

Laboratorium Sterowania Robotów

Laboratorium nr 13

Temat: Liniowo kwadratowe sterowanie optymalne
z wyliczanym momentem
(robot manipulacyjny o dwóch stopniach swobody)

Celem tematyki laboratorium jest testowanie metody **sterowania optymalnego robotem manipulacyjnym**.

Rozważania związane ze sterowaniem optymalnym można interpretować jako pomost pomiędzy klasycznymi technikami sterowania a nowoczesnym ujęciem tych problemów.

A. Synteza sterowania optymalnego pętli zewnętrznej PD + WM dla manipulatora o 2 stopniach swobody.

Zapiszmy dynamiczne równania ruchu manipulatora w formie wektorowej

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (1)$$

gdzie $\boldsymbol{\tau}$ to wektor sterowań, $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q})$. Dla uproszczenia pominięto w modelu wpływ zakłóceń. Przyjmijmy, że znamy zadaną trajektorię ruchu $\mathbf{q}_d$ we współrzędnych konfiguracyjnych robota. Wybierzmy sterowanie z uwzględnieniem kompensacji nieliniowości obiektu (linearyzujemy obiekt sterowania) w postaci

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{u}) + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (2)$$

Niech będzie dany również wskaźnik jakości o postaci

$$\mathbf{J} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t))dt \quad (3)$$

przy czym $\mathbf{Q}$ — macierzą **symetryczną dodatnio określoną** o wymiarach 4x4, $\mathbf{R}$ — macierzą **symetryczną dodatnio określoną** o wymiarach 4x4.

Opis metody wyliczanego momentu w postaci opisu w przestrzeni błędów zapiszemy jako

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{w} \quad (4)$$

Przechodząc do opisu równania (3) w przestrzeni stanu dla $\mathbf{w}=0$, otrzymamy

$$\begin{aligned} e_1 &= y_1 \\ e_2 &= y_2 \\ \dot{e}_1 &= \dot{y}_1 = y_3 \\ \dot{e}_2 &= \dot{y}_2 = y_4 \\ \ddot{e}_1 &= \dot{y}_3 = -K_{D1}y_3 - K_{p1}y_1 \\ \ddot{e}_2 &= \dot{y}_4 = -K_{D2}y_4 - K_{p2}y_2 \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie założono $\mathbf{u}$, jako sterowanie od stanu

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{y} = -\begin{bmatrix} \mathbf{K}_p & \mathbf{K}_D \end{bmatrix} \mathbf{y} = -\mathbf{K}_p \mathbf{e} - \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{e}} \quad (6)$$

a macierze wzmocnień mają formę

$$\mathbf{K}_P = \begin{bmatrix} K_{p1} & 0 \\ 0 & K_{p2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_D = \begin{bmatrix} K_{D1} & 0 \\ 0 & K_{D2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

i wyznaczamy je z równania

$$K = R^{-1}B^T P \quad (8)$$

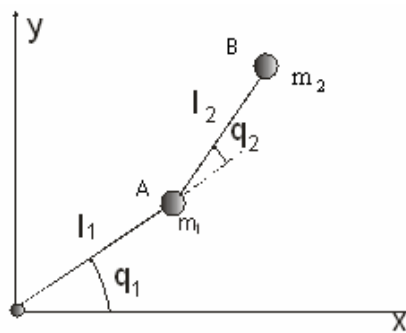
gdzie P jest macierzą symetryczną i jest rozwiązaniem algebraicznego równania Riccatiego

$$PA + A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q = 0 \quad (9)$$

W ogólnej postaci opis w przestrzeni stanów obiektu na podstawie równania (5) ma formę

$$\dot{y} = Ay + Bu \quad (10)$$

Obiektem sterowania jest dwuczłonowy manipulator , rys.1,



Rys. 1. Dwuczłonowy manipulator

opisany równaniem (1) gdzie wektory i macierze mają następującą formę

$$\begin{bmatrix} a_1 + a_2 + 2a_3 \cos q_2 & a_2 + a_3 \cos q_2 \\ a_2 + a_3 \cos q_2 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_3 \dot{q}_2 \sin q_2 & -a_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin q_2 \\ a_3 \dot{q}_1 \sin q_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 a_4 \cos q_1 + a_3 a_4 \cos(q_1 + q_2) \\ a_3 a_4 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = (m_1 + m_2)l_1^2, \quad a_2 = m_2 l_2^2, \quad a_3 = m_2 l_1 l_2, \quad a_4 = g/l_1.$$

W testach symulacyjnych przyjąć dane:

$$[q_{10}, q_{20}, \dot{q}_{10}, \dot{q}_{20}]^T = [0.2, 0, 0, 0]^T, \% \text{warunki początkowe manipulatora}$$

$$q_{d1} = A1 \sin(\pi * t), q_{d2} = A2 \cos(\pi * t), \% \text{zadana trajektoria}$$

$$t \in (0,6)[s], \% \text{czas realizacji ruchu}$$

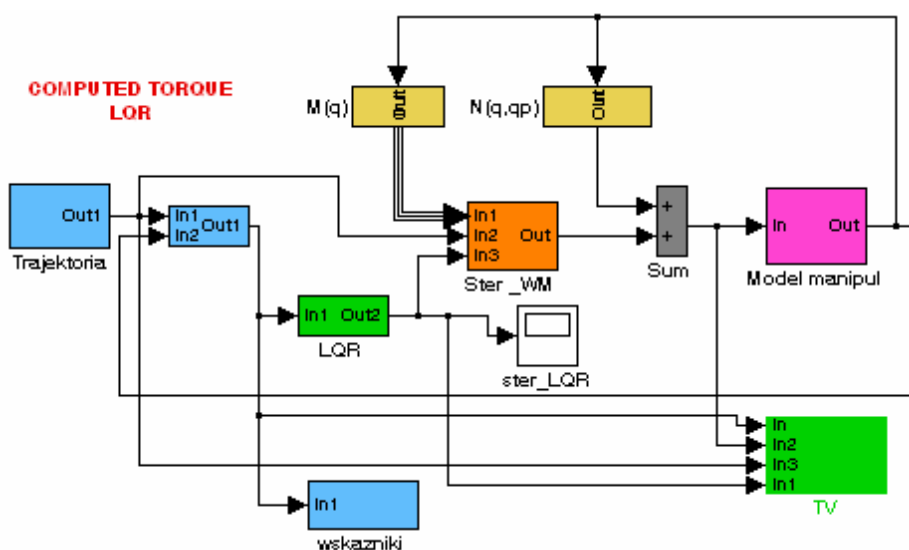
$$Q = \begin{bmatrix} 350+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 350+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.6+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.6+i \end{bmatrix}, \quad i = \text{numer zespołu}$$

Tab.1. Dane do symulacji

Zespół	1	2	3	4	5	6	7	8
$m_1=m_2$	1	1	1	2	2	2	2	2
l_1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
l_2	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
$A_1=A_2$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
Δm_2	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.1	1.2	1.3

B. Zadania do wykonania

1. Dobrać macierz R aby układ zamknięty o macierzy $A-BK$ był stabilny.
2. Wyznaczyć wzmacnienia sterowania, macierze $[K_P \quad K_D]$, rozwiązując **równanie Riccatiego**:
 - a) zastosować **pakiet Maple**
 - b) zastosować **procedurę Matlaba**
1. Przeprowadzić testy numeryczne wg schematu pokazanego na rys. 2.
 - Bez zakłóceń masy m_2 ,
 - z zakłóceniem masy $m_2 + \Delta m_2$ dla $t \geq 3[s]$
2. Na wykresach zamieścić
 - a) tor ruchu punktu B,
 - b) zadaną trajektorię ruchu punktu B,
 - c) sterowania LQR,
 - d) sterowania całkowite,
 - e) błędy sterowania,
 - f) pochodne błędów sterowania.
3. Ocenić stabilność układu, podać wartości własne układu zamkniętego.



Rys.2. Schemat sterownika typu LQR + WM

4. Przeprowadzić ocenę ilościową sterowania przyjmując następujące wskaźniki jakości:

- pierwiastek błędu średniokwadratowego błędów nadążania $e_1 = q_{1d} - q_1$, $e_2 = q_{2d} - q_2$,

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e_{1k}^2}, \quad \varepsilon_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e_{2k}^2} \quad [\text{rad}], \text{ gdzie } k - \text{to numer kolejnych dyskretnych pomiarów, } n - \text{całkowita}$$

liczba dyskretnych pomiarów,

- pierwiastek błędu średniokwadratowego pochodnych błędów $\dot{e}_1 = \dot{q}_{1d} - \dot{q}_1$, $\dot{e}_2 = \dot{q}_{2d} - \dot{q}_2$

$$\dot{\varepsilon}_1 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \dot{e}_{1k}^2}, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \dot{e}_{2k}^2} \quad [\text{rad/s}],$$

- całkowity wskaźnik jakości $J = \int_0^{\infty} (q^T(t)Qq(t) + u(t)^T Ru(t))dt$

5. Uzyskane oceny ilościowe zamieścić w Tab.

Tab. 2. Wartości wskaźników jakości dla sterowania **WM + LQR**

Wskaźnik:	ε_i [rad]	$\dot{\varepsilon}_i$ [rad/s]	J
ramię 1, i=1			
ramię 2, i=2			

Sprawozdanie powinno zawierać:

- opis matematyczny rozwiązywanego problemu,
- dane przyjęte w symulacji,
- listingi programów,
- otrzymane wykresy (każdy wykres powinien być opisany i skomentowany),
- wnioski.