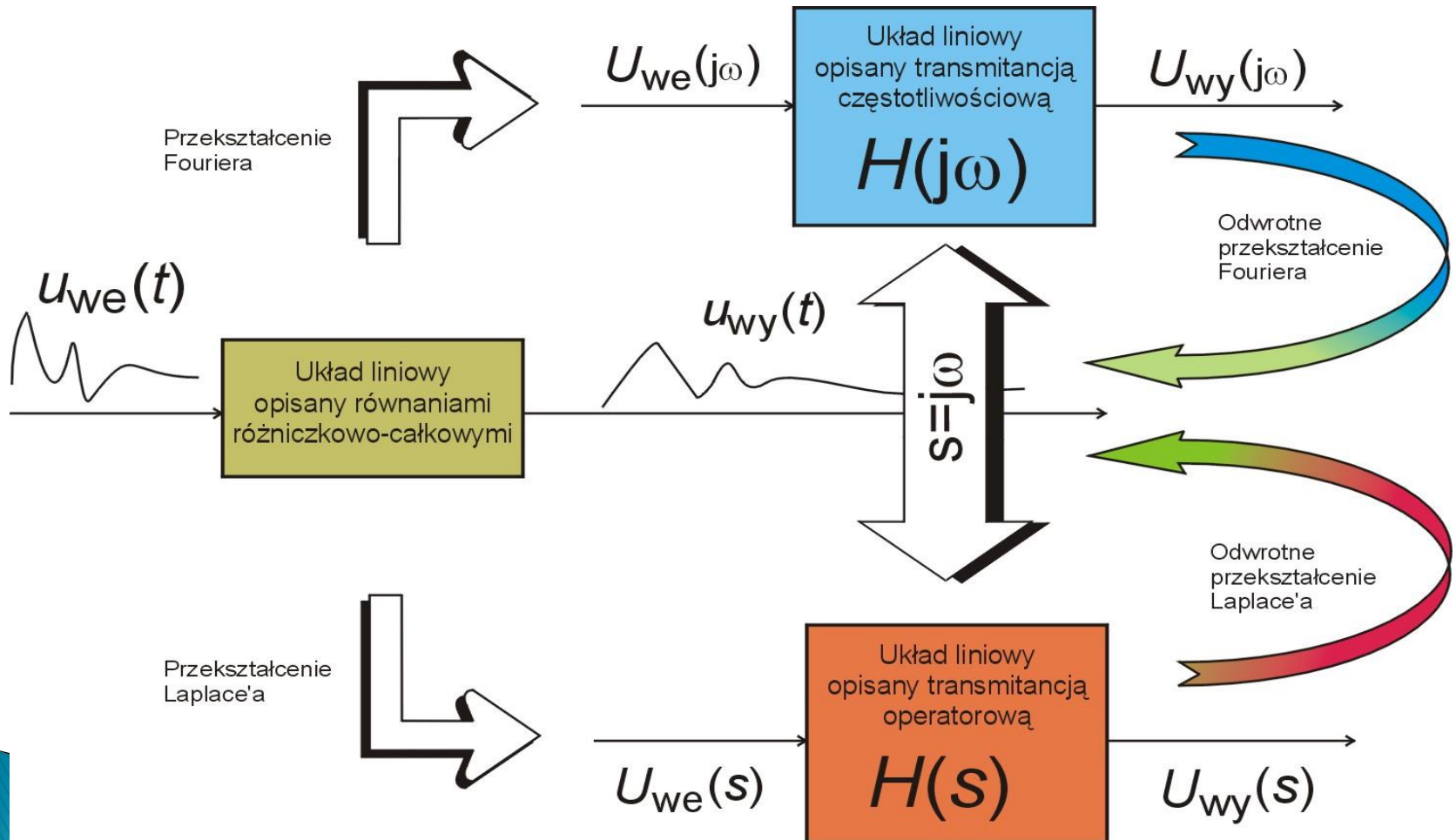


Sygnały i Systemy

Transmitancja systemów liniowych

Metoda czasowa i metody częstotliwościowe analizy sygnałów



Transmitancja systemów analogowych

- ▶ Transmitancja operatorowa układu analogowego $H(s)$ jest relacją między odpowiedzią układu $Y(s)$ na wymuszenie $X(s)$.
- ▶ Transmitancja operatorowa $H(s)$ jest funkcją zmiennej zespolonej s , przez którą należy pomnożyć transformatę Laplace'a wymuszenia, aby otrzymać transformatę Laplace'a odpowiedzi.
- ▶ Transmitancja układu liniowego nie zależy od postaci wymuszenia, lecz jedynie od parametrów i struktury układu.

Def.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$



Odpowiedź układu: $Y(s) = H(s) \cdot X(s)$

Transformata Laplace'a i transformata Fouriera



$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$



$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

- ▶ Czasami zamiast mówić o operatorze zespolonym s mówi się o tzw. **pulsacji zespolonej** s . Pojęcie to jest wprowadzone przez analogię do pulsacji rzeczywistej ω występującej we wzorze na przekształcenie Laplace'a.
- ▶ Można więc zauważyć, iż transformata Laplace'a jest odpowiednikiem transformaty Fouriera jeśli zamiast pulsacji rzeczywistej wykorzystamy pulsację zespoloną i dodatkowo założymy, że sygnał jest równy tożsamościowo zero dla czasów $t < 0$

Pulsacja zespolona $s = \sigma + j\omega$

- ▶ W analizie częstotliwościowej sygnału korzystamy z reprezentacji sygnału w postaci sumy nieskończenie wielu elementarnych składowych, z których każda zmienia się w czasie zgodnie z następującą zespoloną funkcją wykładniczą reprezentującą przebieg sinusoidalny

$$e^{j\omega t}$$

- ✚ Z przekształcenia Laplace'a wynika, że można również mówić o reprezentacji sygnału z wykorzystaniem zespolonych funkcji wykładniczych, których wykładnik jest pulsacją zespoloną

$$e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} \quad \text{czyli} \quad e^{st} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}$$

Transformata Laplace'a i transformata Fouriera

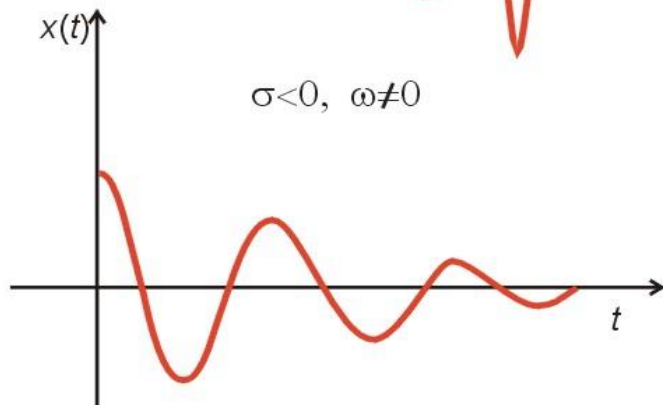
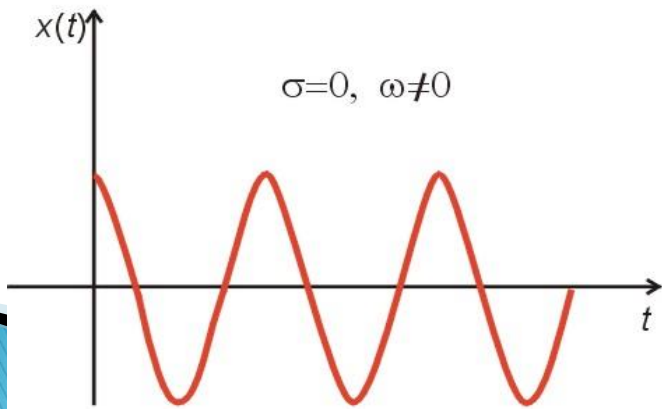
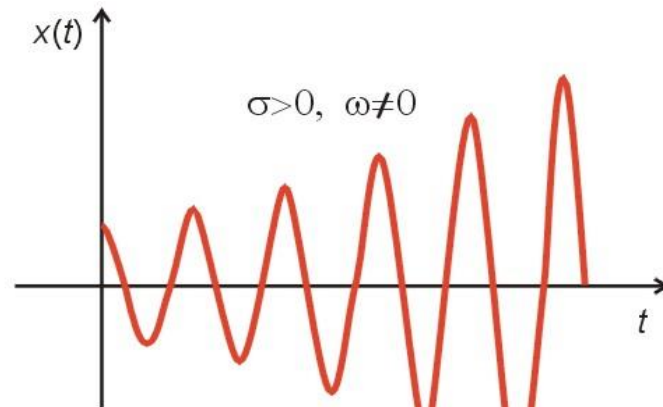
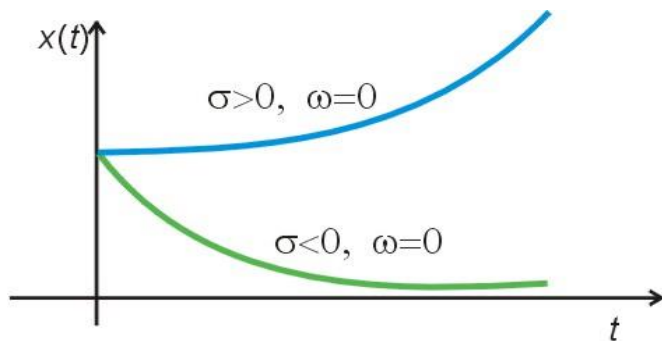
- ▶ W analizie częstotliwościowej sygnał kosinusoidalny (lub sinusoidalny) można uzyskać ze złożenia dwóch typów sygnałów zespolonych

$$x(t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = \underline{\underline{\cos \omega t}}$$

- ✚ W analizie operatorowej sygnał rzeczywisty również można uzyskać ze złożenia dwóch typów zespolonych sygnałów wykładniczych

$$x(t) = \frac{e^{st} + e^{s^*t}}{2} = \frac{e^{(\sigma+j\omega)t} + e^{(\sigma-j\omega)t}}{2} = \underline{\underline{e^{\sigma t} \cos \omega t}}$$

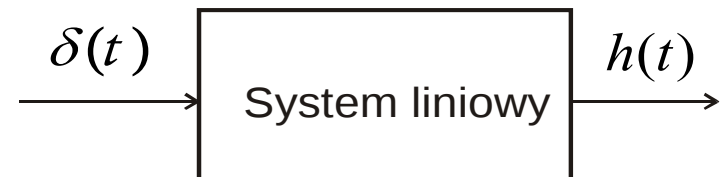
$$x(t) = \frac{e^{st} + e^{s^*t}}{2} = e^{\sigma t} \cos \omega t$$



Wyznaczanie transmitancji częstotliwościowej układu – PIERWSZY SPOSÓB

- ▶ **NA PODSTAWIE DEFINICJI.** Transmitancję częstotliwościową systemu (czasami mówi się o charakterystyce amplitudowo-fazowej lub też o funkcji przenoszenia układu) można zdefiniować wykorzystując odpowiedź impulsową układu:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$$



Wyznaczanie transmitancji częstotliwościowej układu – DRUGI SPOSÓB

- ▶ **NA PODSTAWIE TRANSMITANCJI OPERATOROWEJ**
- ▶ Transmitancję częstotliwościową można również uzyskać z transmitancji operatorowej przez podstawienie w miejsce pulsacji zespolonej s składnika czysto urojonego $j\omega$.

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s = j\omega}$$

Transmitancja systemów analogowych

- ▶ Transmitancja układu liniowego nie zależy od postaci wymuszenia, lecz jedynie od parametrów i struktury układu.
- ▶ Systemy analogowe są przetwornikami sygnałów analogowych.

Sygnał wymuszający można wyrazić zależnością

$$X(j\omega) = X(s) \Big|_{s = j\omega}$$

Podobnie odpowiedź układu będzie wówczas dana zależnością

$$Y(j\omega) = Y(s) \Big|_{s = j\omega}$$

Transmitancja układów analogowych

Funkcję, która jest współczynnikiem między transformatą Fouriera wymuszenia i transformatą Fouriera odpowiedzi, nazwiemy **transmitancją częstotliwościową**

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

Transmitancję częstotliwościową można wyznaczyć z transmitancji operatorowej podstawieniem $s = j\omega$

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s = j\omega}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Transmitancja układów analogowych

Transmitancja częstotliwościowa zwana jest także transmitancją widmową. Podobnie jak charakterystyki częstotliwościowe sygnałów, ma ona charakterystykę amplitudową i charakterystykę fazową

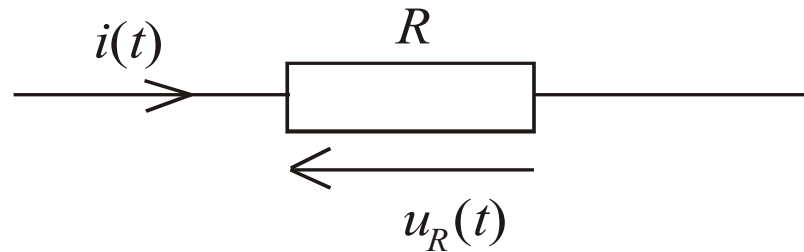
$$H(j\omega) = M(\omega) \exp[j\varphi(\omega)]$$

Charakterystyka amplitudowa i charakterystyka fazowa transmitancji jest często uzupełniana charakterystyką amplitudowo-fazową na płaszczyźnie zmiennej zespolonej (płaszczyźnie Gaussa- wykres Nyquista)

$$H(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

Przykład 1

Układ to pojedynczy rezystor



$$u_R(t) = Ri(t) \quad - \text{Równanie opisujące układ w dziedzinie czasu}$$

$$U_R(s) = RI(s) \quad - \text{Równanie po przekształceniu Laplace'a}$$

$$U_R(j\omega) = RI(j\omega) \quad - \text{Równanie po przekształceniu Fouriera}$$

$$H_R(s) = R \quad - \text{Transmitancja operatorowa układu}$$

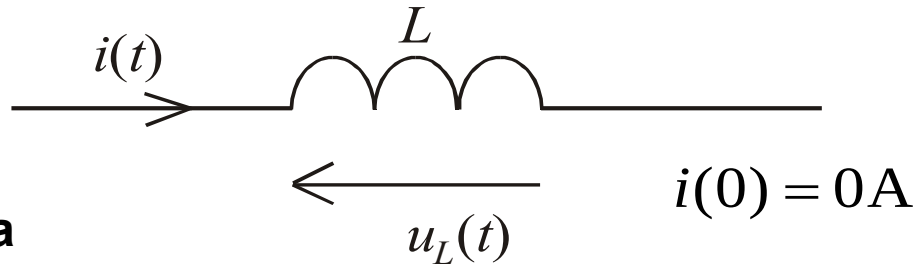
$$H_R(j\omega) = R \quad - \text{Transmitancja częstotliwościowa układu}$$

$$|H_R(j\omega)| = M_R(\omega) = R \quad - \text{charakterystyka amplitudowa}$$

$$\varphi(\omega) = 0 \quad - \text{charakterystyka fazowa}$$

Przykład 2

Układ to pojedyncza cewka



$$u_L(t) = L \frac{d}{dt} i(t) \quad - \text{Równanie opisujące układ w dziedzinie czasu}$$

$$U_L(s) = sL I(s) \quad - \text{Równanie po przekształceniu Laplace'a}$$

$$U_L(j\omega) = j\omega L I(j\omega) \quad - \text{Równanie po przekształceniu Fouriera}$$

$$H_L(s) = sL \quad - \text{Transmitancja operatorowa układu}$$

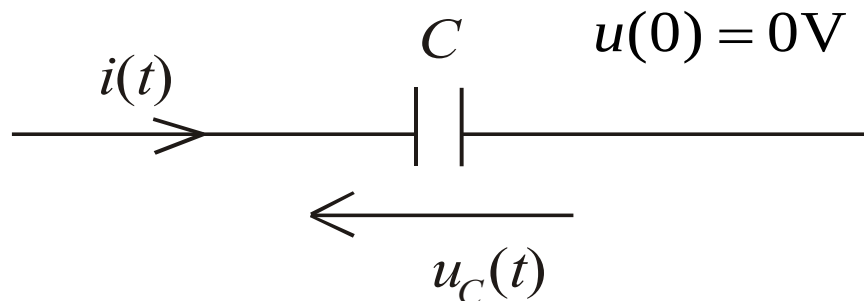
$$H_L(j\omega) = j\omega L = \omega L e^{j90^\circ} \quad - \text{Transmitancja częstotliwościowa układu}$$

$$|H_L(j\omega)| = M_L(\omega) = \omega L \quad - \text{charakterystyka amplitudowa}$$

$$\varphi(\omega) = 90^\circ \quad - \text{charakterystyka fazowa}$$

Przykład 3

Układ to pojedynczy kondensator



$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad - \text{Równanie opisujące układ w dziedzinie czasu}$$

$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I(s) \quad - \text{Równanie po przekształceniu Laplace'a}$$

$$U_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} I(j\omega) \quad - \text{Równanie po przekształceniu Fouriera}$$

$$H_C(s) = \frac{1}{sC} \quad - \text{Transmitancja operatorowa układu}$$

$$H_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j90^\circ} \quad - \text{Transmitancja częstotliwościowa układu}$$

$$|H_C(j\omega)| = M_C(\omega) = \frac{1}{\omega C}$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ$$

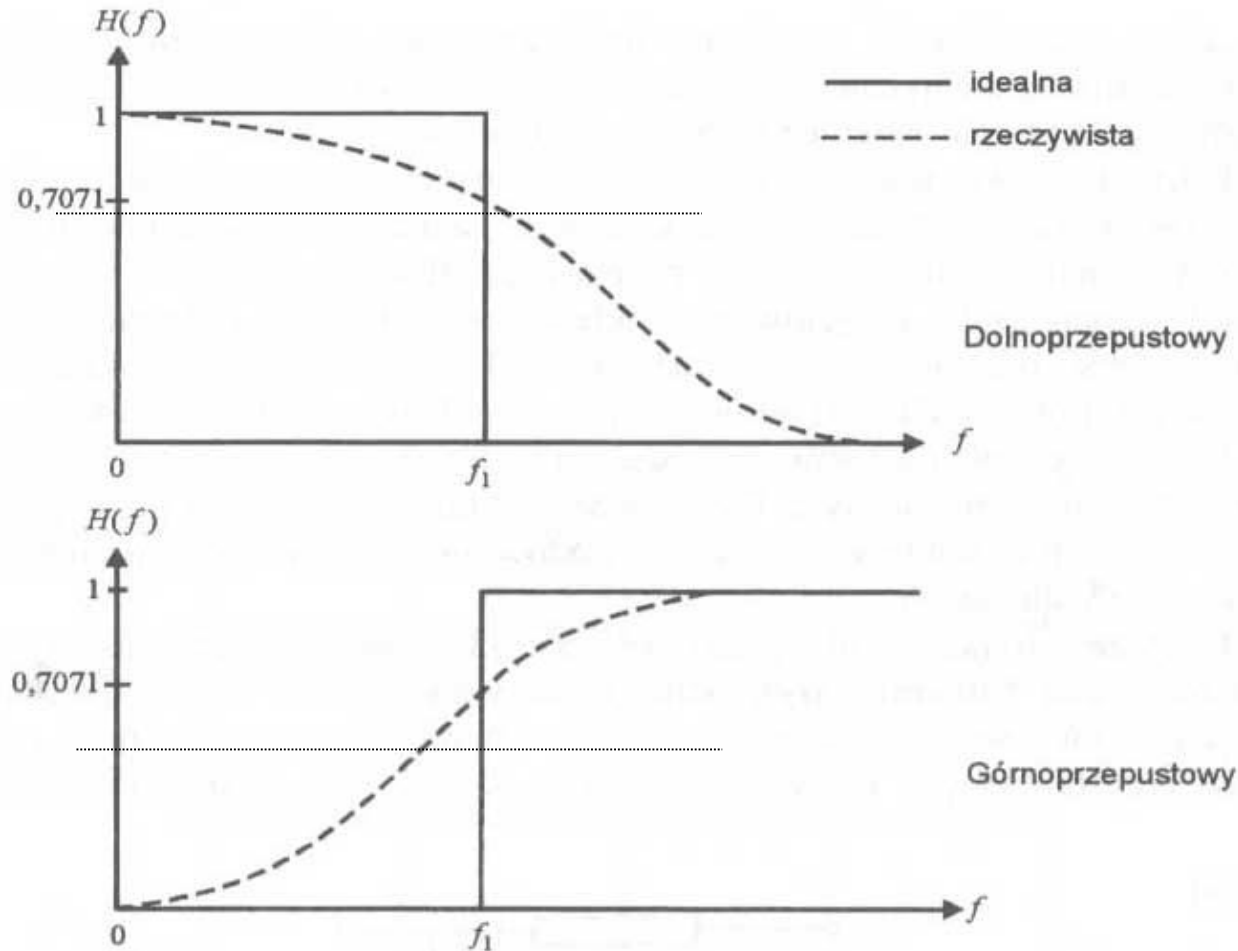
Filtry analogowe

Filtrem nazywamy układ przepuszczający sygnały o częstotliwościach leżących w ograniczonym zakresie, zwanym pasmem przepustowym

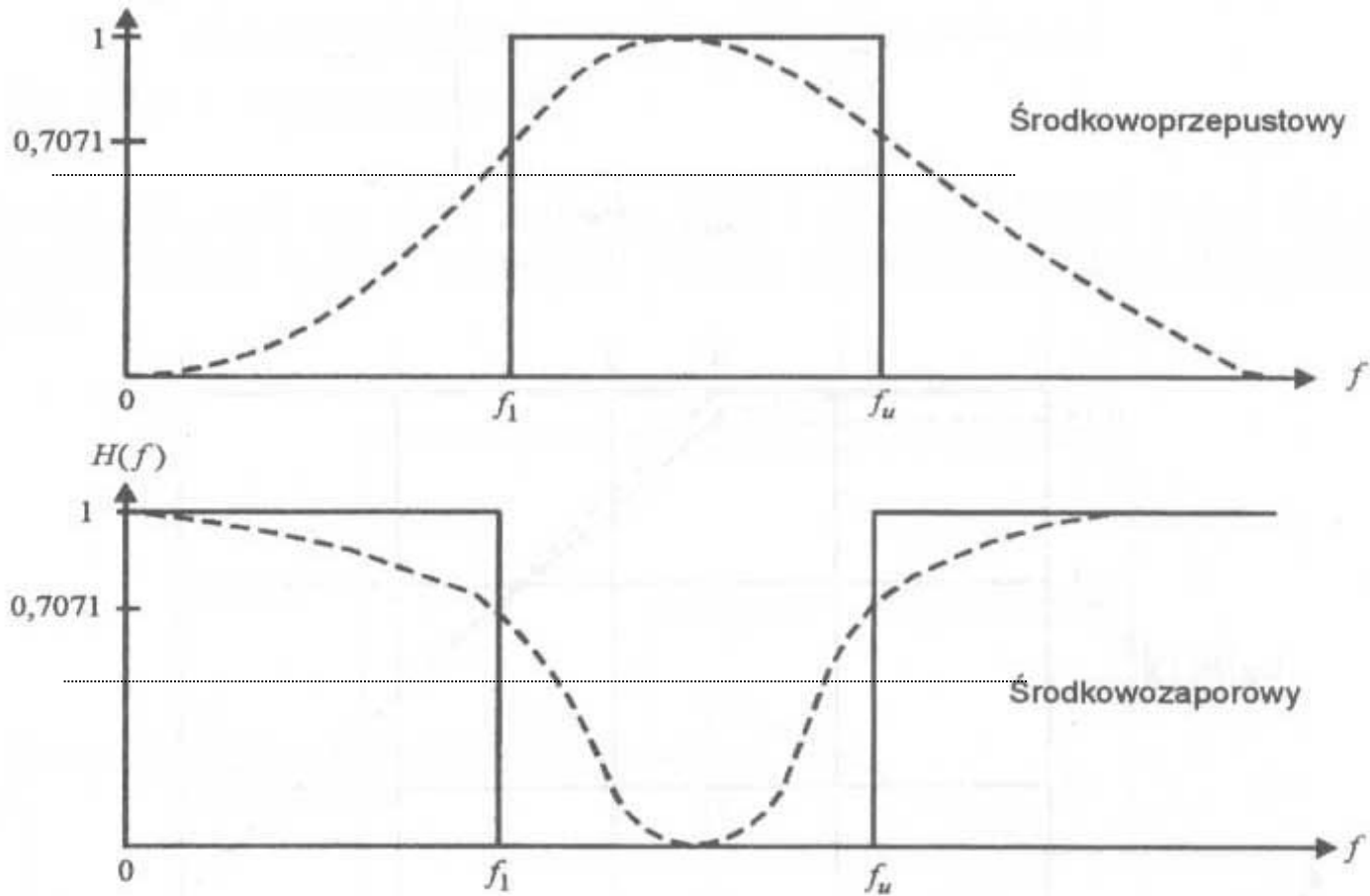
Wyróżniamy 4 podstawowe rodzaje filtrów:

- dolnoprzepustowe
- górnoprzepustowe
- pasmowoprzepustowe
- pasmowozaporowe

Idealne i rzeczywiste ch-ki amplitudowe filtrów



Idealne i rzeczywiste ch-ki amplitudowe filtrów



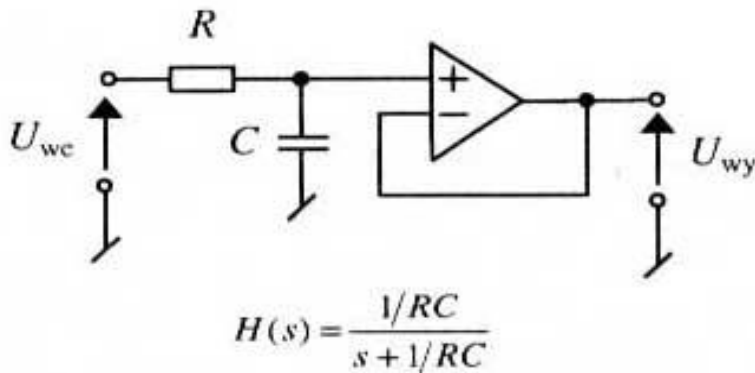
Zastosowanie filtrów

- ▶ Filtry znalazły szerokie zastosowanie w układach elektronicznych. W szczególności są one szeroko stosowane w systemach telekomunikacyjnych m. in. do:
 - selekcji kanałów w systemach wielokanałowych (tzn. wyodrębnienie jednego kanału z informacją z całego pasma zawierającego wiele kanałów)
 - ograniczenia wejściowego zakresu częstotliwości odbiornika, tak by szumy i inne zakłócenia były tłumione

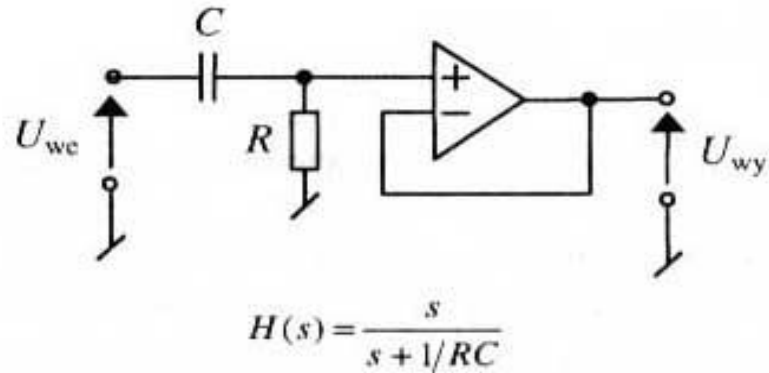
Filtry bierne i aktywne

- ▶ Filtry mogą być pasywne (bierne), gdy nie zawierają elementów aktywnych, takich jak np. tranzystory lub układy scalone. Przykładem takich filtrów mogą być filtry RC i CR
- ▶ Filtry zawierające elementy aktywne, zwykle w postaci wzmacniaczy operacyjnych są nazywane filrami aktywnymi. Podstawową zaletą takich układów jest możliwość realizacji filtrów bez stosowania indukcyjności. Umożliwia to produkcję filtrów wewnątrz układów scalonych

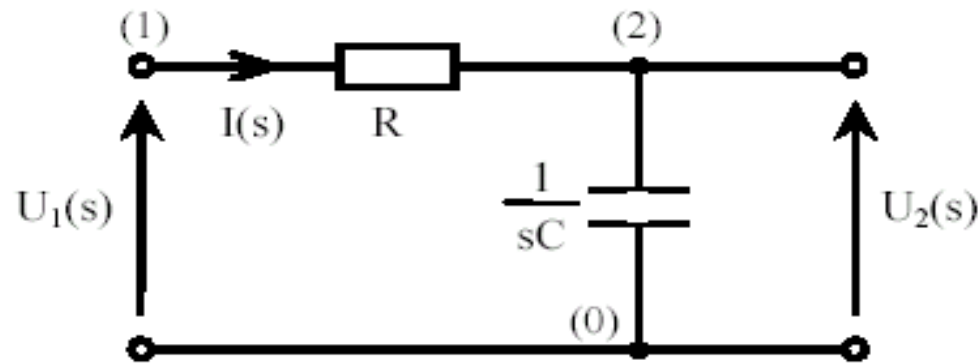
Aktywny filtr dolnoprzepustowy



Aktywny filtr górnoprzepustowy



Filtry analogowe – filtr RC



$$I(s) = \frac{U_1(s)}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{sC}{sRC + 1} U_1(s)$$

Napięcie na wyjściu układu jest równe napięciu na kondensatorze

$$U_2(s) = I(s) \frac{1}{sC} = \frac{sC}{sRC + 1} U_1(s) \frac{1}{sC} = \frac{1}{sRC + 1} U_1(s)$$

Filtry analogowe – filtr RC

$$H(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{1}{j\omega RC + 1}$$

$$H(j\omega) = H(\omega) \exp[j\varphi(\omega)]$$

W naszym zadaniu charakterystykę amplitudową opisuje zależność

$$H(\omega) = |H(j\omega)| = \left| \frac{1}{j\omega RC + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

Wzór określający charakterystykę fazową jest następujący

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \arg[H(j\omega)] = \arg\left(\frac{1}{j\omega RC + 1}\right) = \\ &= \arg(1) - \arg(1 + j\omega RC) = -\arctg(\omega RC) \end{aligned}$$

Filtry analogowe – filtr RC

Zazwyczaj własności układu bada się w szerokim zakresie pulsacji. Z tego też powodu logarytmiczny charakter zmian wprowadza się także na osi poziomej. Tak więc istnieje kilka sposobów wizualizacji charakterystyki amplitudowej. W zależności od sytuacji osie układu współrzędnych są logarytmiczne lub nie. W naszym zadaniu logarytmiczna charakterystyka amplitudowa opisana jest zależnością

$$L(\omega) = 20 \log \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}} = -10 \log [(\omega RC)^2 + 1] = -10 \log \left[\frac{\omega^2}{\omega_{gr}^2} + 1 \right]$$

gdzie $\omega_{gr} = 1/(RC)$ nosi nazwę pulsacji granicznej układu. Dla pulsacji wielokrotnie większych od pulsacji granicznej można zaniedbać jedynkę w nawiasie, co prowadzi do następującego wzoru dla widma amplitudowego wyrażonego w decybelach

$$L(\omega) = -10 \log \left[\frac{\omega^2}{\omega_{gr}^2} \right] = -20 \log \frac{\omega}{\omega_{gr}} = -20 \log \omega + 20 \log \omega_{gr}$$

Filtry analogowe – filtr RC

Obliczmy ile wynosi wartość charakterystyki amplitudowej dla pulsacji granicznej. Gdy oś pionowa jest liniowa mamy

$$H(\omega_{gr}) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_{gr} RC)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$$

Przeliczając powyższą wartość na decybele otrzymujemy

$$L(\omega_{gr}) \approx 20 \log 0.707 = -3 \text{ dB}$$

Interesująca jest także wartość charakterystyki fazowej dla ω_{gr} .

$$\varphi(\omega_{gr}) = -\arctg(\omega_{gr} RC) = -\arctg(1) = -\frac{\pi}{4}$$

Filtry analogowe – filtr RC

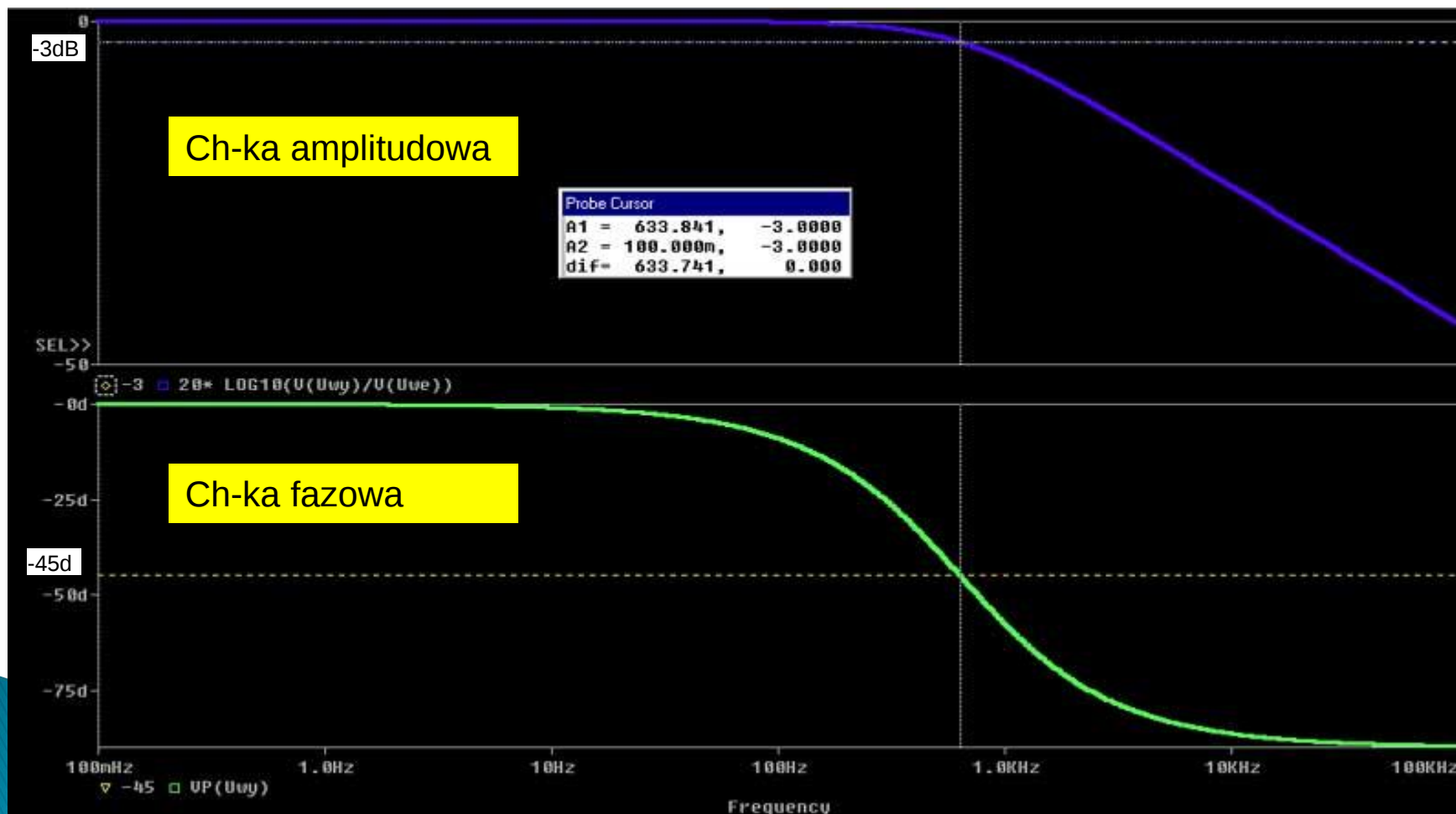
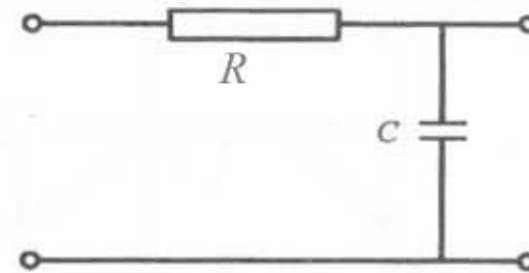
Przy sporządzaniu wykresu Nyquista bardziej wygodny jest zapis transmitancji widmowej w postaci algebraicznej, to znaczy w postaci

$$H(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

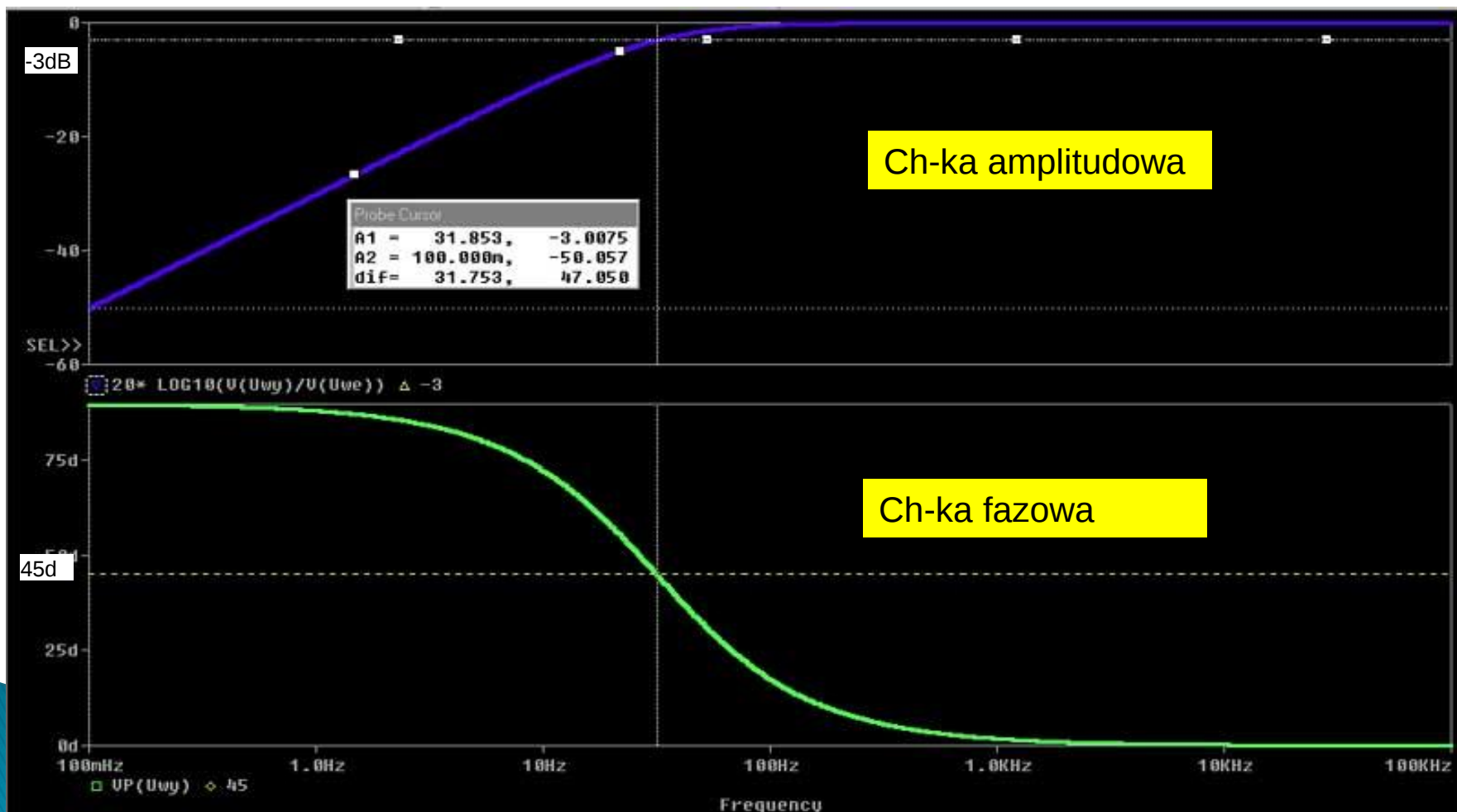
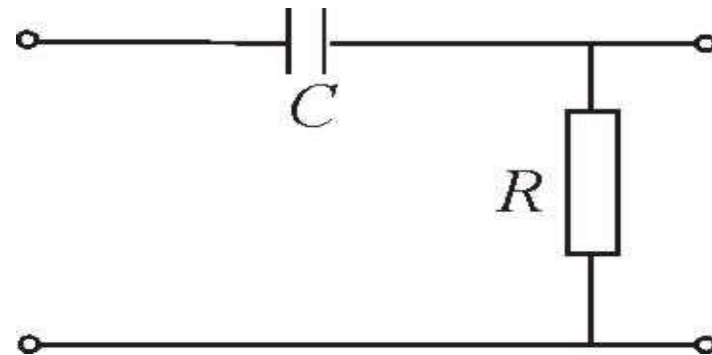
Funkcje $P(\omega)$ oraz $Q(\omega)$ wyznaczymy łatwo po uprzednim pomnożeniu licznika i mianownika transmitancji przez sprzężenie mianownika.

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \frac{1 - j\omega RC}{1 - j\omega RC} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}$$
$$P(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} \quad Q(\omega) = \frac{-\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}$$

Filtr analogowy RC jest filtrem dolnoprzepustowym

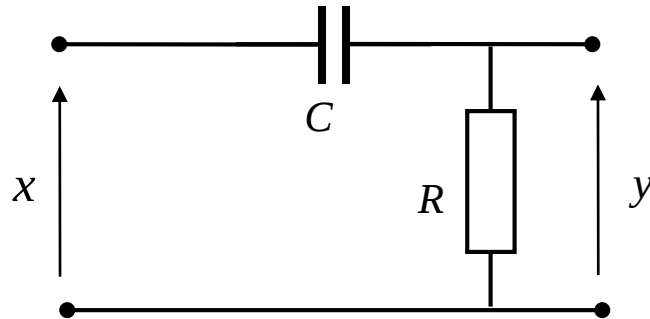


Filtr analogowy CR jest filtrem górnoprzepustowym



Transmitancja układów analogowych

Zbadać charakterystykę częstotliwościową filtra przedstawionego na rys., który jest nazywany pasywnym górnoprzepustowym filtrem RC.



Przy założeniu, że wymuszeniem dla układu jest napięcie przyłożone do gałęzi szeregowej RC, natomiast odpowiedzią jest napięcie na oporniku, otrzymuje się związek między charakterystykami częstotliwościowymi odpowiedzi i wymuszenia w postaci

$$Y(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} X(j\omega)$$

Transmitancja układów analogowych

Badany układ jest opisany transmitancją częstotliwościową

$$H(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j\omega}{\frac{1}{RC} + j\omega}$$

$$H(s) = \frac{sRC}{1 + sRC} = \frac{s}{\frac{1}{RC} + s}$$

Charakterystyka amplitudowa jest w postaci

$$M(\omega) = \frac{\omega}{\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + \omega^2}}$$

Charakterystyka fazowa

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\omega RC) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

Transmitancja układów analogowych

Postać kartezjańska

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{\left(\frac{1}{RC} + j\omega\right)} \frac{\left(\frac{1}{RC} - j\omega\right)}{\left(\frac{1}{RC} - j\omega\right)} = \frac{\omega^2 + j\frac{\omega}{RC}}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + \omega^2}$$

Część rzeczywista

$$P(\omega) = \frac{\omega^2}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + \omega^2}$$

Część urojona

$$Q(\omega) = \frac{\omega \frac{1}{RC}}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + \omega^2}$$

Charakterystyka logarytmiczna

$$L(\omega) = 20 \log M(\omega) = 20 \log \frac{\omega}{\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + \omega^2}} = 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + \omega^2}$$

Transmitancja układów analogowych

$$\frac{1}{RC} = 5$$

ω	0	$\frac{1}{RC}$	∞
$P(\omega)$	0	$\frac{1}{2}$	1
$Q(\omega)$	0	$\frac{1}{2}$	0

Cz. Rzeczywista

Cz. Urojona

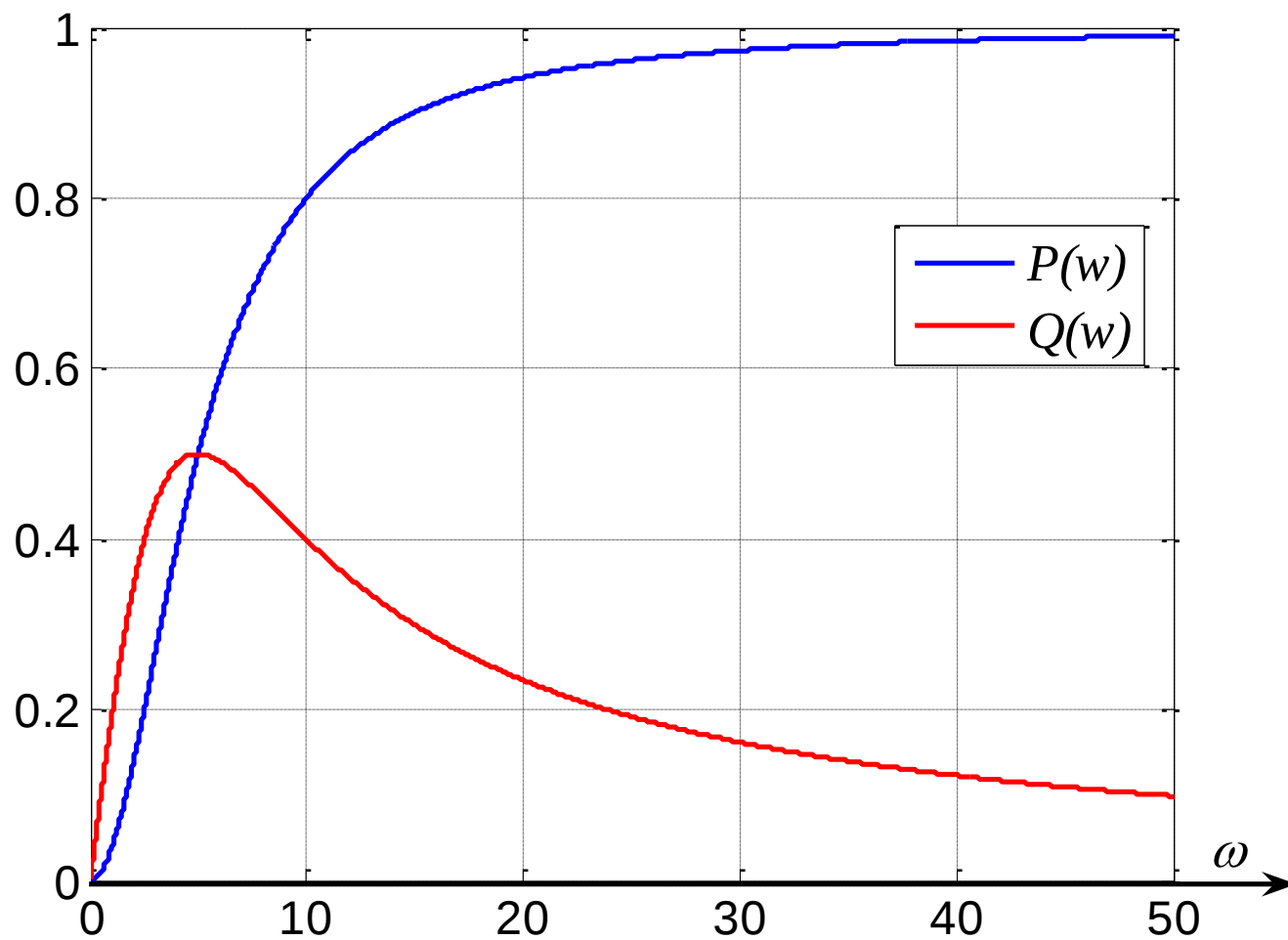
$M(\omega)$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\varphi(\omega)$	90	45	0
$L(\omega)$	-20 dB /dek	-3	0

Cha-ka Modułu

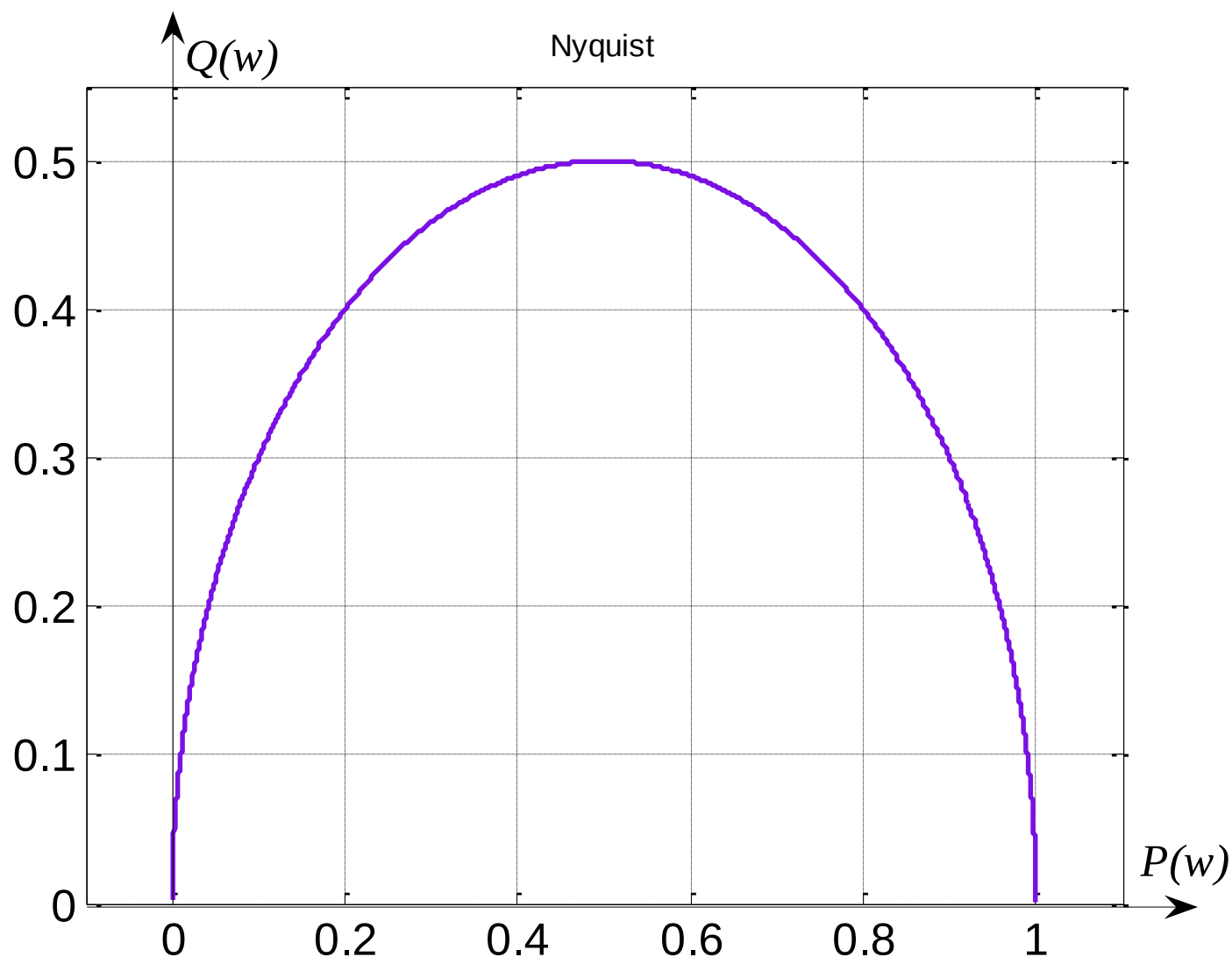
Ch-ka fazowa

Ch-ka logarytmiczna

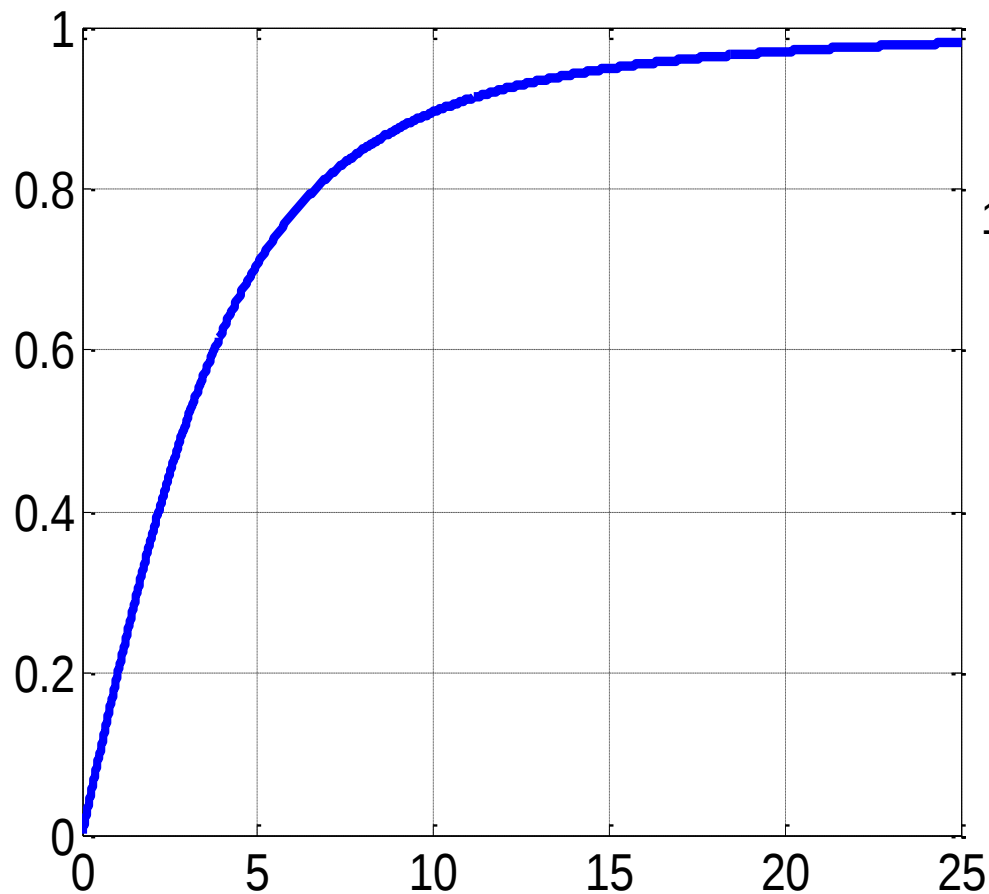
Cha-ka $P(w)$ i $Q(w)$



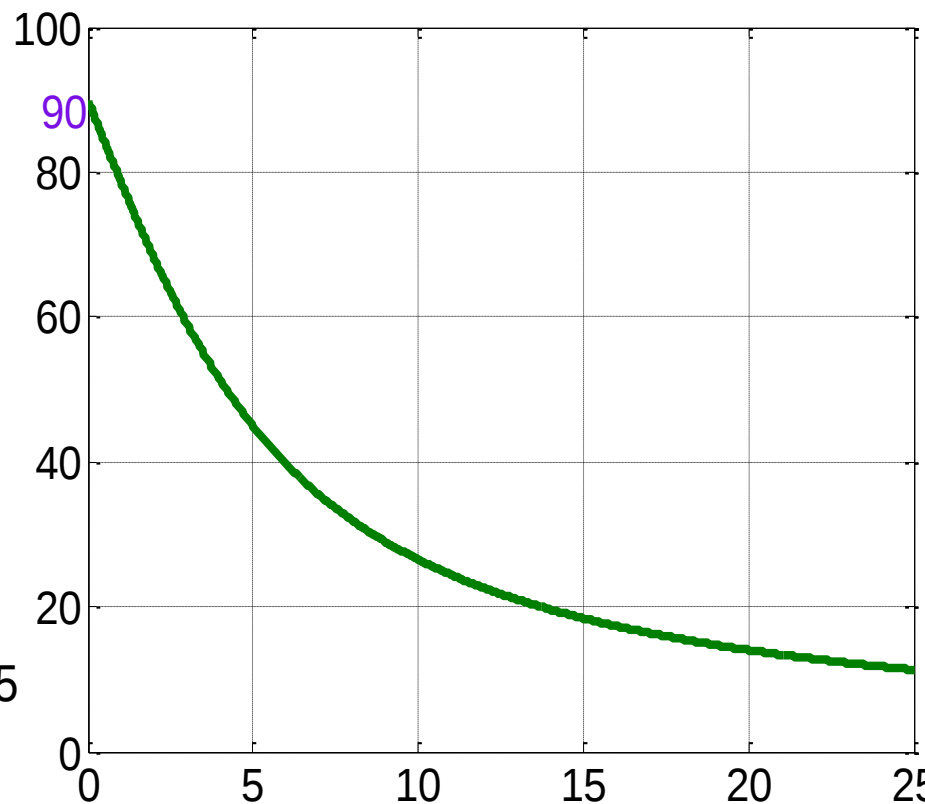
Cha-ka widmowa (*amplitudowo-fazowa*)



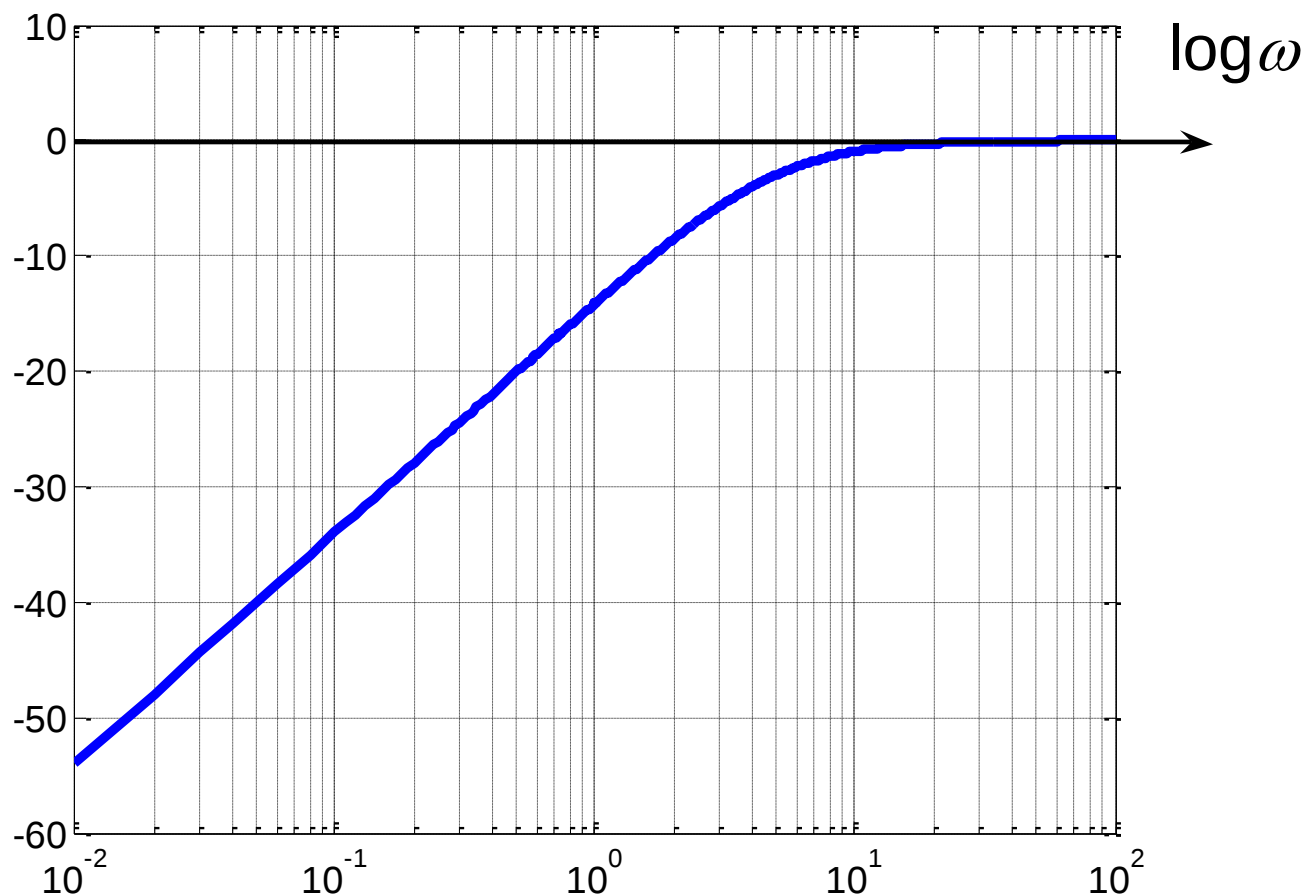
Cha-ka amplitudowa $M(w)$



Cha-ka fazowa



Cha-ka logarytmiczna



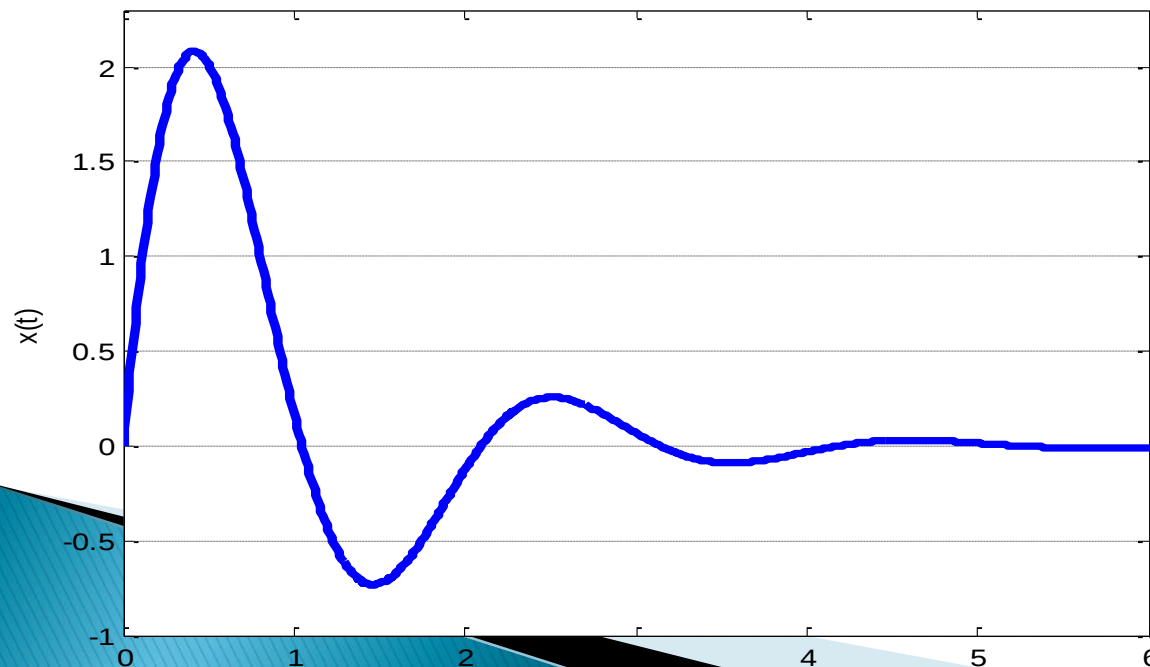
Przykład – cha-ki 2 rzędu

Dany jest układ 2 rzędu o transmitancji $H(s)$
Wyznacz odpowiedź impulsową $h(t)$ oraz
Charakterystyki częstotliwościowe układu.

$$H(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10} = \frac{1.11 \cdot 3^2}{(s+1)^2 + 3^2}$$

Cha-ka widmowa $H(j\omega)$:

$$H(j\omega) = \frac{10}{(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 10} = \frac{10}{10 - \omega^2 + j2\omega}$$



$$h(t) = 1.11 \cdot 3e^{-t} \sin(3t)$$

Przykład – cha-ki 2 rzędu

$$H(j\omega) = \frac{10}{(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 10} = \frac{10}{10 - \omega^2 + j2\omega}$$

$$H(j\omega) = \frac{10(10 - \omega^2 - j2\omega)}{(10 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}$$

$$P(\omega) = \frac{10(10 - \omega^2)}{(10 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}$$

$$Q(\omega) = \frac{-20\omega}{(10 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}$$

$$M(\omega) = \frac{10}{\sqrt{(10 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}}$$

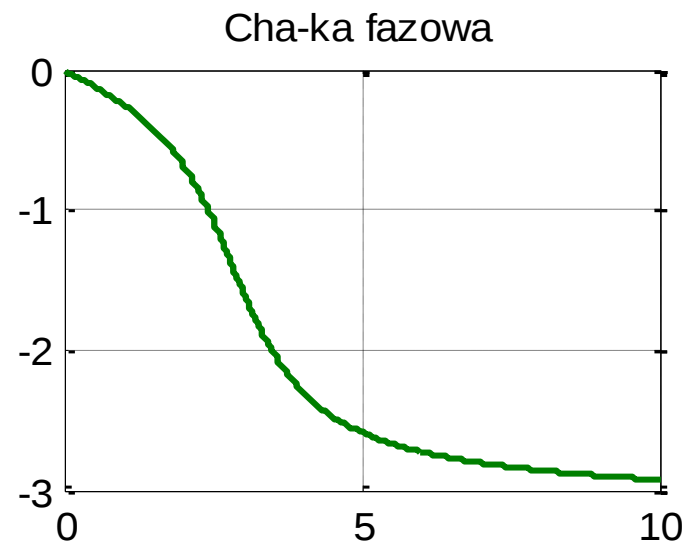
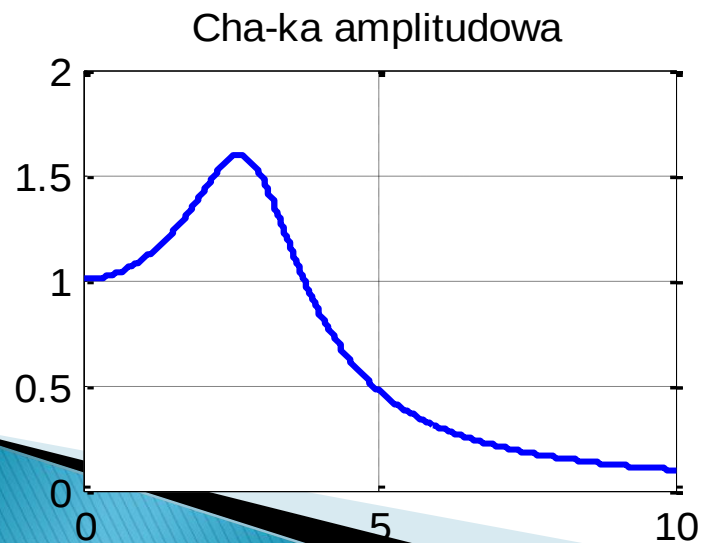
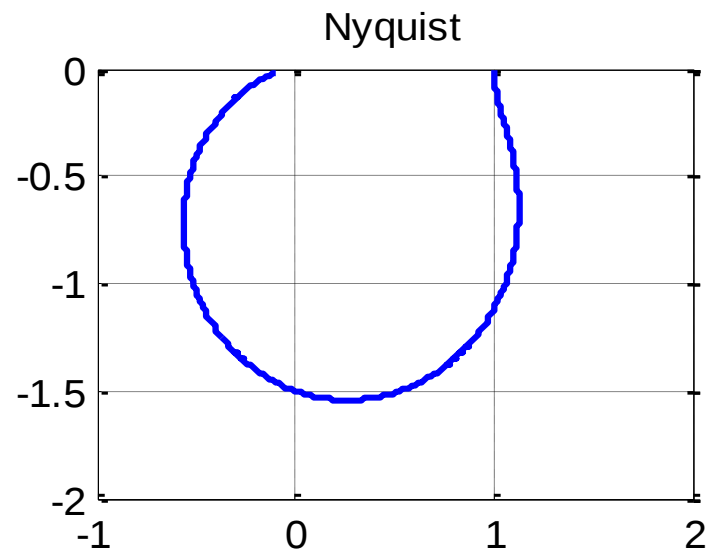
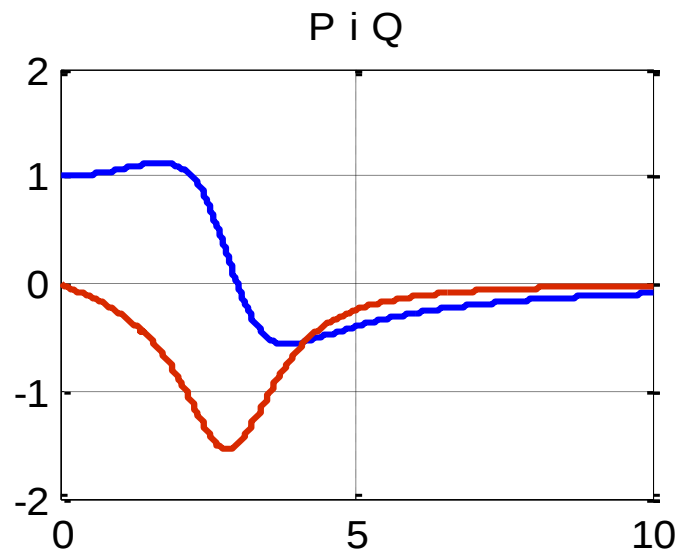
$$L(\omega) = 20 \log \frac{10}{\sqrt{(10 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \left(\frac{-2\omega}{10 - \omega^2} \right)$$

Wartości charakterystyk

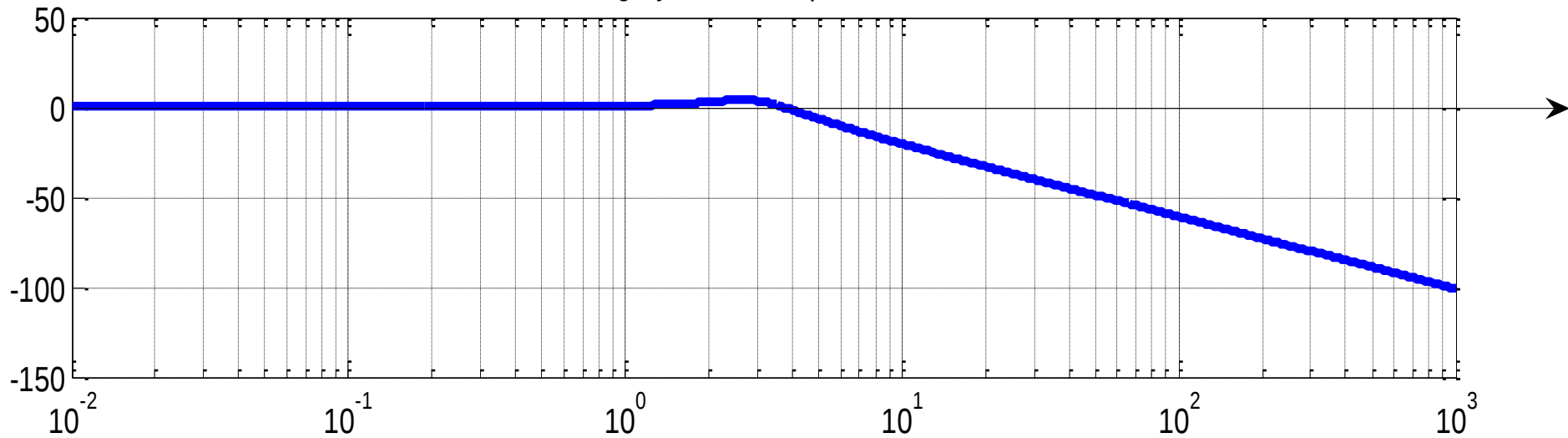
ω	0	1	2	3	∞
$P(\omega)$	1	1.06	1.15	0.27	-0
$Q(\omega)$	0	-0.23	-0.77	-1.62	-0
$M(\omega)$	1	1.1	1.4	1.64	+0
$\varphi(\omega)$	0	-0.25	-0.67	$-\pi/2$	$-\pi$
$L(\omega)$	0	0.42	1.2	4.3	-40dB/ dek

Charakterystyki

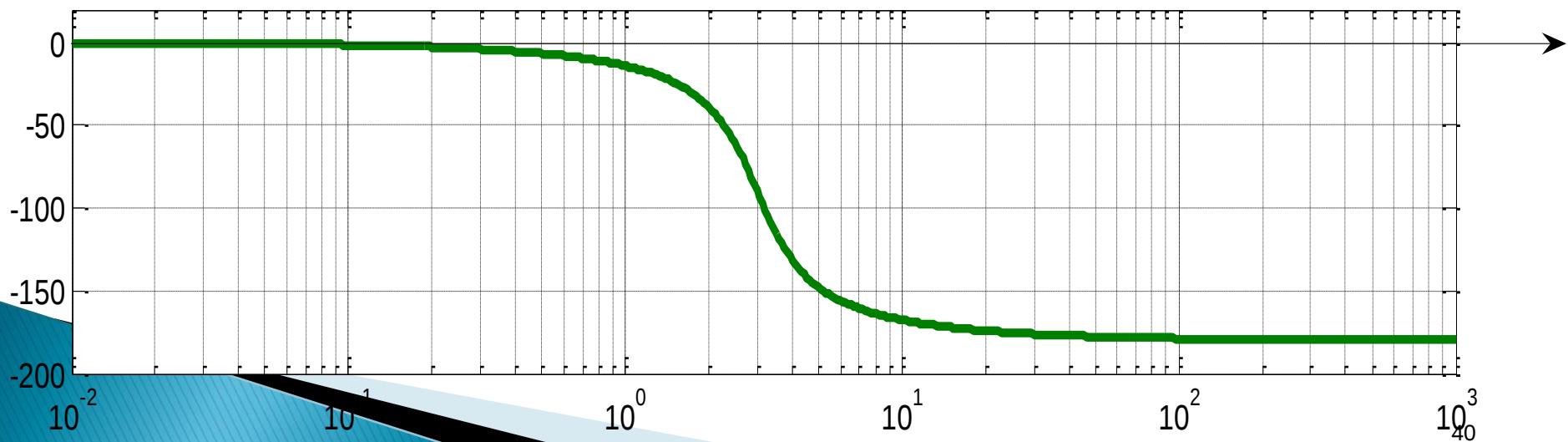


Charakterystyki logarytmiczne

Logarytmiczna Amplitudowa

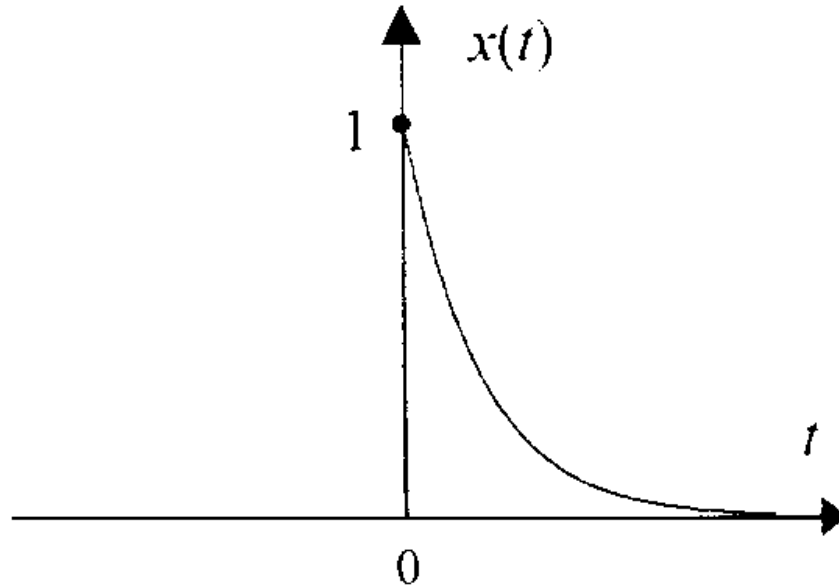


Log fazowa



$\log \omega$

Przykład



- ▶ Impuls wykładniczy
 $x(t) = \exp(-2t) \mathbf{u}(t)$
- ▶ Oblicz cha-ki widmowe
sygnału.

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(2+j\omega)t} dt$$

$$F(j\omega) = \left. \frac{e^{-(2+j\omega)t}}{-(2+j\omega)} \right|_0^{+\infty} = \frac{e^{-(2+j\omega)\infty} - e^0}{-(2+j\omega)} = \frac{1}{2+j\omega}$$

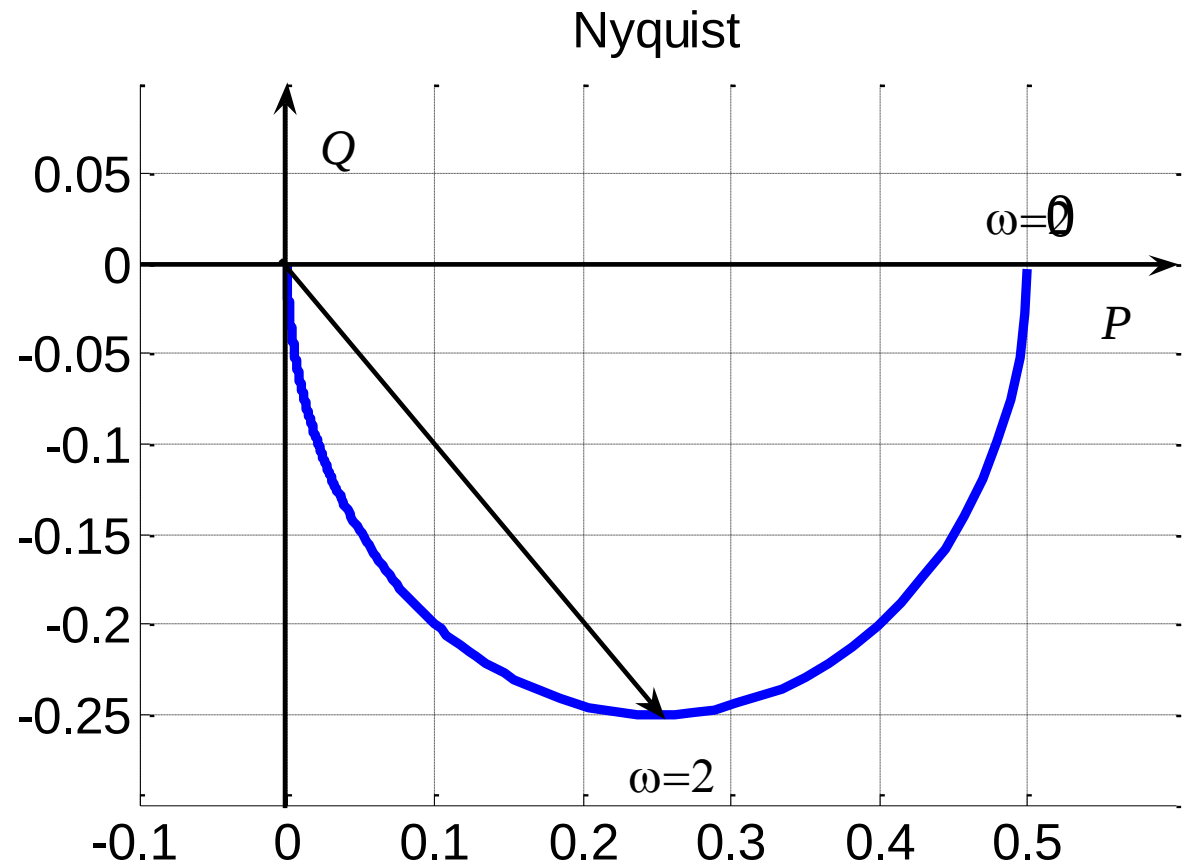
Cha-ka amplitudowo-fazowa

$$F(j\omega) = \frac{1}{2+j\omega} = \frac{1}{(2+j\omega)(2-j\omega)} = \frac{2-j\omega}{4+\omega^2} = \frac{2}{4+\omega^2} - j \frac{\omega}{4+\omega^2}$$

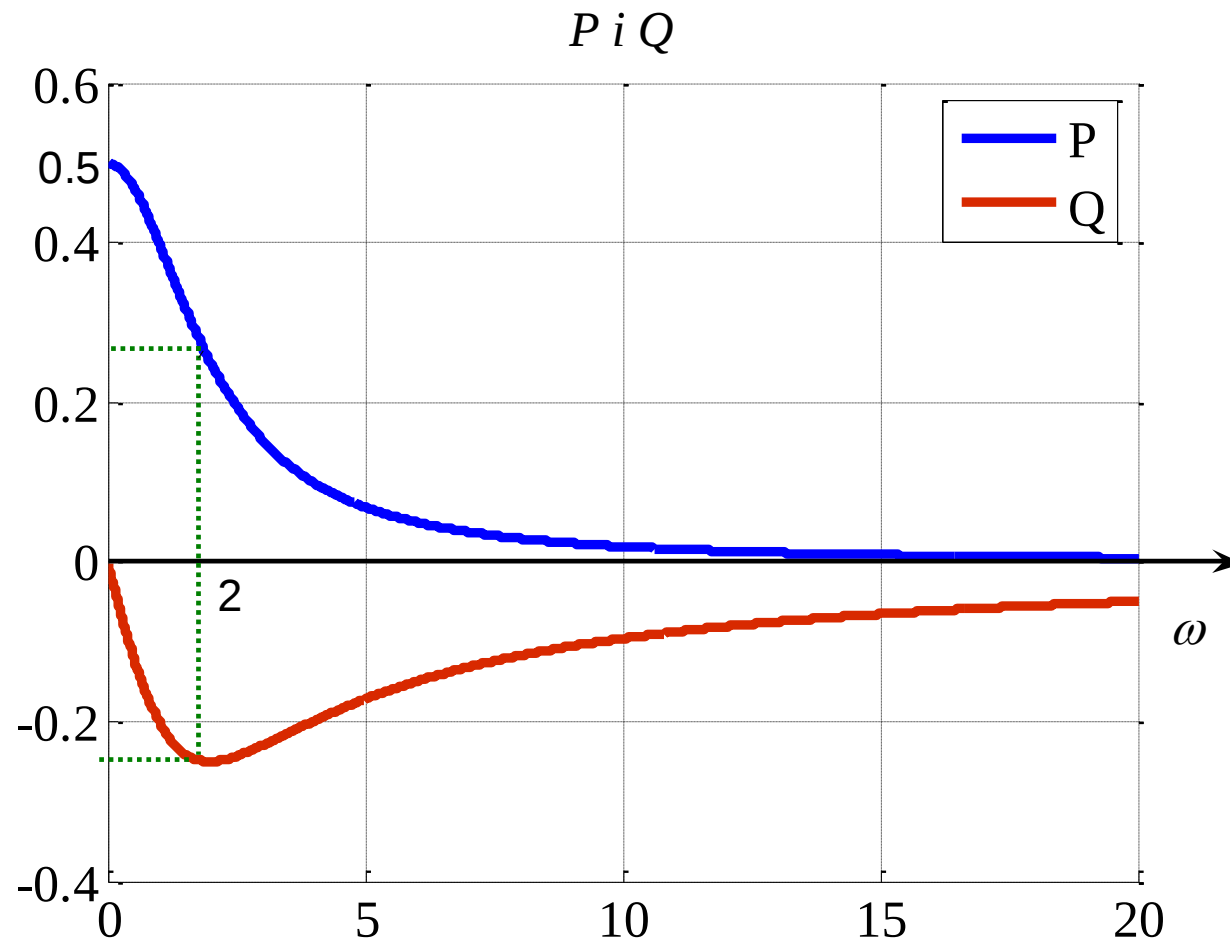
$$P(\omega) = \frac{2}{4+\omega^2}$$

$$Q(\omega) = \frac{-\omega}{4+\omega^2}$$

ω	0	2	∞
$P(\omega)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
$Q(\omega)$	0	$-\frac{1}{4}$	0

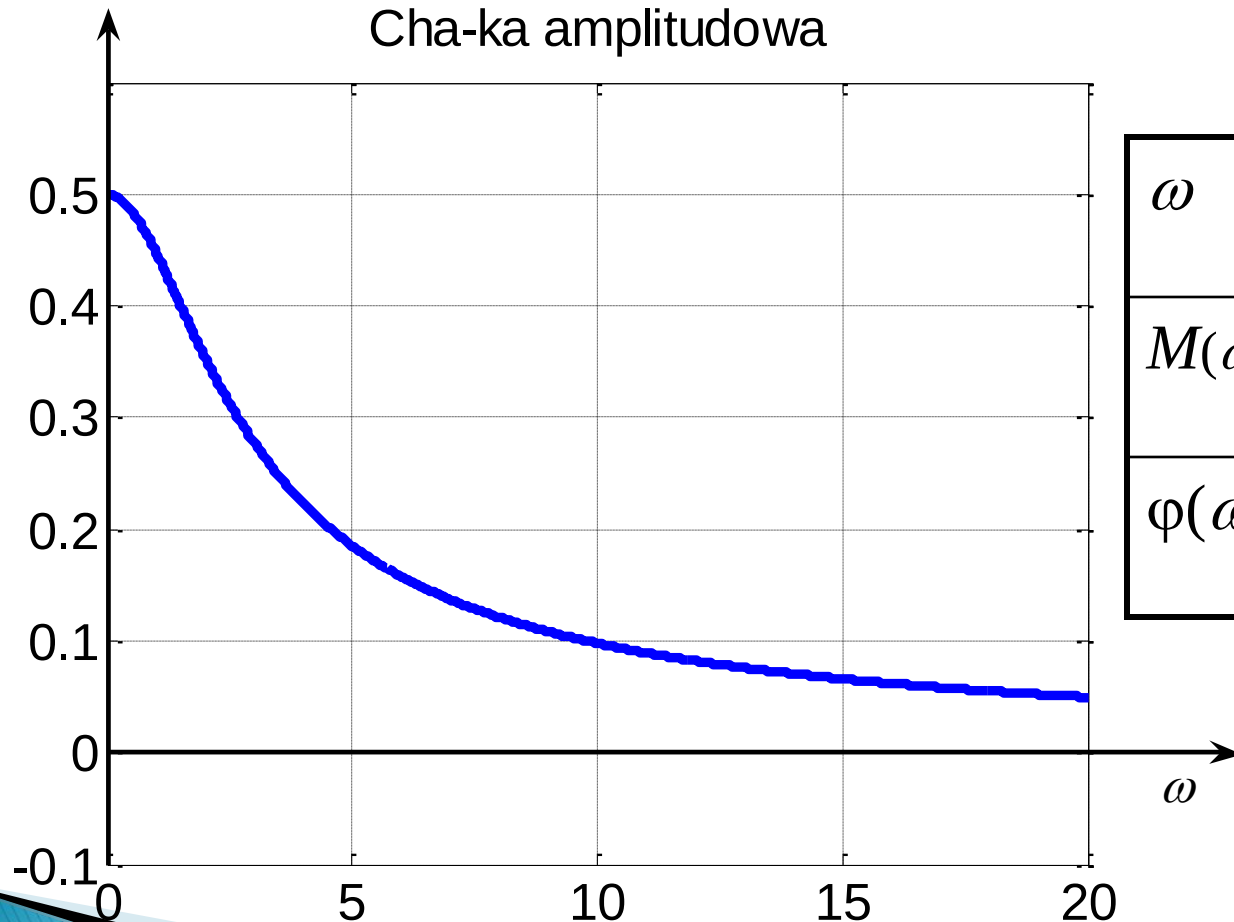


Cha-ki części rzeczywistej P i urojonej Q



Cha-ka amplitudowa

$$M(\omega) = |F(j\omega)| = \frac{1}{|2 + j\omega|} = \frac{1}{\sqrt{4 + \omega^2}}$$

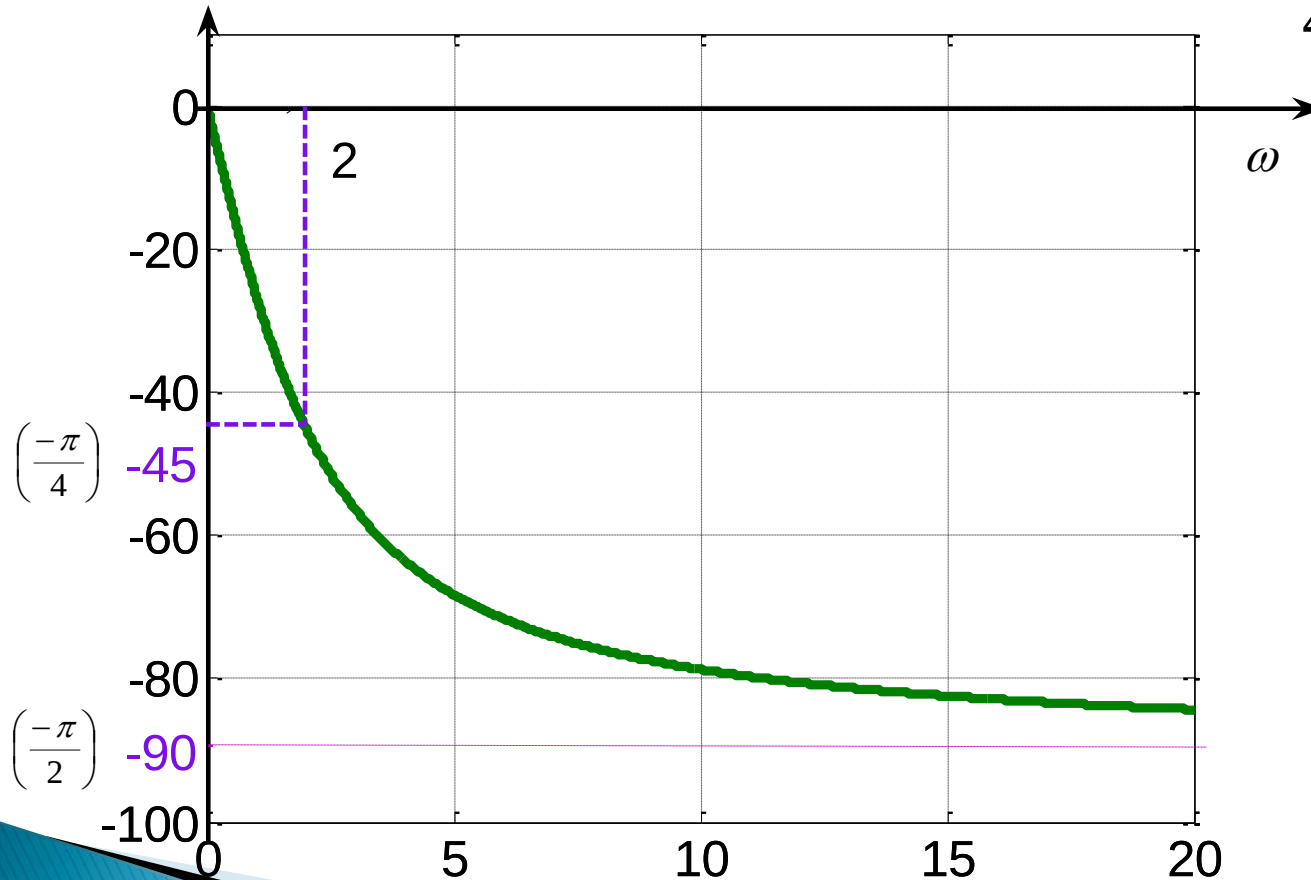


ω	0	2	∞
$M(\omega)$	0.5	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	0
$\varphi(\omega)$	0	-45	-90

Cha-ka fazowa

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q}{P} = \arctg \frac{\frac{-\omega}{4 + \omega^2}}{\frac{\omega}{2}} = -\arctg \frac{\omega}{2}$$

Cha-ka fazowa



Cha-ka logarytmiczna

$$L(\omega) = 20 \log M(\omega) = 20 \log \frac{1}{\sqrt{4 + \omega^2}} = -20 \log \sqrt{4 + \omega^2}$$

Logorytmiczna

