**Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki**
Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa, Politechnika Rzeszowska

# Laboratorium Sterowania Robotów

## Laboratorium nr 10

**Temat**: Sterowanie ruchem nadążnym mobilnego robota dwukołowego
sterowanie PD i PID z wyliczanym momentem

Wprowadzenie

Metoda wyliczanego momentu (WM) daje ogólne podstawy sterowania robotami. Na podstawie tej metody stosować można różne algorytmy sterowania.

Zapiszmy dynamiczne równania ruchu mobilnego robota kołowego w postaci

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) + \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{d}} = \boldsymbol{\tau}\,, \tag{1}$$

gdzie $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{d}}$ to wektor zakłóceń, $\boldsymbol{\tau}$ to wektor sterowań. Przyjmijmy dla uproszczenia $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{d}}$=0. lub w postaci

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau}\,, \tag{2}$$

gdzie $\mathbf{N}(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}(\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}})$. Przyjmijmy, że znamy zadaną trajektorię ruchu $\mathbf{q}_{\mathrm{d}}$ we współrzędnych konfiguracyjnych robota. Aby przeprowadzić linearyzację sprzężeniem zwrotnym zdefiniujmy błąd nadążania

$$\mathbf{e} = \mathbf{q}_{\mathrm{d}} - \mathbf{q}\,. \tag{3}$$

Różniczkując dwukrotnie zależność (3), równanie (2) przekształcimy do kanonicznej formy, którą zapiszemy w postaci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\begin{bmatrix}\mathbf{e}\\ \dot{\mathbf{e}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{e}\\ \dot{\mathbf{e}}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}\mathbf{u}\,, \tag{4}$$

gdzie

$$\mathbf{u} \equiv \ddot{\mathbf{q}}_{\mathrm{d}} + \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{N}(\dot{\mathbf{q}}) - \boldsymbol{\tau}]. \tag{5}$$

Na podstawie (5) wyznacz sterowanie $\boldsymbol{\tau}$, które będzie momentami napędzającymi koła jezdne robota, czyli

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\ddot{\mathbf{q}}_{\mathrm{d}} - \mathbf{u}) + \mathbf{N}(\dot{\mathbf{q}}). \tag{6}$$

Sterowanie (6) jest nieliniowym prawem sterowania ze sprzężeniem zwrotnym, które zapewnia nadążanie odpowiedzi układu sterowania za zadaną trajektorią.

## A. Sterowanie PD + WM

Jeżeli wybierzemy w miejsce **u** w równaniu (6) formę sterowania PD

$$-\mathbf{u} = \mathbf{K}_{\mathbf{P}}\mathbf{e} + \mathbf{K}_{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{e}}\,, \tag{8}$$

to otrzymamy

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\ddot{\mathbf{q}}_{\mathrm{d}} + \mathbf{K}_{\mathbf{P}}\mathbf{e} + \mathbf{K}_{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{e}}) + \mathbf{N}(\dot{\mathbf{q}}), \tag{9}$$

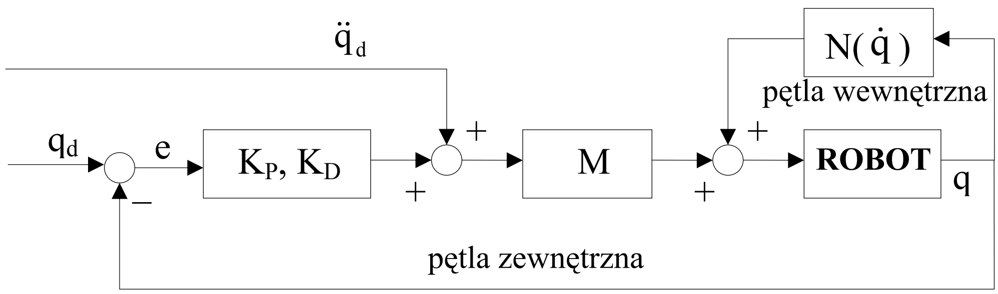
i w konsekwencji na podstawie (7) zamknięty układ sterowania opisuje równanie w przestrzeni błędów

$$\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_{\mathbf{p}}\mathbf{e} = \mathbf{0}\,. \tag{10}$$

Wybierając macierze $\mathbf{K_P}$ i $\mathbf{K_D}$ jako diagonalne, stabilność układu sterowania jest zapewniona jeżeli elementy tych macierzy będą dodatnie. Określa się je na podstawie równania (założenie wartości własnych układu zamkniętego)

$$\mathbf{s}^2 + \mathbf{K}_{\mathbf{D}}\mathbf{s} + \mathbf{K}_{\mathbf{P}} = \mathbf{s}^2 + 2\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{s} + \boldsymbol{\omega}^2\,, \tag{11}$$

gdzie $\mathbf{K}_{\mathbf{P}} = \mathrm{diag}[\omega_1^2,...,\omega_k^2], \mathbf{K}_{\mathbf{D}} = \mathrm{diag}[2\omega_1,...,2\omega_k]$. Schemat sterownika typu PD + WM pokazano na rys.1.




Rys.1. Sterownik typu PD + WM

## B. Sterowanie PID + WM

Jeśli wybierzemy w miejsce sterowania **u** w równaniu (6) formę sterowania PID

$$-\mathbf{u} = \mathbf{K_P e} + \mathbf{K_D \dot{e}} + \mathbf{K_I \varepsilon}, \qquad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{e}, \tag{12}$$

to otrzymamy

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}\left(\ddot{\mathbf{q}}_\mathbf{d} + \mathbf{K_P e} + \mathbf{K_D \dot{e}} + \mathbf{K_I \varepsilon}\right) + \mathbf{N}(\dot{\mathbf{q}}), \tag{13}$$

Do wyznaczenia wzmocnienia regulatora całkującego $K_I$ zastosować stabilność Rutha.

Zadania do wykonania

Obiektem sterowania jest mobilny robot dwukołowy opisany równaniem (1) gdzie wektory i macierze mają następującą formę

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & a_1 - a_2 \\ a_1 - a_2 & a_1 + a_2 + a_3 \end{bmatrix},$$

(16)

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & 2a_4(\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1) \\ -2a_4(\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1) & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} F_1(\dot{\alpha}_1) \\ F_2(\dot{\alpha}_2) \end{bmatrix},$$

gdzie $F_i(\dot{\alpha}_i) = a_{4+i}\left(1 - e^{-c\dot{\alpha}_i}\right) / \left(1 + e^{-c\dot{\alpha}_i}\right)$, i=1,2, **c -** parametr projektowy

**Zakładamy, że mobilny robot będzie poruszał się po torze prostoliniowym**. Do generowania trajektorii zadanej wykorzystać model zadania odwrotnego kinematyki z lab 03.
Przyjąć odpowiednie warunki początkowe obiektu. Wartości parametrów mobilnego robota przyjąć takie, jakie zidentyfikowano podczas lab 04. Współczynniki wzmocnień $K_{Pj}$, $K_{Dj}$, $K_{Ij}$ ($j = 1,2$) dobrać samodzielnie.
Czas symulacji $t_k = 25\,[s]$.
Zakładamy, że w czasie ruchu zmieniają się opory ruchu związane ze zmianą powierzchni po której przemieszcza się robot. Zmiany te podano w Tab.1 i występują dla $t \geq 6$ [s].

Tab.1.

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_5$ | 0.1 | 0.15 | 0 | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.2 |
| $a_6$ | 0.3 | 0.4 | 0.18 | 0.23 | 0.15 | 0.18 | 0.25 |

1. Zaprojektować algorytm sterowania **PD + WM** oraz **PID + WM** dla mobilnego robota dwukołowego z wykorzystaniem pakietu Matlab/Simulink.
2. Uzyskane rozwiązania przedstawić na wykresach:
   $\alpha_{1d}(t), \alpha_1(t), \alpha_{2d}(t), \alpha_2(t), \dot{\alpha}_{1d}(t), \dot{\alpha}_1(t), \dot{\alpha}_{2d}(t), \dot{\alpha}_2(t)$, $u_1(t), u_2(t), \tau_1, \tau_2$ oraz
   $e_1(t), e_2(t), \dot{e}_1(t), \dot{e}_2(t), \dot{e}_1(e_1), \dot{e}_2(e_2)$.

**Do oceny ilościowej generowanego sterowania** oraz realizacji założonego ruchu, przyjąć następujące wskaźniki jakości:

- pierwiastek błędu średniokwadratowego (RMSE) błędów nadążania $e_1 = q_{1d} - q_1$, $e_2 = q_{2d} - q_2$,

$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_{1k}^2}$, $\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_{2k}^2}$ [rad], gdzie k - to numer kolejnych dyskretnych pomiarów, n- całkowita liczba dyskretnych pomiarów,

- pierwiastek błędu średniokwadratowego pochodnych błędów $\dot{\varepsilon}_1 = \dot{q}_{1d} - \dot{q}_1$, $\dot{\varepsilon}_2 = \dot{q}_{2d} - \dot{q}_2$,

$$\dot{\varepsilon}_1 = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dot{e}_{1k}^2}\ ,\ \dot{\varepsilon}_2 = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dot{e}_{2k}^2}\ \text{[rad/s]},$$

**Sprawozdanie powinno zawierać:**

- opis matematyczny rozwiązywanego problemu,
- dane przyjęte w symulacji,
- listingi programów,
- otrzymane wykresy (każdy wykres powinien być opisany i skomentowany),
- wnioski.