

Analiza zespolona

- niezależna od czasu
- stała częstotliwość

Założenia do analizy

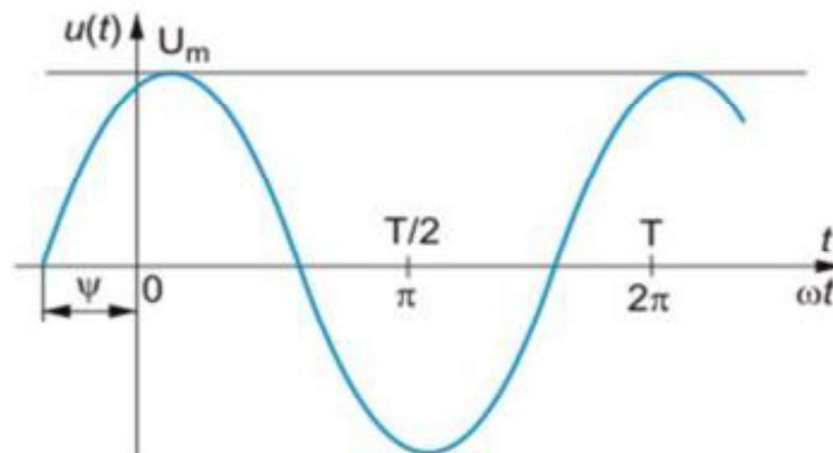
Wszystkie źródła napięciowe i prądowe mają jednakową częstotliwość, chociaż mogą mieć różne fazy.

Jednakowa częstotliwość oznacza, że ich wskaźy wirują z tą samą prędkością kątową, zatem pozostają one względem siebie w ustalonej pozycji.

Zakładamy też, że wszystkie elementy są liniowe – tylko wtedy sinusoidalne napięcia powodują przepływ sinusoidalnego prądu.

Parametry sygnału sinusoidalnego

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$$



$u(t)$	- wartość chwilowa napięcia
U_m	- wartość maksymalna (szczytowa) napięcia zwana również amplitudą
ψ	- faza początkowa napięcia odpowiadająca chwili $t=0$
$\omega t + \psi$	- kąt fazowy napięcia w chwili t
$f=1/T$	- częstotliwość mierzona w hercach (Hz)
T	- okres przebiegu sinusoidalnego
ω	- pulsacja mierzona w radianach na sekundę

*UWAGA: Wartości chwilowe sygnałów będziemy oznaczać małą literą,
a wartości maksymalne, skuteczne i wielkości operatorowe dużą.*

Wartość skuteczna sygnału okresowego

Wartość skuteczna (RMS z ang. Root Mean Square) jest statystyczną miarą sygnału okresowo zmiennego (najczęściej dotyczy wielkości elektrycznych prądu i napięcia).

Wartość skuteczna prądu przemiennego jest taką wartością prądu stałego, która w ciągu czasu równego okresowi prądu przemiennego spowoduje ten sam efekt cieplny, co dany sygnał prądu przemiennego (zmiennego).

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) dt}$$

Wartość skuteczna sygnału okresowego

Dla sygnału sinusoidalnego:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t)$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 \sin^2(\omega t) dt}$$

$$\int_0^T U_m^2 \sin^2(\omega t) dt = 0,5 U_m^2 \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt =$$

$$0,5 T U_m^2 - 0,25 \frac{U_m^2}{\omega} \sin 2\omega t \Big|_0^T = 0,5 T U_m^2$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} 0,5 T U_m^2} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Dla sygnału sinusoidalnego

- napięcia

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) \rightarrow U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

- prądu

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi) \rightarrow I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

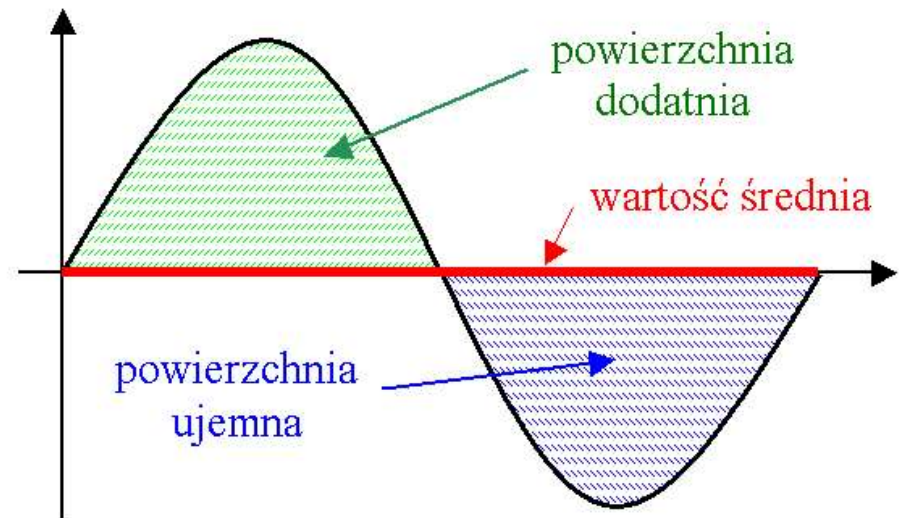
Wartość średnia sygnału okresowego $f(t)$

Drugim parametrem charakteryzującym sygnał sinusoidalny jest **wartość średnia**, czyli pole zawarte pod krzywą odniesione do czasu w którym ta wartość jest obliczana.

Wartość średnią sygnału w okresie T definiuje zależność:

$$G = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

Ze względu na symetrię funkcji sinusoidalnej wartość średnia całookresowa jest z definicji równa zero.



Metoda symboliczna liczb zespolonych analizy obwodów *RLC*

Analiza obwodów zawierających elementy *RLC* przy wymuszeniu sinusoidalnym napotyka na *trudności* związane z wystąpieniem w opisie cewki i kondensatora równań różniczkowych. *Trudności* te łatwo można „pokonać” w stanie ustalonym.

Stanem ustalonym obwodu będziemy nazywać taki stan, w którym charakter odpowiedzi jest identyczny z charakterem wymuszenia, to znaczy odpowiedzią na wymuszenie sinusoidalne jest odpowiedź również sinusoidalna o tej samej częstotliwości, choć o różnej amplitudzie i fazie początkowej.

Dla stanu ustalonego obwodu wprowadzona zostanie metoda liczb zespolonych, zwana również metodą symboliczną, sprowadzająca wszystkie operacje różniczkowe i całkowe do działań algebraicznych na liczbach zespolonych.

Podstawowe własności liczb zespolonych

$$z = x + jy$$

$$\operatorname{Re}[z] = x \quad - \text{część rzeczywista}$$

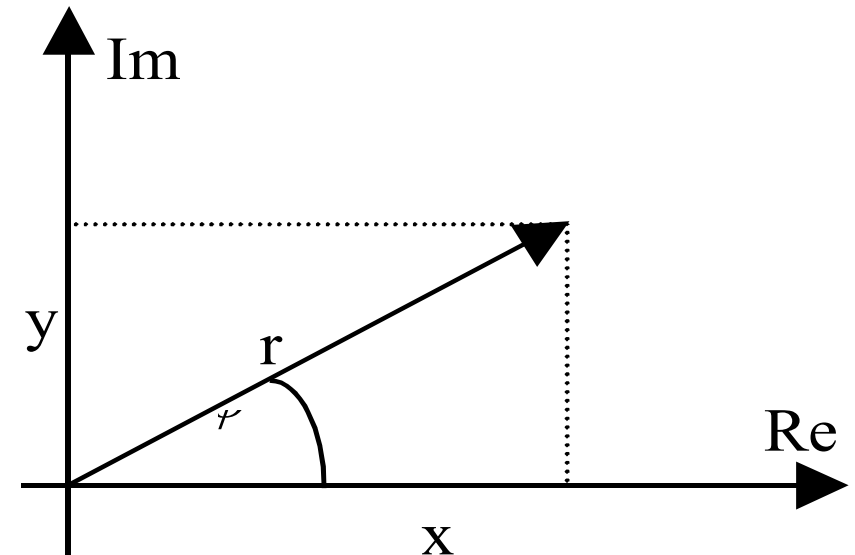
$$j = \sqrt{-1}$$

$$\operatorname{Im}[z] = y \quad - \text{urojona}$$

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad - \text{moduł}$$

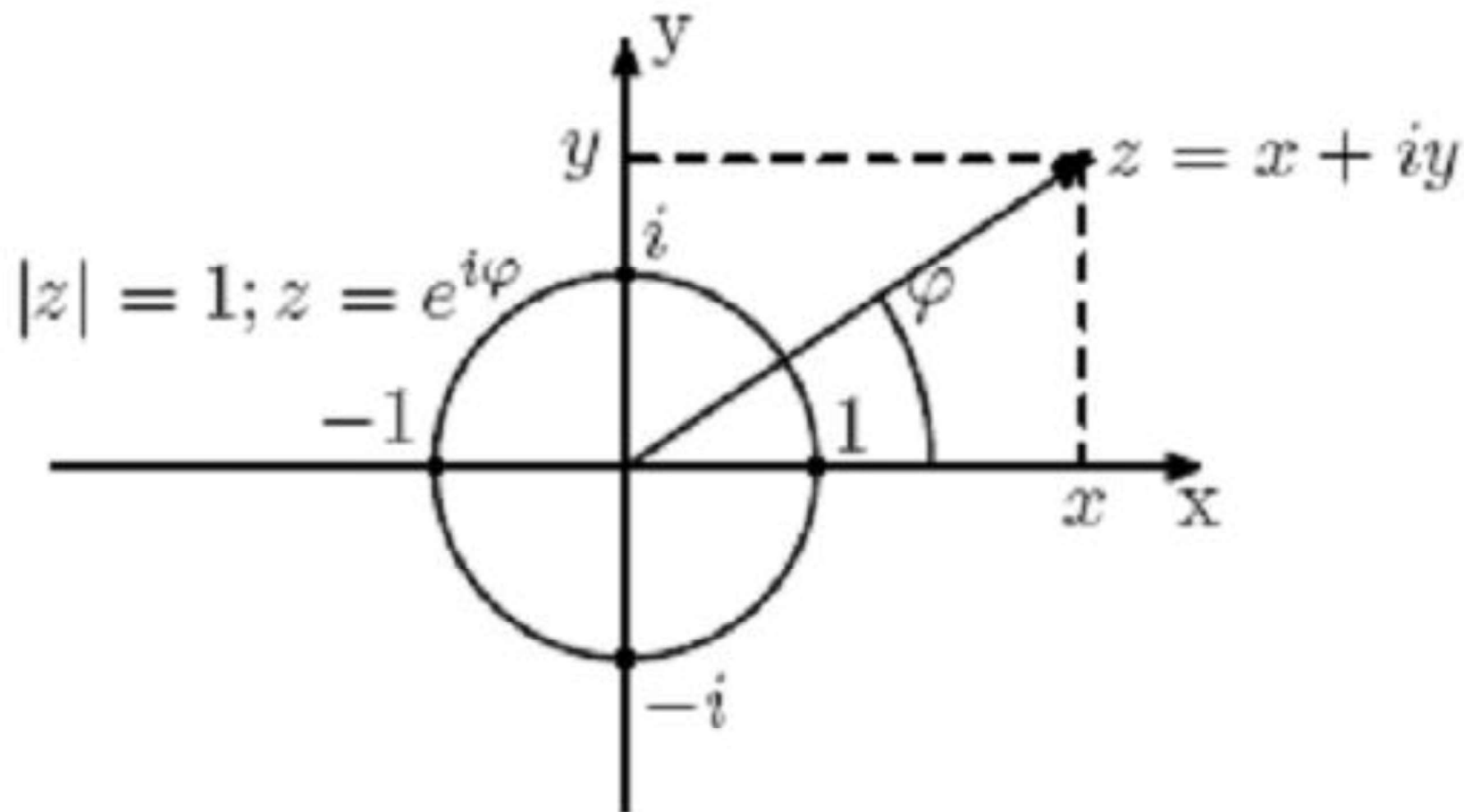
$$z = re^{j\varphi} = r \cos \varphi + jr \sin \varphi$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi & y = r \sin \varphi \\ \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & - \text{faza} \end{cases}$$



SYGNAŁY I SYSTEMY

Podstawowe własności liczb zespolonych



$$j = e^{j90^\circ}$$

$$-j = e^{-j90^\circ}$$

Podstawowe własności liczb zespolonych

Dodawanie i odejmowanie liczb zespolonych

$$z_3 = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

Mnożenie liczb zespolonych

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Dzielenie liczb zespolonych

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right) e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

SYGNAŁY I SYSTEMY

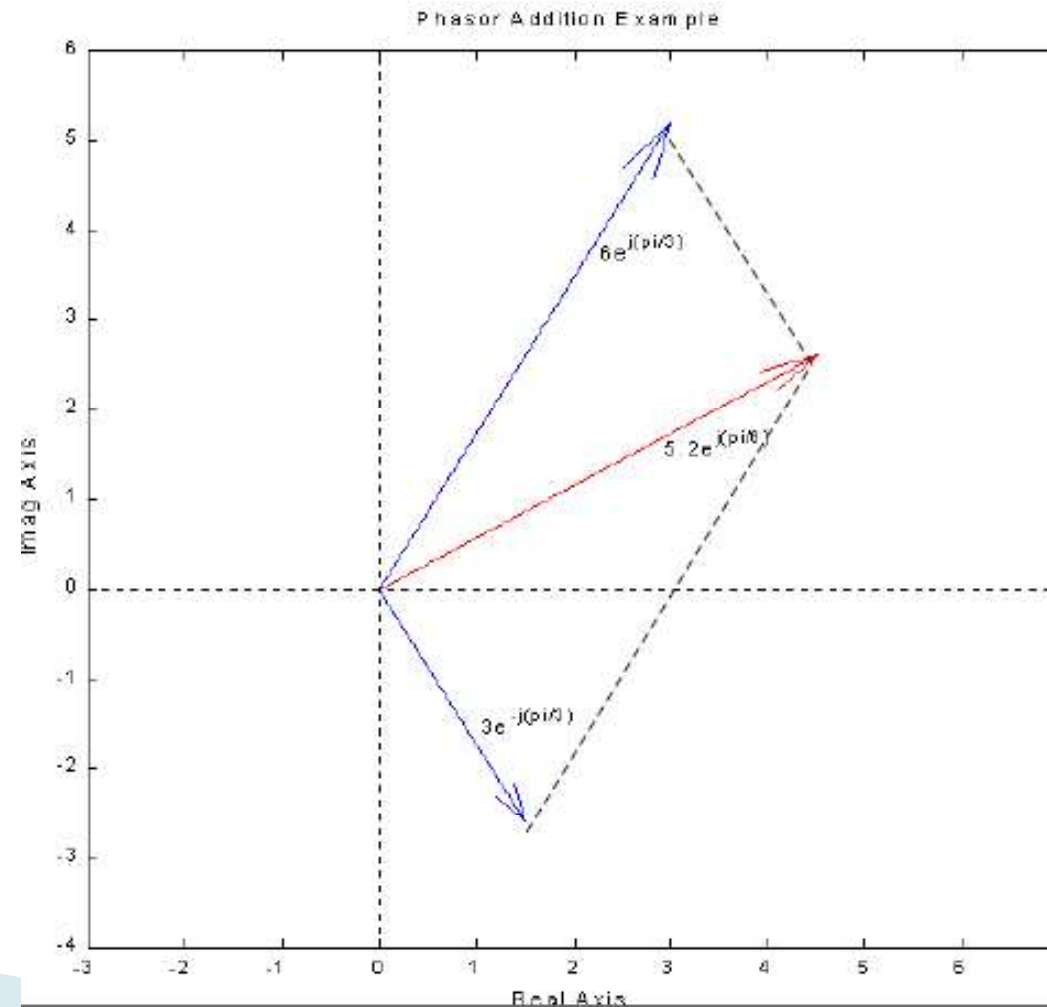
Podstawowe własności liczb zespolonych

$$z_1 = 6e^{j\pi/3}, \quad z_2 = 3e^{-j\pi/3}, \quad z_3 = z_1 + z_2$$

$$z_1 = 3 + j5.1962, \quad z_2 = 1.5 - j2.5981$$

$$z_3 = 4.5 + j2.5981$$

$$z_3 = 5.1962e^{j\pi/6}$$



Źródło napięcia – zapis czasowy

Źródło o pulsacji ω i napięciu maksymalnym E_m

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$$

$$e(t) \quad \textcircled{\uparrow}$$

Źródło napięciowe – zapis zespolony

$$E = |E| e^{j\psi} \quad |E| = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \quad E_m = \sqrt{2} |E| \quad E \quad \textcircled{\uparrow}$$

Źródło prądu – zapis czasowy

Źródło o pulsacji ω i prądzie maksymalnym J_m

$$j(t) = J_m \sin(\omega t + \phi)$$

$$j(t) \quad \textcircled{\uparrow}$$

Źródło prądowe – zapis zespolony

$$J = |J| e^{j\phi} \quad |J| = \frac{J_m}{\sqrt{2}}$$

$$J \quad \textcircled{\uparrow}$$

SYGNAŁY I SYSTEMY

Przejście z przebiegu czasowego na opis zespolony (symboliczny)
dla źródeł napięcia i prądu odbywa się według schematu

$$\begin{aligned} u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) &\rightarrow \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u} \\ i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) &\rightarrow \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i} \end{aligned}$$

$$10\sqrt{2} \sin(\omega t + 50^\circ) \rightarrow 10e^{j50^\circ}$$

$$100 \sin(144t + 30^\circ) \rightarrow \frac{100}{\sqrt{2}} e^{j30^\circ}$$

$$25 \cos(1000t - 15^\circ) = 25 \sin(1000t - 15^\circ + 90^\circ) \rightarrow \frac{25}{\sqrt{2}} e^{j75^\circ}$$

Zespolone prawo Ohma dla rezystora

Jeśli przez rezystor płynie prąd chwilowy wywołuje on spadek napięcia (chwilowy) na tym elemencie.

$$i(t) = I_m \sin(\omega t) \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{i(t)} \boxed{R} \\ \xleftarrow{u_R(t)} \end{array} \quad \begin{array}{l} u_R(t) = Ri(t) = RI_m \sin(\omega t) \\ = U_{Rm} \sin(\omega t) \end{array}$$

Jeśli przez rezystor płynie prąd (zapis zespolony) to wywołuje on spadek napięcia (zapis zespolony) na rezystorze

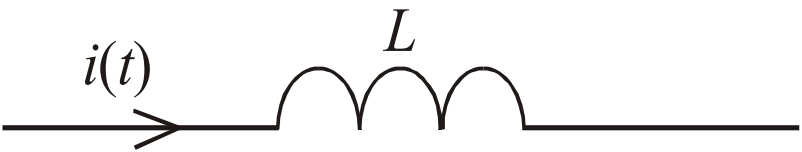
$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = |I| e^{j0} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{I} \boxed{R} \\ \xleftarrow{U_R} \end{array} \quad U_R = R \cdot I$$

Zapis na wartościach skutecznych

$$U_R = R |I| e^{j0} = |U_R| e^{j0} \quad \Rightarrow \quad |U_R| = R |I|$$

Zespolone prawo Ohma dla cewki

Jeśli przez cewkę płynie prąd zmienny wywołuje on spadek napięcia (chwilowy) na tym elemencie



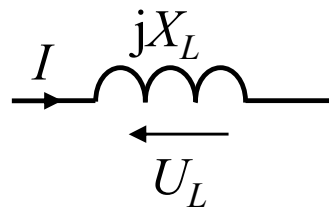
$$i(t) = I_m \sin(\omega t)$$

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d(I_m \sin(\omega t))}{dt}$$

$$= \omega L I_m \cos(\omega t) = \omega L I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$= U_{Lm} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Postać zespolona napięcia na cewce



$$U_L = j\omega L \cdot I$$

$$U_L = \omega L |I| e^{j\frac{\pi}{2}} = |U_L| e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Zapis na wartościach skutecznych

$$|U_L| = \omega L |I|$$

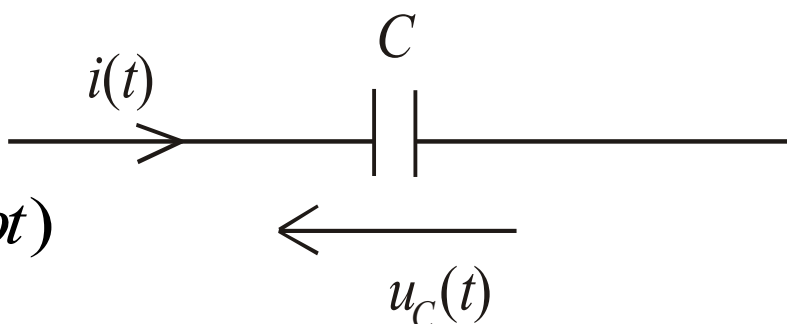
Impedancja i reaktancja cewki

$$Z_L = j\omega L$$

$$X_L = \omega L$$

Zespolone prawo Ohma dla kondensatora

Jeśli przez kondensator płynie prąd zmienny wywołuje on spadek napięcia (chwilowy) na tym elemencie



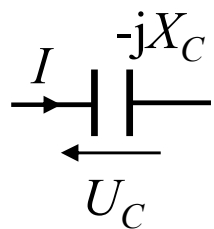
$$i(t) = I_m \sin(\omega t)$$

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$u_c(t) = \frac{1}{\omega C} (-I_m \cos \omega t)$$

$$= -\frac{1}{\omega C} I_m \sin(\omega t + \pi / 2)$$

Postać zespolona napięcia na kondensatorze



$$U_C = -j \frac{1}{\omega C} I$$

$$U_C = -\frac{1}{\omega C} I e^{j\pi/2} = -j \frac{1}{\omega C} I = -j X_C I$$

$$U_C = Z_C I$$

Zapis na wartościach skutecznych

$$|U_C| = \frac{1}{\omega C} |I|$$

Impedancja i reaktancja kondensatora

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

Zespolone Prawa Kirchhoffa

Prądowe prawo Kirchhoffa

Suma prądów chwilowych w węźle obwodu elektrycznego wynosi zero

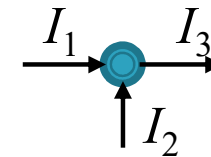
$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0$$

tzn, suma prądów wpływających do węzła równa sumie prądów wypływających z węzła.

To prawo zachodzi w dziedzinie zespolonej i ma postać

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$



Zespolone Prawa Kirchhoffa

Napięciowe prawo Kirchhoffa

Suma napięć w oczku wynosi zero

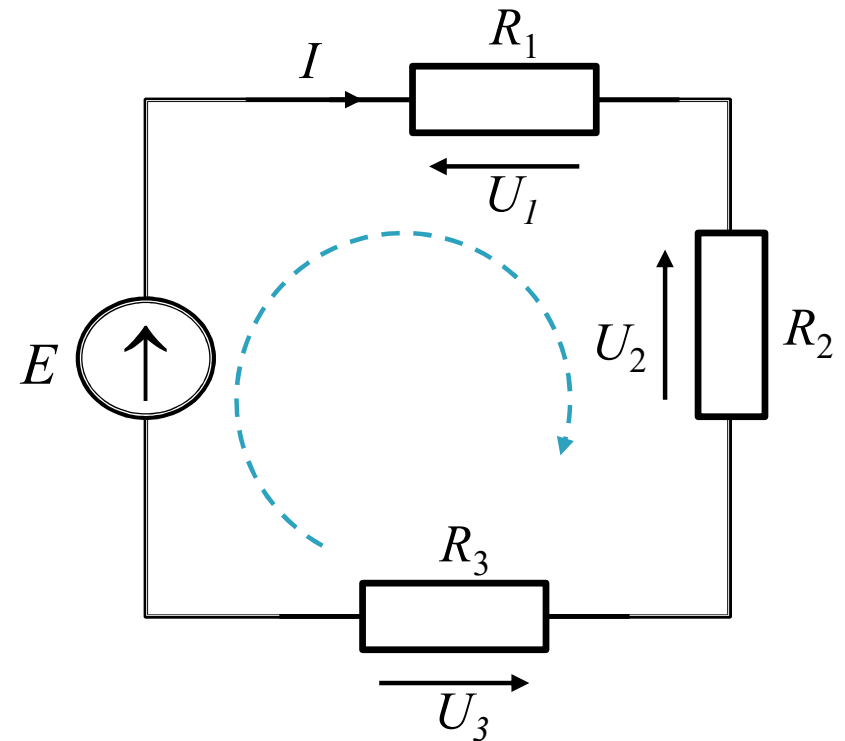
$$\sum_{k=1}^n u_k(t) = 0$$

Suma wszystkich napięć zespolonych wynosi zero (gdy brak źródeł)

$$\sum_{k=1}^n U_k = 0$$

Suma wszystkich źródeł napięcia i spadków napięć zespolonych wynosi zero

$$\sum_{k=1}^n (E_k, U_k) = 0$$



Równanie obwodu

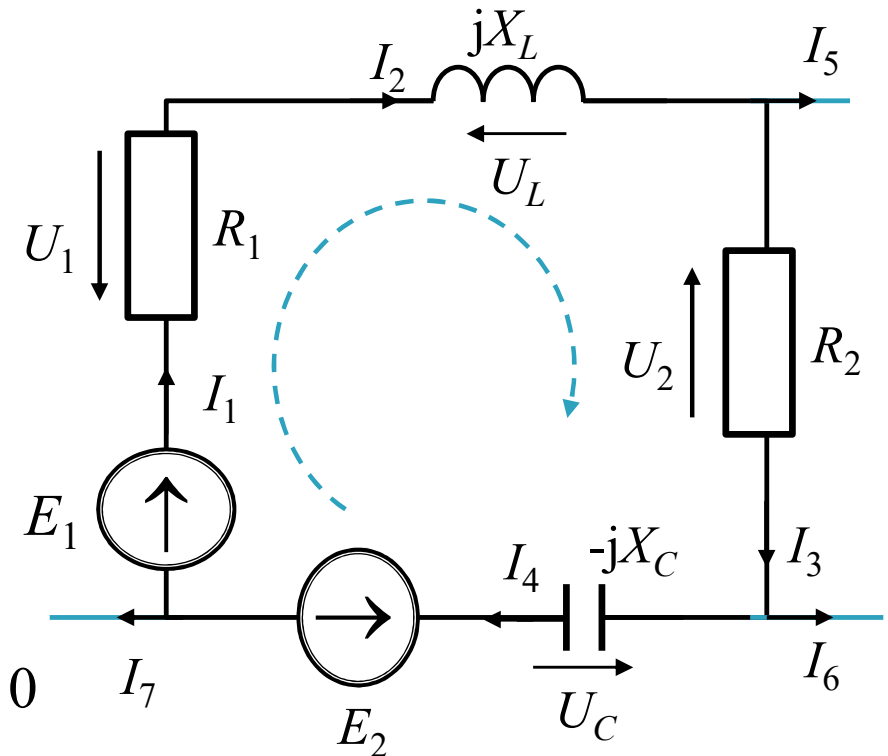
$$E - U_1 - U_2 - U_3 = 0$$

Zespolone Prawa Kirchhoffa

II prawo Kirchhoffa

Zapisując równanie wg drugiego prawa Kirchhoffa, korzystamy ze związków pomiędzy prądem zespolonym i napięciami na poszczególnych elementach.

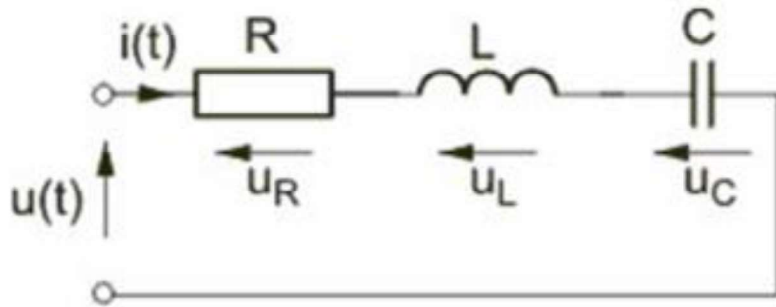
$$E_1 - R_1 I_1 - jX_L I_2 - R_2 I_3 - (-jX_C I_4) - E_2 = 0$$



Suma wszystkich źródeł napięcia i spadków napięć zespolonych wynosi zero

$$\sum_{k=1}^n (E_k, U_k) = 0$$

Metoda symboliczna liczb zespolonych analizy obwodów RLC



Połączenie szeregowe elementów RLC

$$\text{NPK: } u(t) = u_R + u_L + u_C$$

$$u_R = Ri_R \quad u_L = L \frac{di_L}{dt} \quad u_C = \frac{1}{C} \int i dt$$

$$i_R = i_L = i_C = i \quad \Leftrightarrow \quad i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

Równanie obwodu przy wymuszeniu sinusoidalnym

$$U_m \sin(\omega t + \psi) = Ri + \frac{1}{C} \int i dt + L \frac{di}{dt}$$

Metoda symboliczna liczb zespolonych analizy obwodów *RLC*

$$U_m \sin(\omega t + \psi) = Ri + \frac{1}{C} \int i dt + L \frac{di}{dt}$$

Pełne rozwiązanie tego równania sprowadza się do wyznaczenia dwu składowych prądu, stanowiących odpowiedź obwodu w stanie ustalonym i stanie przejściowym:

1. składowej ustalonej, której charakter zmian w czasie jest taki sam jak sygnału wymuszającego (przy sinusoidalnym wymuszeniu odpowiedź również sinusoidalna o tej samej częstotliwości);
2. składowej przejściowej, odpowiadającej różnicy między rozwiązaniem rzeczywistym równania różniczkowego a składową ustaloną.

Składowa przejściowa zanika zwykle szybko w czasie i pozostaje jedynie składowa ustalona. Stan po zaniknięciu składowej przejściowej nazywany jest stanem ustalonym obwodu.

Składową ustaloną prądu w obwodzie można otrzymać nie rozwiązując równania różniczkowego opisującego ten obwód, a korzystając jedynie z metody liczb zespolonych (metody symbolicznej).

Istotnym elementem tej metody jest zastąpienie przebiegów czasowych ich reprezentacją zespoloną.

Metoda symboliczna liczb zespolonych analizy obwodów *RLC*

Zastępując napięcie $u(t)$ i prąd $i(t)$ przez *wektory wirujące w czasie*,
odpowiednio $U(t)$ oraz $I(t)$

Reprezentacja symboliczna napięcia

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \Psi) \quad \rightarrow \quad U(t) = U_m e^{j\Psi} e^{j\omega t}$$

Reprezentacja symboliczna prądu

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \Psi) \quad \rightarrow \quad I(t) = I_m e^{j\Psi} e^{j\omega t}$$

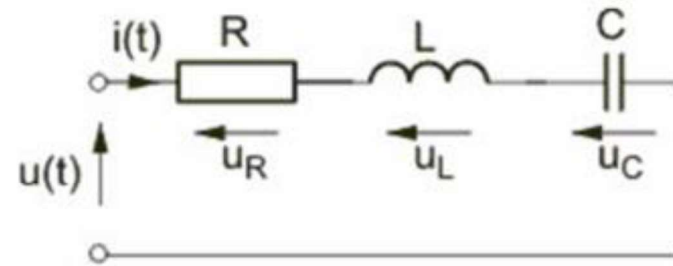
Równanie symboliczne obwodu

$$U(t) = RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int I(t) dt$$

Metoda symboliczna – RLC w stanie ustalonym

Równanie symboliczne obwodu

$$U(t) = RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int I(t) dt$$



Po wykonaniu operacji różniczkowania i całkowania powyższe równanie przyjmuje postać:

$$U_m e^{j\psi} e^{j\omega t} = RI_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t} + j\omega L I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t}$$

Po podzieleniu przez $e^{j\omega t}$ i przejściu do wartości skutecznych dzieląc przez $\sqrt{2}$ otrzymujemy:

$$\frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi} = R \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i} + j\omega L \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i} + \frac{1}{j\omega C} \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i}$$

Metoda symboliczna – RLC w stanie ustalonym

Oznaczając przez $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi}$ wartość skuteczną zespoloną napięcia

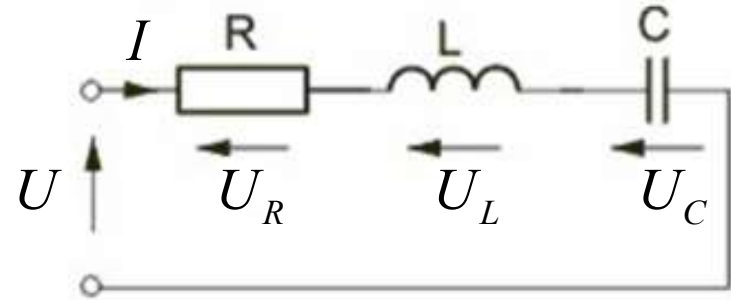
a przez $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i}$ wartość skuteczną zespoloną prądu

Otrzymujemy równanie dla wartości skutecznych zespolonych:

$$U = RI + j\omega LI + \frac{1}{j\omega C} I$$

Metoda symboliczna – RLC w stanie ustalonym

$$U = RI + j\omega LI + \frac{1}{j\omega C} I$$



Skuteczne zespolone napięcie na:

$$U_R = RI \quad \text{rezystorze}$$

$$U_L = j\omega LI \quad \text{cewce}$$

$$U_C = \frac{1}{j\omega C} I \quad \text{kondensatorze}$$

Metoda symboliczna – RLC w stanie ustalonym

Impedancje zespolone elementów obwodu:

Rezystor

$$U_R = RI \rightarrow Z_R = R$$

Cewka

$$U_L = j\omega LI \rightarrow Z_L = j\omega L$$

Kondensator

$$U_C = \frac{1}{j\omega C} I \rightarrow Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C}$$

- Reaktancja cewki

$$X_L = \omega L$$

- Reaktancja kondensatora

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

- Impedancja cewki

$$Z_L = jX_L$$

- Impedancja kondensatora

$$Z_C = -jX_C$$

Metoda symboliczna – RLC w stanie ustalonym

- Równanie zespolone obwodu szeregowego RLC

$$U = RI + Z_L I + Z_C I = ZI$$

- Rozwiązanie zespolone obwodu szeregowego RLC

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{|U|e^{j\psi}}{R + j(\omega L - 1/(\omega C))} = \frac{|U|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}} e^{j\left(\psi - \arctg \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}\right)}$$

- Moduł prądu

$$|I| = \frac{|U|}{|Z|} = \frac{|U|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}$$

- Faza prądu

$$\psi_i = \psi - \arctg \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}$$

Metoda symboliczna – RLC w stanie ustalonym

ψ – faza początkowa wektora napięcia wymuszającego

ψ_i – faza początkowa wektora prądu

Różnica faz nazywana jest przesunięciem fazowym prądu względem napięcia i oznaczana literą φ

$$\varphi = \psi - \psi_i = \arctg \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right)$$

Kąt przesunięcia fazowego φ odgrywa ogromną rolę w elektrotechnice, np. w zagadnieniach mocy.

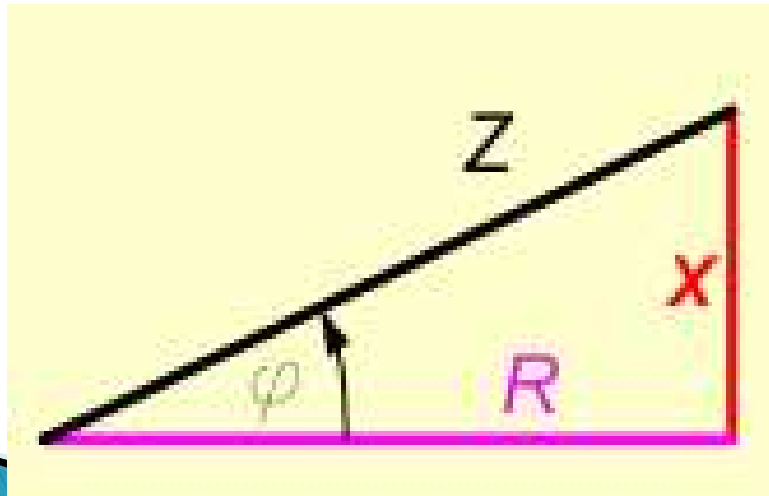
Kąt ten jest uważany za **dodatni** dla obwodów o charakterze **indukcyjnym**
za **ujemny** dla obwodów o charakterze **pojemnościowym**.

Metoda symboliczna – RLC w stanie ustalonym

Kąt przesunięcia fazowego φ jest fazą impedancji Z

$$\varphi = \psi - \psi_i = \arctg\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) = \arctg\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = \arctg\left(\frac{X}{R}\right)$$

Trójkąt impedancji, Z – impedancja, R - rezystancja, X - reaktancja



$$Z = R \pm jX$$



Zespolone Prawa Kirchhoffa – Przykład 1

Oblicz prąd w obwodzie:

$$e(t) = 230\sqrt{2}\sin(\omega t + 30^\circ) \text{ V}$$

$$R = 400 \, \Omega$$

$$C = 20 \, \mu\text{F}$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$E = 230 e^{j30^\circ}$$

$$R = 400 \, \Omega$$

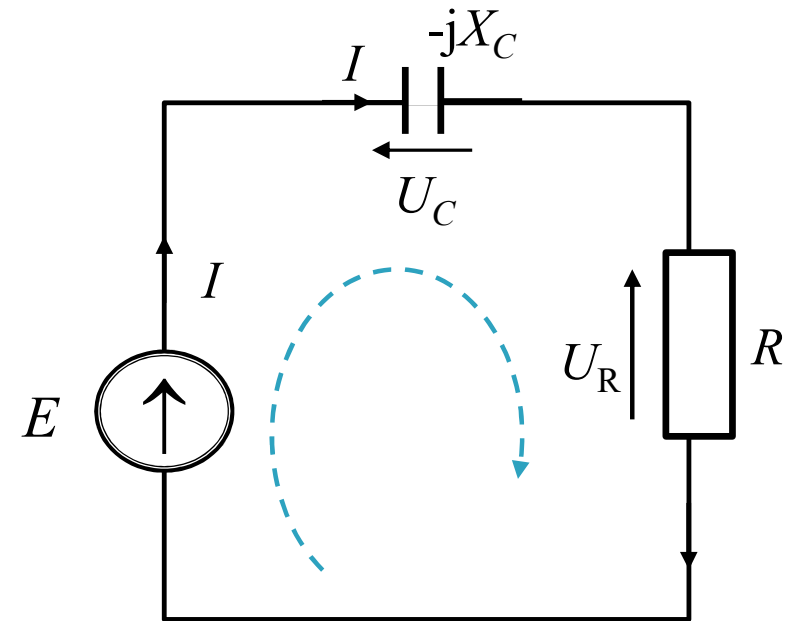
$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ rad/s}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 159 \, \Omega$$

Układamy równanie dla obwodu

$$E - (-jX_C I) - RI = 0$$

$$E = (R - jX_C) I$$



Wyznaczamy prąd:

$$I = \frac{E}{R - jX_C} = \frac{230e^{j30}}{400 - j159}$$

$$400 - j159 = 430e^{-j22}$$

$$I = \frac{E}{R - jX_C} = \frac{230e^{j30}}{430e^{-j22}} = 0.53e^{j52^\circ}$$

Prąd: $i(t) = 0.53\sqrt{2}\sin(\omega t + 52^\circ) \text{ A}$

Zespolone Prawa Kirchhoffa – Przykład 2

Oblicz prąd i napięcia w obwodzie:

$$e(t) = 20\sqrt{2}\sin(\omega t + 23^\circ) \text{ V}$$

$$R = 30 \Omega$$

$$C = 1 \text{ mF}$$

$$L = 0.5 \text{ H}$$

$$\omega = 100 \text{ rad/s} \quad E = 20e^{j23^\circ} \text{ V}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{100 \cdot 10^{-3}} = 10 \Omega$$

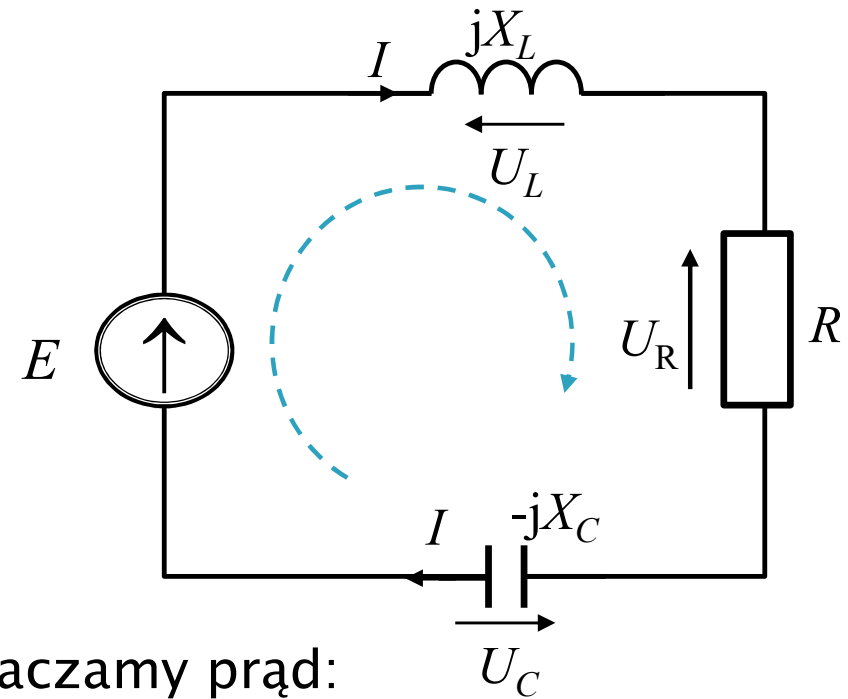
$$X_L = \omega L = 0.5 \cdot 100 = 50 \Omega$$

Układamy równanie dla obwodu

$$E - jX_L I - RI - (-jX_C I) = 0$$

$$E = RI + jX_L I - jX_C I$$

$$E = I (R + j(X_L - X_C))$$



Wyznaczamy prąd:

$$I = \frac{E}{R + j(X_L - X_C)} = \frac{20e^{j23^\circ}}{30 + j(50 - 10)}$$

$$I = \frac{20e^{j23^\circ}}{50e^{j53^\circ}} = 0.4e^{-j30^\circ} \quad 30 + j40 = 50e^{j53^\circ}$$

Prąd: $i(t) = 0.40\sqrt{2}\sin(\omega t - 30^\circ) \text{ A}$

$$U_R = RI = 30 \cdot 0.4e^{-j30^\circ} = 12e^{-j30^\circ}$$

$$U_L = jX_L I = 50e^{j90^\circ} \cdot 0.4e^{-j30^\circ} = 20e^{j60^\circ}$$

$$U_C = -jX_C I = 10e^{-j90^\circ} \cdot 0.4e^{-j30^\circ} = 4e^{-j120^\circ}$$

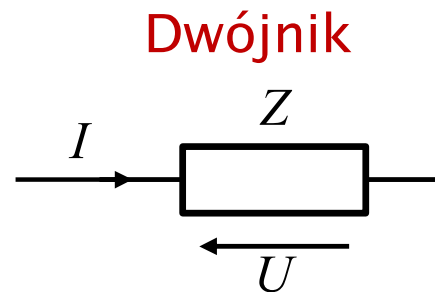
Napięcie: $u_C(t) = 4\sqrt{2}\sin(\omega t - 120^\circ) \text{ V}$

Impedancja zespolona

Zespolone prawo Ohma

Impedancją (zespoloną) dwójnika pasywnego nazywamy iloraz napięcia na jego zaciskach i przepływającego przez niego prądu:

$$Z = \frac{U}{I}$$



$$U = Z \cdot I$$

$$I = \frac{U}{Z}$$

Jednostką impedancji zespolonej jest om [Ω]

Impedancja jest liczbą zespoloną charakteryzującą właściwości dwójnika dla prądu sinusoidalnego.

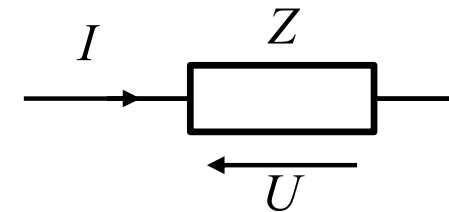
Impedancja zespolona – moduł i kąt fazowy

Dla napięcia i prąd zespolonego

$$U = |U| e^{j\psi} \quad I = |I| e^{j\phi}$$

Impedancja zespolona

$$Z = \frac{|U| e^{j\psi}}{|I| e^{j\phi}} = \frac{|U|}{|I|} e^{j(\psi-\phi)} = |Z| e^{j\varphi}$$



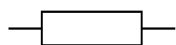
➤ Modułem impedancji $|Z|$ jest ilorazem modułu napięcia (wart. skutecznej) i modułu prądu (wart. skutecznej) dwójnika,

➤ faza impedancji $\varphi = \arg(Z)$ jest różnicą między kątami fazowymi napięcia i prądu, jest kątem fazowym dwójnika

$$|Z| = \frac{|U|}{|I|}$$

$$\varphi = \psi - \phi$$

Elementy RLC – impedancja



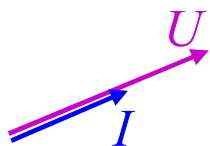
R

R

$$U = RI$$

$$Z = R$$

$$Y = \frac{1}{R} = G$$



L

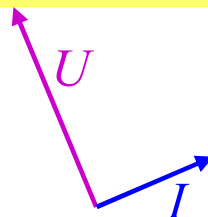
jX_L

$$X_L = \omega L$$

$$U = jX_L I$$

$$Z = jX_L$$

$$Y = \frac{1}{jX_L} = -jB_L$$



C

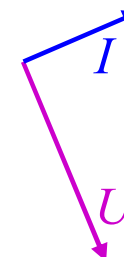
$-jX_C$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$U = -jX_C I$$

$$Z = -jX_C$$

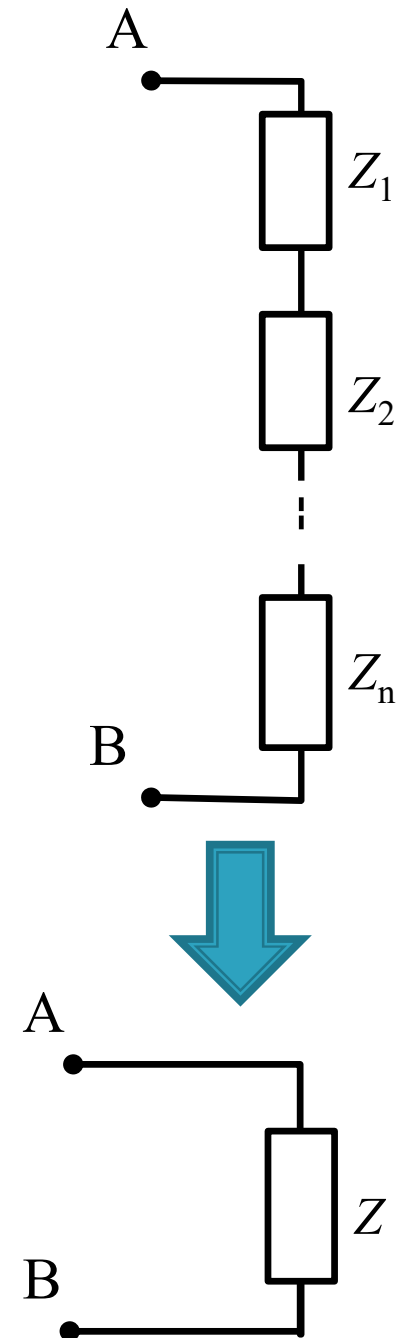
$$Y = \frac{1}{-jX_C} = jB_C$$



Połączenie szeregowe

Połączeniem szeregowym dwójników nazywamy takie połączenie, w którym przez wszystkie płynie jeden i ten sam prąd.

Celem jest wyznaczenie impedancji zastępczej, tj. zastąpienie grupy n szeregowo połączonych dwójników o impedancjach $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ za pomocą jednej tylko impedancji Z .



Połączenie szeregowe

Impedancja zastępcza

Bilans napięć

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

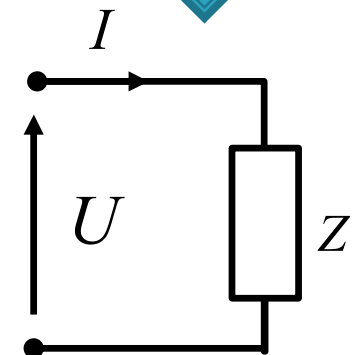
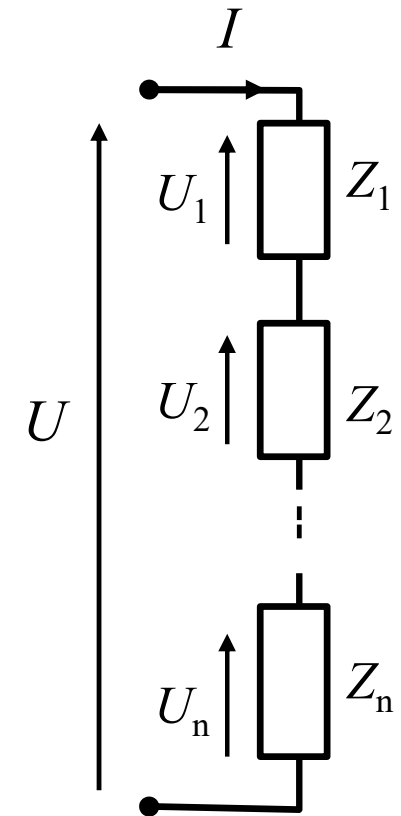
Z prawa Ohma dla i -tej impedancji mamy
 $U_i = Z_i I$; można zapisać bilans jako

$$U = Z_1 I + Z_2 I + \dots + Z_n I$$

Impedancja z (definicji) prawa Ohma wynosi U/I , czyli

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \sum_{i=1}^n Z_i$$

Impedancja zastępcza połączenia szeregowego jest równa sumie impedancji



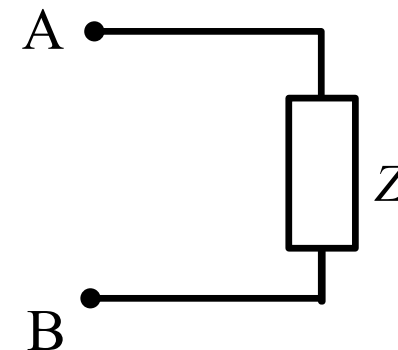
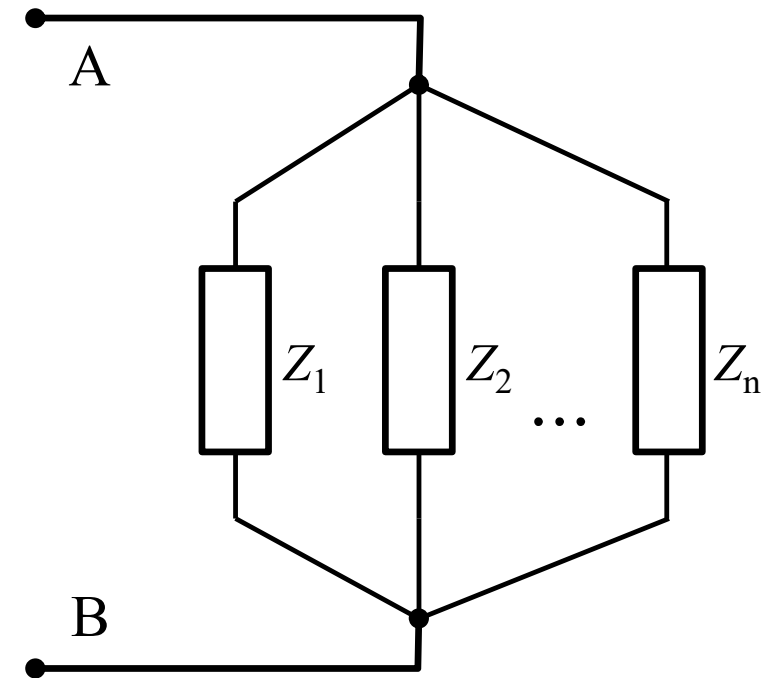
Połączenie równoległe

Połączeniem równoległym dwójników nazywamy takie ich połączenie, w którym na zaciskach wszystkich dwójników występuje jedno i to samo napięcie.

Do zaznaczenia, że dwójniki o impedancjach $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ połączone są równoległe stosuje się zapis

$$Z_1 \parallel Z_2 \parallel \dots \parallel Z_n$$

Wyznaczenie impedancji zastępczej, tj. polega na zastąpieniu grupy n równoległe połączonych dwójników o impedancjach $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ za pomocą jednego tylko impedancji Z



Połączenie równoległe

Impedancja zastępcza

Bilans prądów z pierwszego prawa Kirchhoffa

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

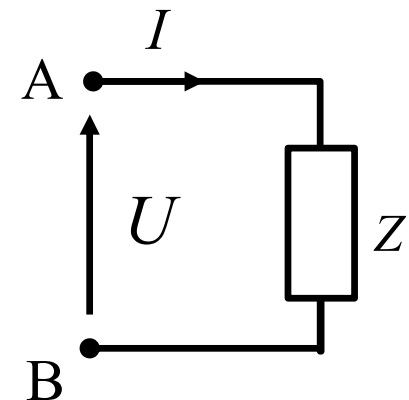
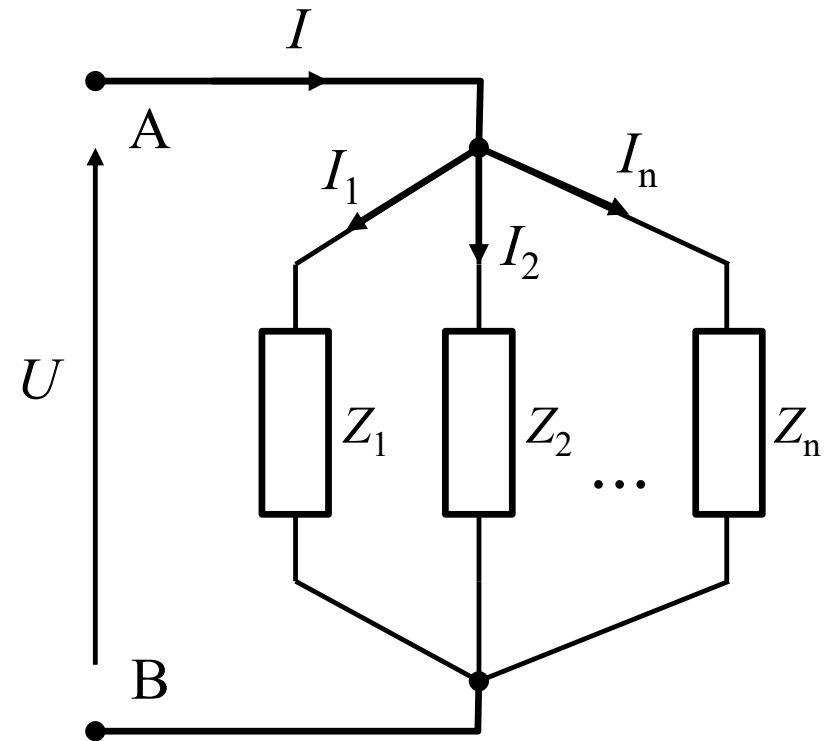
Z prawa Ohma dla i -tej impedancji mamy $I = U_i / Z_i$ można zapisać bilans jako

$$I = \frac{U}{Z_1} + \frac{U}{Z_2} + \dots + \frac{U}{Z_n}$$

Impedancja z (definicji) prawa Ohma wynosi U/I , czyli

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Z_i}$$

Odwrotność impedancji zastępczej połączenia równoległego dwójników jest równa sumie odwrotności ich impedancji



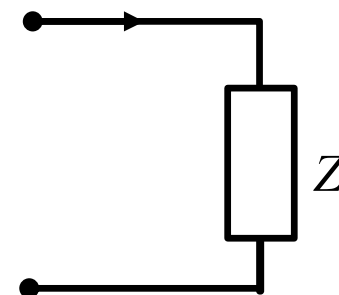
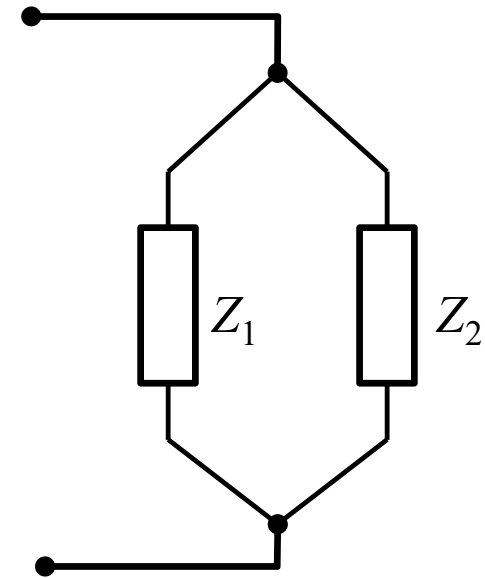
Połączenie równoległe dwóch impedancji

W przypadku połączenia równoległego
dwóch impedancji

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

Po przekształceniu
Impedancja zastępcza ma postać

$$Z = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$$



Redukcja impedancji

Impedancję zastępczą dowolnego połączenia dwójników wyznacza się za pomocą zależności poznanych powyżej dla ułatwienia wyznaczenia napięcia lub prądu

Dla połączenia szeregowego sumujemy impedancje.

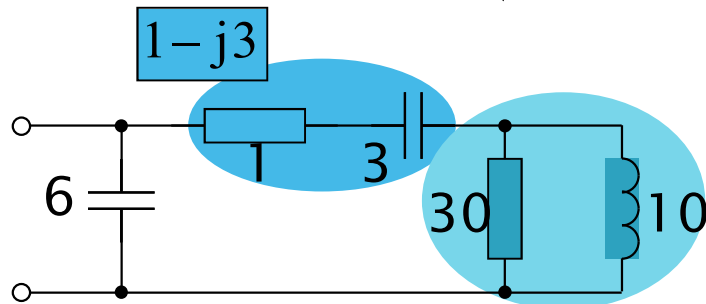
Dla połączenia równoległego sumujemy odwrotność impedancji .

Odwrotność impedancji to admitancja Y

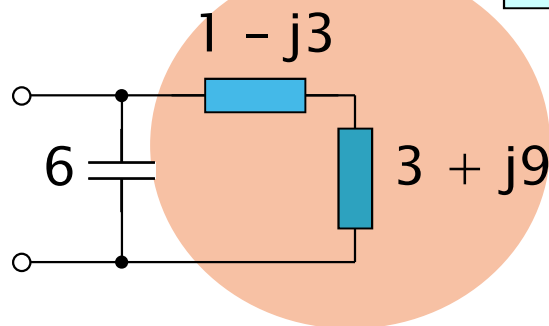
$$Y = \frac{1}{Z}$$

Przykład

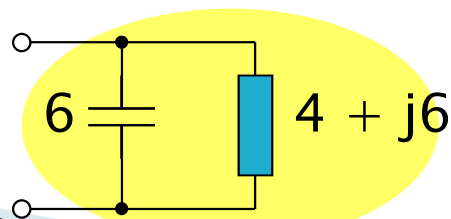
(Wartości rezystancji i reaktancji w omach)



$$30 \parallel j10 = \frac{30 \cdot j10}{30 + j10} = 30 \frac{j}{3 + j} = 30 \frac{j(3 - j)}{3^2 + 1^2} = 30 \frac{j3 + 1}{10} = 3 + j9$$

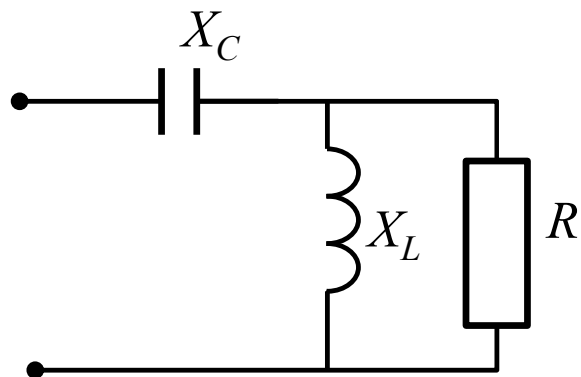


$$(3 + j9) + (1 - j3) = 4 + j6$$



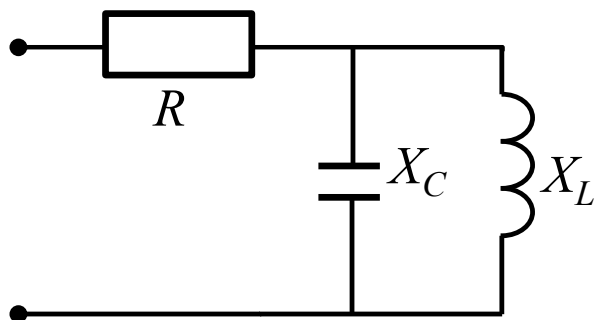
$$(4 + j6) \parallel (-j6) = \frac{(4 + j6) \cdot (-j6)}{(4 + j6) + (-j6)} = \frac{36 - j24}{4} = \boxed{9 - j6 \Omega}$$

Przykłady



Wyznaczyć impedancję zastępczą

$$Z = -jX_C + R \parallel jX_L = -jX_C + \left(\frac{jRX_L}{R + jX_L} \right) = -jX_C + \frac{RX_L^2 + jR^2X_L}{R^2 + X_L^2}$$



$$Z = R + (-jX_C) \parallel jX_L = R + j \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right) = R + j \frac{X_L - X_C}{X_C \cdot X_L}$$

Moc chwilowa

Definicja mocy chwilowej

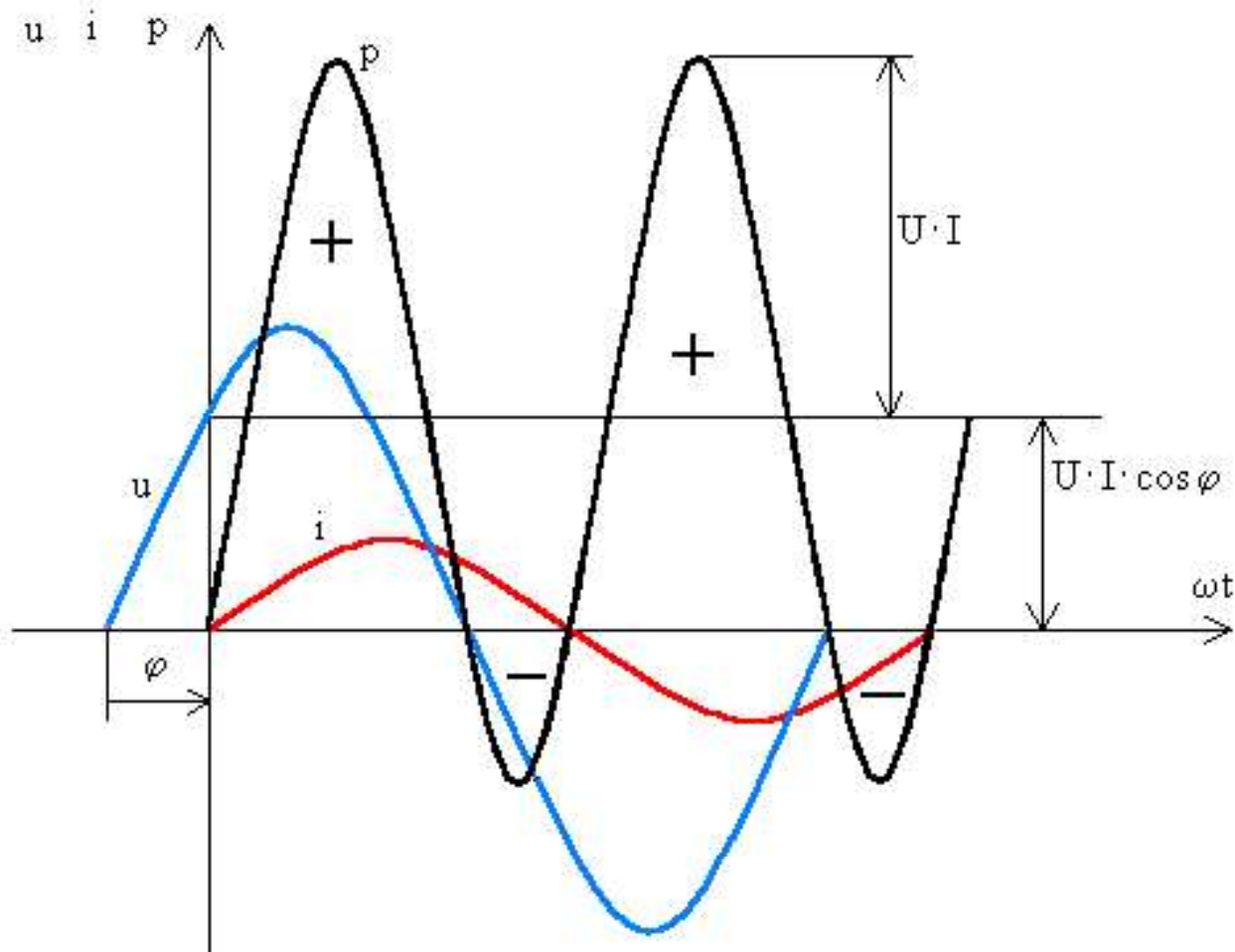
$$p(t) = u(t)i(t)$$

Przy przebiegach sinusoidalnych napięcia $u(t) = U_m \sin(\omega t)$ i prądu $i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi)$ otrzymuje się

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) = U_m I_m \sin(\omega t) \sin(\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] = \\ &= |U||I| [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] \end{aligned}$$

Moc chwilowa

Widać, że moc chwilowa jest sinusoidą o pulsacji dwukrotnie większej od pulsacji napięcia i prądu. Przebieg mocy chwilowej jest przesunięty o stałą wartość $U \cdot I \cdot \cos \varphi$ do góry (jest to składowa stała) i posiada amplitudę równą $U I$



Moc czynna

Moc czynna jest zdefiniowana jako wartość średnia za okres z mocy chwilowej

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt$$

Przy sinusoidalnych przebiegach prądu i napięcia moc czynna wyraża się wzorem

$$P = |U||I|\cos\varphi$$

$\cos\varphi$ - współczynnik mocy

Jednostka mocy: wat [W]

Moc czynna

- Rezystor ($\varphi=0$)

$$P = |U||I| \cos \varphi = R|I|^2 = G|U|^2$$

- Cewka i kondensator

$$\varphi = \pm\pi/2 \rightarrow P_L = P_C = 0$$

Na elementach reaktancyjnych nie wydziela się moc czynna.

Moc czynna

- Moc bierna definiowana wzorem

$$Q = |U||I| \sin \varphi$$

Jednostka mocy biernej: war [var]

- Rezystor

$$\varphi = 0 \rightarrow Q_R = 0$$

- Cewka

$$Q_L = |U||I| \sin \varphi = X_L |I|^2 = \frac{1}{X_L} |U|^2$$

- Kondensator

$$Q_C = |U||I| \sin \varphi = -X_C |I|^2 = -\frac{1}{X_C} |U|^2$$

Moc Pozorna

Moc pozorna $|S|$ jest iloczynem wartości skutecznej napięcia i prądu

$$|S| = |U| \cdot |I| \quad [\text{VA}]$$

Wyznaczenie związku między mocą czynną, bierną i pozorną:

$$P^2 + Q^2 = (|U| \cdot |I| \cdot \cos \varphi)^2 + (|U| \cdot |I| \cdot \sin \varphi)^2 = (|U| \cdot |I|)^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)$$

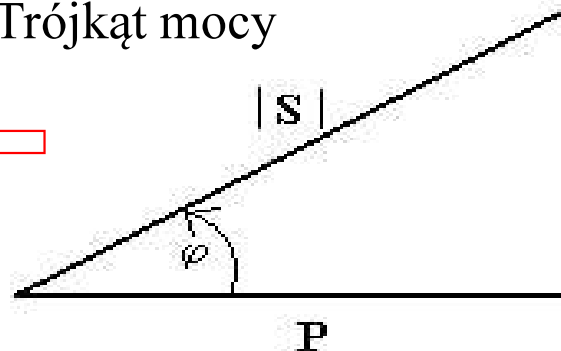
$$P^2 + Q^2 = |S|^2$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P}$$

$$P = |S| \cdot \cos \varphi$$

$$Q = |S| \cdot \sin \varphi$$

Trójkąt mocy



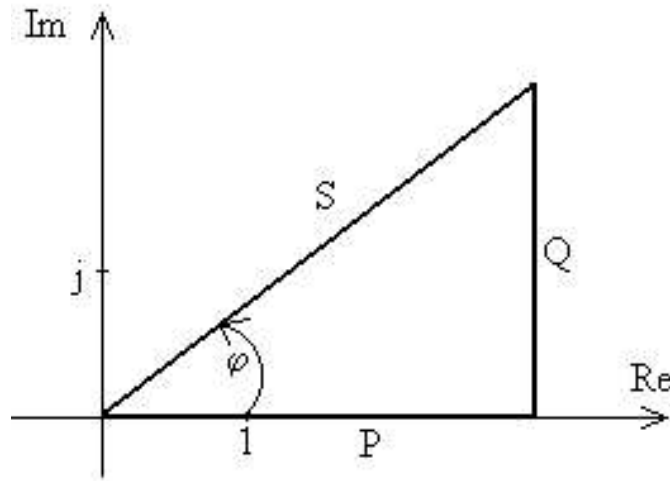
$$|S| = |U| \cdot |I|$$

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

$$P^2 + Q^2 = |S|^2$$

Zespolona Moc Pozorna

Trójkąt mocy na płaszczyźnie zespolonej



$$S = P + jQ = |S|e^{j\varphi}$$

$$S = UI^*$$

$$S = P + jQ = |U||I|\cos\varphi + j|U||I|\sin\varphi = |U||I|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

$$S = |U| \cdot |I| \cdot e^{j\varphi} = |U| \cdot |I| \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = |U|e^{j\varphi_u} \cdot |I|e^{-j\varphi_i}$$

$$|U|e^{j\varphi_u} = U \quad |I|e^{-j\varphi_i} = I^*$$

Moc pozorna zespolona jest iloczynem wartości zespolonej napięcia oraz wartości zespolonej sprzężonej prądu.

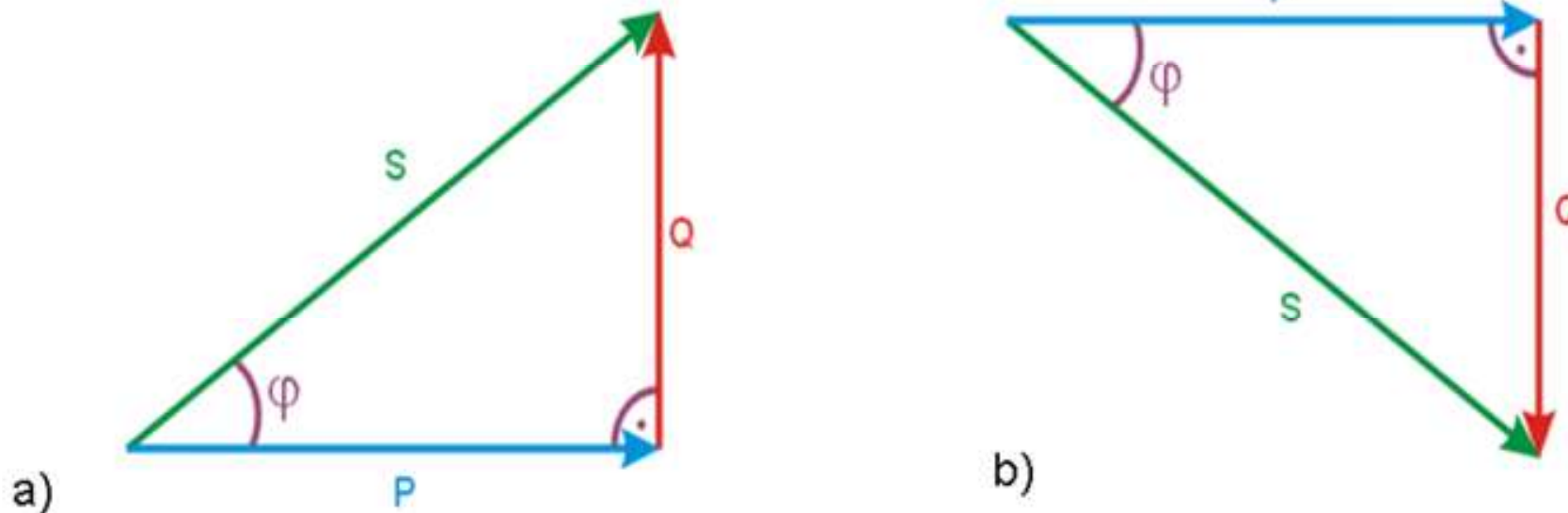
Prąd sprzężony to prąd z przeciwnym znakiem części urojonej.

Zespółona Moc Pozorna

Definicja mocy pozornej zespolonej

$$S = UI^* = P + jQ$$

Jednostka mocy: [VA]



Wykres wektorowy mocy dla obwodu a) o charakterze indukcyjnym,
b) o charakterze pojemnościowym

Moc czynna i bierna

Dla napięcia i prądu zespolonego

$$U = |U| e^{j\psi} \quad I = |I| e^{j\phi}$$

Moc pozorna

$$S = |U| e^{j\psi} |I| e^{-j\phi} = |U| \cdot |I| e^{j(\psi-\phi)} = |U| |I| e^{j\varphi}$$

$$S = |U| |I| \cos \varphi + j |U| |I| \sin \varphi$$

$$S = P + jQ$$

➤ gdzie φ jest fazą odbiornika

P – moc czynna $P = |U| |I| \cos \varphi$

Q – moc bierna $Q = |U| |I| \sin \varphi$

Moc pozorna jest zespolona i składa się z mocy czynnej i biernej

Związek mocy z impedancją

Dla napięcia i prądu

$$U = Z \cdot I$$

To moc pozorna można wyliczyć jako

$$S = UI^* = (ZI)I^* = Z |I|^2$$

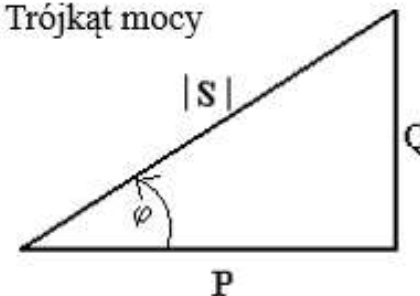
Moc pozorna

$$S = Z |I|^2$$

Współczynnik mocy

$$\cos \varphi = \frac{P}{|S|}$$

Trójkąt mocy



Moc – podsumowanie

$$S = UI^* = Z |I|^2 = P + jQ$$

$$P = |U| |I| \cos \varphi = R |I|^2 = \operatorname{Re} S$$

$$Q = |U| |I| \sin \varphi = X |I|^2 = \operatorname{Im} S$$

$$|S| = |U| |I| = |Z| |I|^2 = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Zespolona moc pozorna jest jedną wielkością, która łączy w sobie trzy wielkości: moc czynną, moc bierną i moc pozorną.

Zespolona moc pozorna jest wielkością addytywną – można sumować zespolone moce pozorne różnych elementów, gdyż wykonujemy wtedy w istocie sumowanie mocy czynnych i biernych.

Bilans mocy

Bilans mocy polega na równości między mocą oddaną przez źródło a mocą pobraną przez odbiorniki.

$$\sum_{odb} S_{odb} = \sum_{\dot{z}r} S_{\dot{z}r}$$

Moc odbiornika obliczamy

$$S_{odb} = Z |I|^2$$

Moc źródła obliczamy

$$S_{\dot{z}r} = UI^*$$

Obliczając moc źródeł uwzględniamy kierunek źródła i bierzemy plus jeżeli kierunek napięcia i prądu są zgodne i znak minus jeżeli znaki napięcia i prądu przeciwne.

Przykład 3

Oblicz prądy w obwodzie:

$$e(t) = 110\sqrt{2}\sin(\omega t - 15^\circ) \text{ V}$$

$$R_1 = 400 \, \Omega \quad R_2 = 800 \, \Omega$$

$$C = 4 \, \mu\text{F} \quad f = 50 \text{ Hz}$$

$$E = 110 e^{-j15^\circ} \text{ V}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ rad/s}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 4 \cdot 10^{-6}} = 800 \, \Omega$$

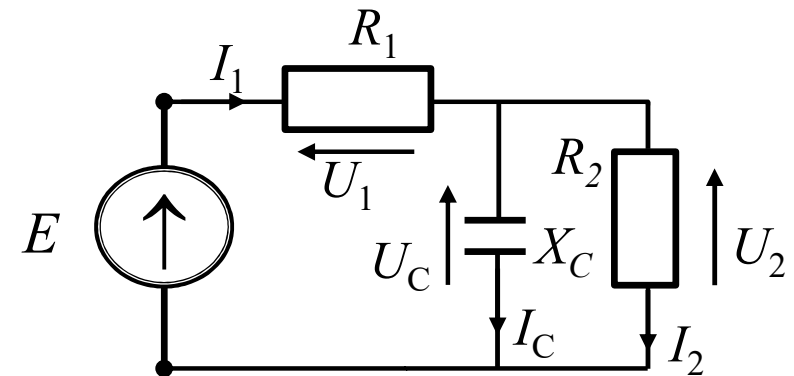
Impedancja gałęzi R_2 i X_C równoległa

$$Z_2 = R_2 \parallel (-jX_C) = \left(\frac{R_2(-jX_C)}{R_2 - jX_C} \right) = \left(\frac{600(-j800)}{600 - j800} \right)$$

$$Z_2 = 384 - j288$$

Impedancja obwodu

$$Z = R_1 + Z_2 = 400 - j288$$



Układamy równanie napięć dla obwodu

$$E = ZI_1 = (R_1 + Z_2) I_1$$

Wyznaczamy prąd I_1 :

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + Z_2} = \frac{110e^{-j15}}{400 - j288} = \frac{110e^{-j15}}{493e^{-j36}}$$

$$I_1 = \frac{110e^{-j15}}{493e^{-j36}} = 0.22e^{j21}$$

Prąd: $i_1(t) = 0.22\sqrt{2}\sin(\omega t + 21^\circ) \text{ A}$

Przykład 3 cd..

Teraz można wyznaczyć napięcie na kondensatorze i rezystancji R_2 , które są identyczne

$$U_2 = U_C = Z_2 I_1$$

$$U_2 = U_C = 480e^{-j36} \cdot 0.22e^{j21} = 106e^{-j15}$$

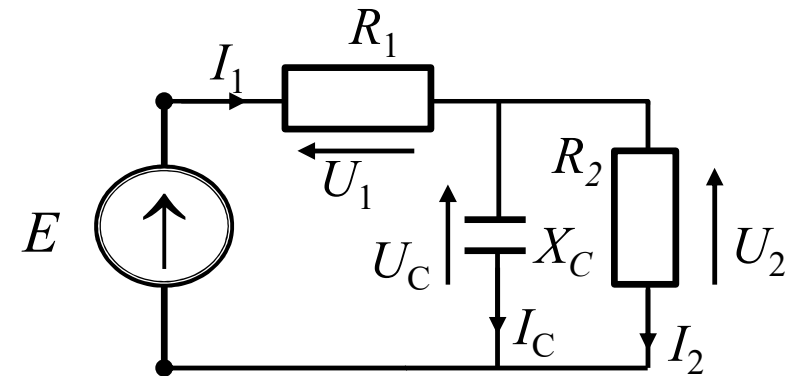
Wyznaczamy prądy: I_2 oraz I_C

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{106e^{-j15}}{800e^{j0}} = 0.1325e^{-j15} = 0.128 - j0.036$$

$$I_C = \frac{U_C}{-jX_C} = \frac{106e^{-j15}}{800e^{-j90}} = 0.1325e^{j75} = 0.037 + j0.131$$

Bilans prądów $I_1 = I_2 + I_C$

$$I_1 = 0.128 - j0.036 + 0.037 + j0.131 = 0.165 + j0.095$$



$$\text{Prąd: } i_1(t) = 0.22\sqrt{2}\sin(\omega t + 21^\circ) \text{ A}$$

$$\text{Prąd: } i_2(t) = 0.177\sqrt{2}\sin(\omega t - 15^\circ) \text{ A}$$

$$\text{Prąd: } i_C(t) = 0.135\sqrt{2}\sin(\omega t + 75^\circ) \text{ A}$$

$$I_1 = 0.22e^{j21} = 0.205 + j0.080$$

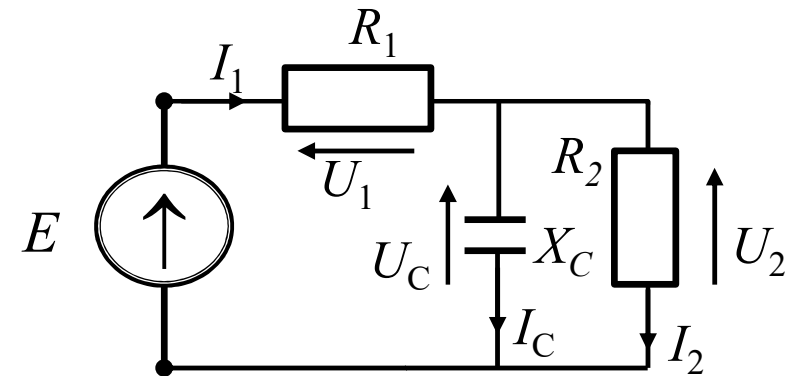
Przykład 3 cd.. – Bilans mocy

Wyznacz moc pozorną, czynną oraz bierną.

Moc pozorną S $\varphi = -36^\circ$

$$S = E I_1^* = (U_1 + U_2) I_1^*$$

$$S = 110e^{-j15} \cdot 0.22e^{-j21} = 24.2e^{-j36} \text{ VA}$$



Moc czynną P

$$P = |U| |I_1| \cos \varphi = 110 \cdot 0.22 \cos(-36^\circ) = 19.6 \text{ W}$$

$$P = R_1 |I_1|^2 + R_2 |I_2|^2 = 16 \cdot 0.22^2 + 600 \cdot 0.177^2 = 0.77 + 18.8 = 19.6 \text{ W}$$

Moc bierna Q

$$Q = |U| |I_1| \sin \varphi = 110 \cdot 0.22 \sin(-36^\circ) = -14.2 \text{ Var}$$

$$\text{czyli } S = P + jQ = 19.6 - j14.2 = 24.2 e^{-j36} \text{ VA}$$

Przykład 4

Oblicz prąd w obwodzie:

$$e(t) = 230\sqrt{2}\sin(100t + 20^\circ)$$

$$R_1 = 20 \, \Omega \quad L_1 = 0.2 \, \text{H}$$

$$R_2 = 40 \, \Omega \quad L_2 = 0.6 \, \text{H}$$

$$E = 230 e^{j20^\circ} \quad \omega = 100 \, \text{rad/s}$$

$$X_{L1} = \omega L_1 = 100 \cdot 0.2 = 20 \, \Omega$$

$$X_{L2} = \omega L_2 = 100 \cdot 0.6 = 60 \, \Omega$$

Impedancja obwodu (szeregowo)

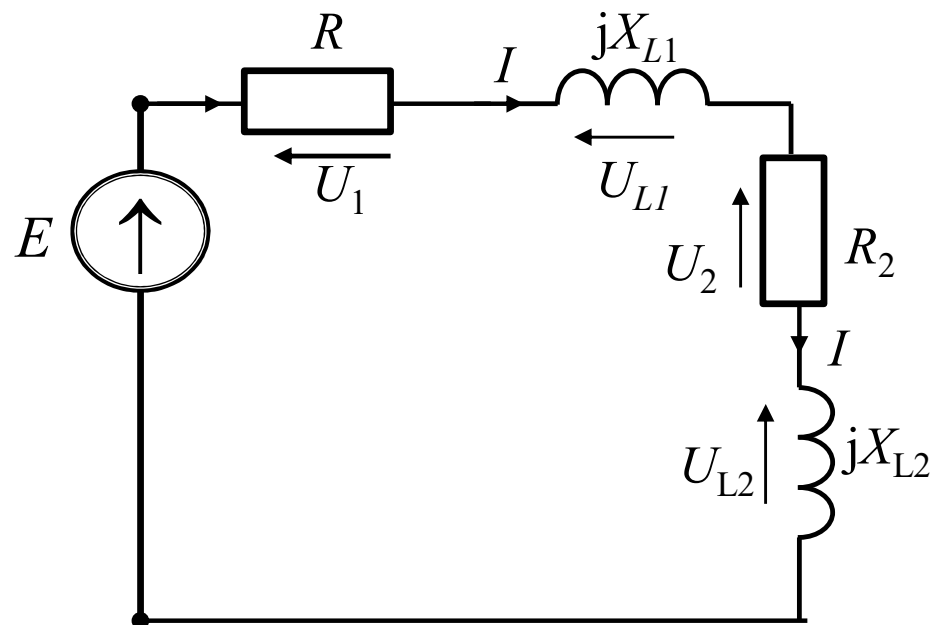
$$Z = R_1 + R_2 + jX_{L1} + jX_{L2}$$

$$Z = 20 + 40 + j(20 + 60) = 60 + j80$$

$$Z = 60 + j80 = 100e^{j53^\circ}$$

Układamy równanie dla obwodu

$$E = ZI = (R_1 + R_2 + jX_{L1} + jX_{L2}) I$$



Wyznaczamy prąd I :

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{230e^{j20}}{100e^{j53}} = 2.30e^{-j33}$$

Prąd: $i(t) = 2.3\sqrt{2}\sin(100t - 33^\circ) \, \text{A}$

Wyznaczamy napięcie U_1 i U_{L1}

$$U_1 = R_1 I = 20 \cdot 2.30e^{-j33} = 46e^{-j33}$$

$$U_{L1} = jX_{L1} I = 20e^{j90} \cdot 2.30e^{-j33} = 46e^{j57}$$

Napięcie na R_1 $u_1(t) = 46\sqrt{2}\sin(100t - 33^\circ) \, \text{V}$

Napięcie na L_1 $u_{L1}(t) = 46\sqrt{2}\sin(100t + 57^\circ) \, \text{V}$

Przykład 4 – Bilans mocy

Wyznacz moc pozorną, czynną oraz bierną.

Moc pozorna S $\varphi = 53^\circ$

$$S = U I_1^* \quad \text{gdzie } E = U = U_1 + U_2 + U_{L1} + U_{L2}$$

$$S = 230e^{j20} \cdot 2.3e^{j33} = 529e^{j53} \text{ VA}$$

Moc czynna P

$$P = |U| |I| \cos \varphi = 230 \cdot 2.3 \cos(53^\circ) = 318 \text{ W}$$

$$P = (R_1 + R_2) |I|^2 = (20 + 40) \cdot (2.3)^2 = 318 \text{ W}$$

Moc bierna Q

$$Q = |U| |I| \sin \varphi = 230 \cdot 2.3 \sin(53^\circ) = 422 \text{ War}$$

$$\text{czyli } S = P + jQ = 318 + j422 = 529 e^{j53}$$