

Przykładowe zadania egzaminacyjne z Teorii pola elektromagnetycznego

Zad. 1. W próżni umieszczone są trzy ładunki o wartościach:

$$Q_A = -1 \mu\text{C}, \quad Q_B = 2 \mu\text{C}, \quad Q_C = -3 \mu\text{C}$$

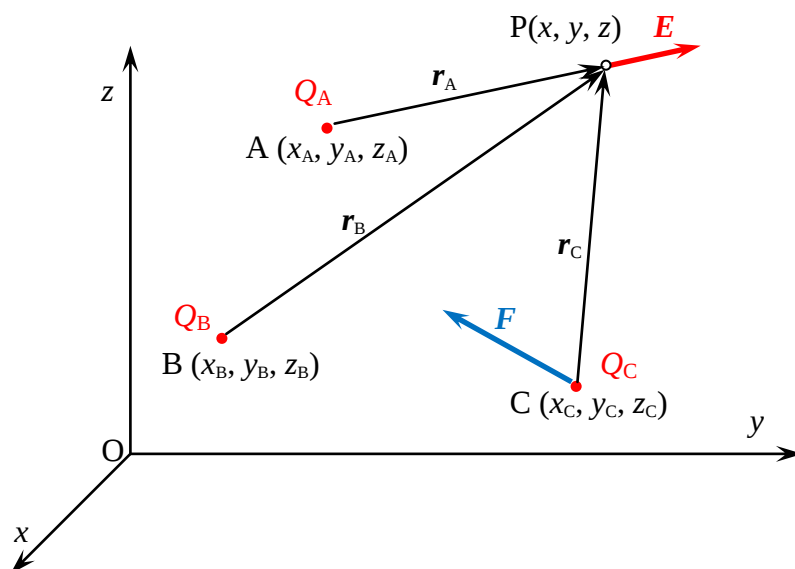
w punktach:

A (1, 2, 0) m, B(0, -2, 2) m, C(1, 3, 1) m (odpowiednio).

Obliczyć:

- rozkład pola potencjału elektrostatycznego,
- rozkład natężenia pola elektrycznego,
- siłę jaka działa na ładunek Q_C .

Poglądowa ilustracja zagadnienia



Rozwiązanie

- a) Wzór na potencjał w dowolnym punkcie P pojedynczego ładunku punktowego:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (1)$$

gdzie:

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \approx \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{\text{F}}{\text{m}} \text{ - przenikalność elektryczna próżni,}$$

r – odległość punktu P od punktu w którym znajduje się ładunek Q .

Korzystając z zasady superpozycji mamy:

$$V = V_A + V_B + V_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A}{r_A} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_B}{r_B} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_C}{r_C} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_A}{r_A} + \frac{Q_B}{r_B} + \frac{Q_C}{r_C} \right) \quad (2)$$

gdzie:

$$r_A = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 + (z-z_A)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2} \text{ m} \quad (3)$$

$$r_B = |\overrightarrow{BP}| = \sqrt{(x-x_B)^2 + (y-y_B)^2 + (z-z_B)^2} = \sqrt{x^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2} \text{ m} \quad (4)$$

$$r_C = |\overrightarrow{CP}| = \sqrt{(x-x_C)^2 + (y-y_C)^2 + (z-z_C)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2} \text{ m} \quad (5)$$

Po podstawieniu (3), (4), (5) do (2) otrzymujemy:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}} \left(\frac{-1 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2}} + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{x^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2}} + \frac{-3 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2}} \right) \text{ V} \quad (6)$$

i ostatecznie:

$$V(x, y, z) = 9 \cdot 10^3 \left(-\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2}} - \frac{3}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2}} \right) \text{ V} \quad (7)$$

b) Wzór na natężenie pola elektrycznego w dowolnym punkcie P pojedynczego ładunku punktowego:

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad (8)$$

gdzie $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ - wersor, $\vec{r}$ - wektor łączący punkt, w którym znajduje się ładunek Q z punktem P. Stąd:

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r} \quad (9)$$

Korzystając z zasady superpozycji mamy:

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_A}{r_A^3} \vec{r}_A + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_B}{r_B^3} \vec{r}_B + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_C}{r_C^3} \vec{r}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_A}{r_A^3} \vec{r}_A + \frac{Q_B}{r_B^3} \vec{r}_B + \frac{Q_C}{r_C^3} \vec{r}_C \right) \quad (10)$$

where:

$$\vec{r}_A = \overrightarrow{AP} = [x-x_A, \quad y-y_A, \quad z-z_A] = [x-1, \quad y-2, \quad z] \text{ m} \quad (11)$$

$$\vec{r}_B = \overrightarrow{AP} = [x - x_B, y - y_B, z - z_B] = [x, y + 2, z - 2] \text{ m} \quad (12)$$

$$\vec{r}_C = \overrightarrow{CP} = [x - x_C, y - y_C, z - z_C] = [x - 1, y - 3, z - 1] \text{ m} \quad (13)$$

r_A, r_B, r_C - patrz (3), (4), (5).

Zatem:

$$\vec{E}(x, y, z) = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{-1 \cdot 10^{-6}}{r_A^3} \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z \end{bmatrix} + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{r_B^3} \begin{bmatrix} x \\ y+2 \\ z-2 \end{bmatrix} + \frac{-3 \cdot 10^{-6}}{r_C^3} \begin{bmatrix} x-1 \\ y-3 \\ z-1 \end{bmatrix} \right) \text{ V/m} \quad (14)$$

Po wykonaniu matematycznych operacji (mnożenie wektora przez skalar i dodawanie wektorów):

$$\vec{E}(x, y, z) = 9 \cdot 10^3 \left(\begin{bmatrix} \frac{-x+1}{r_A^3} \\ \frac{-y+2}{r_A^3} \\ \frac{-z}{r_A^3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2x}{r_B^3} \\ \frac{2y+4}{r_B^3} \\ \frac{2z-4}{r_B^3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-3x+3}{r_C^3} \\ \frac{-3y+9}{r_C^3} \\ \frac{-3z+3}{r_C^3} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 9 \cdot 10^3 \left(\frac{-x+1}{r_A^3} + \frac{2x}{r_B^3} + \frac{-3x+3}{r_C^3} \right) \\ 9 \cdot 10^3 \left(\frac{-y+2}{r_A^3} + \frac{2y+4}{r_B^3} + \frac{-3y+9}{r_C^3} \right) \\ 9 \cdot 10^3 \left(\frac{-z}{r_A^3} + \frac{2z-4}{r_B^3} + \frac{-3z+3}{r_C^3} \right) \end{bmatrix} \text{ V/m} \quad (15)$$

Ostatecznie, po podstawieniu (3), (4), (5), współrzędne natężenia pola elektrycznego wyrażają się wzorami:

$$E_x(x, y, z) = 9 \cdot 10^3 \left(\frac{-x+1}{\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2} \right)^3} + \frac{2x}{\left(\sqrt{x^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2} \right)^3} + \frac{-3x+3}{\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2} \right)^3} \right) \text{ V/m}$$

$$E_y(x, y, z) = 9 \cdot 10^3 \left(\frac{-y+2}{\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2} \right)^3} + \frac{2y+4}{\left(\sqrt{x^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2} \right)^3} + \frac{-3y+9}{\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2} \right)^3} \right) \text{ V/m} \quad (16)$$

$$E_z(x, y, z) = 9 \cdot 10^3 \left(\frac{-z}{\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2} \right)^3} + \frac{2z-4}{\left(\sqrt{x^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2} \right)^3} + \frac{-3z+3}{\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2} \right)^3} \right) \text{ V/m}$$

c) W celu obliczenia siły działającej na ładunek można skorzystać z prawa Couomba:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{r} \quad (17)$$

lub definicji natężenia pola elektrycznego:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} \Rightarrow \vec{F} = Q\vec{E} \quad (18)$$

Ponieważ natężenie pola elektrycznego mamy już policzone, prostszy jest ten drugi sposób. W (16) opuszczamy ostatnie człony odpowiadające natężeniu pola pochodzącego od ładunku Q_C (ładunek nie działa siłą sam na siebie!), podstawiamy współrzędne punktu, w którym się on znajduje oraz mnożymy przez jego wartość:

$$\begin{aligned}
F_x &= -3 \cdot 10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^3 \left(\frac{-1+1}{\left(\sqrt{(1-1)^2+(3-2)^2+1^2}\right)^3} + \frac{2 \cdot 1}{\left(\sqrt{1^2+(3+2)^2+(1-2)^2}\right)^3} \right) = -0.267 \cdot 10^{-3} \text{ N} \\
F_y &= -3 \cdot 10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^3 \left(\frac{-3+2}{\left(\sqrt{(1-1)^2+(3-2)^2+1^2}\right)^3} + \frac{2 \cdot 3+4}{\left(\sqrt{1^2+(3+2)^2+(1-2)^2}\right)^3} \right) = 5.081 \cdot 10^{-3} \text{ N} \\
F_z &= -3 \cdot 10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^3 \left(\frac{-1}{\left(\sqrt{(1-1)^2+(3-2)^2+1^2}\right)^3} + \frac{2 \cdot 1-4}{\left(\sqrt{1^2+(3+2)^2+(1-2)^2}\right)^3} \right) = 6.621 \cdot 10^{-3} \text{ N}
\end{aligned} \tag{19}$$

Po wykonaniu obliczeń rachunkowych otrzymujemy:

$$\vec{F} = [-2.67, 5.081, 6.621] \text{ mN}$$

Wartość wektora siły:

$$F = |\vec{F}| = \sqrt{(-2.67)^2 + (5.081)^2 + (6.621)^2} = 8.763 \text{ mN}$$

Zad. 2. Natężenie pola elektrycznego w odległości r od dipola elektrycznego umieszczonego w początku układu współrzędnych i zorientowanego równoległe do osi OZ opisane jest funkcją:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{p}{\pi \epsilon_0 r^5} [xz, yz, -x^2 - y^2 + 3z^2]$$

gdzie $p = \text{const}$ (moment dipolowy).

Obliczyć siłę, z jaką ten dipol działa na statyczny ładunek punktowy $q = 2 \text{ } \mu\text{C}$ zlokalizowany w punkcie A(20, 10, 20) cm, jeżeli $p = 5 \cdot 10^{-9} \text{ C} \cdot \text{m}$,

Wskazówka. Należy podstawić dane do podanego wzoru (r to oczywiście odległość między punktami (x, y, z) i $(0, 0, 0)$) i obliczyć współrzędne wektora $\vec{E}$, a następnie skorzystać ze wzoru

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Zad. 3. Pole magnetyczne w otoczeniu prostoliniowego przewodu z prądem stałym i ułożonego wzdłuż osi OZ opisane jest funkcją:

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left[-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right]$$

gdzie $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$

Obliczyć siłę z jaką to pole działa na ładunek punktowy $q = 5 \text{ mC}$ umieszczony w punkcie A(2, 1, -3) mm i poruszający się z prędkością $v = 200 \text{ m/s}$ równoległe do osi OZ. Natężenie prądu $i = 50 \text{ A}$.

Rozwiązanie

Obliczamy współrzędne indukcji magnetycznej w punkcie A:

$$\begin{aligned}\vec{B}(A) &= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50}{2\pi} \left[-\frac{1 \cdot 10^{-3}}{(2 \cdot 10^{-3})^2 + (1 \cdot 10^{-3})^2}, \frac{2 \cdot 10^{-3}}{(2 \cdot 10^{-3})^2 + (1 \cdot 10^{-3})^2}, 0 \right] = \\ &= 10^{-5} \cdot \left[-\frac{10^{-3}}{5 \cdot 10^{-6}}, \frac{2 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-6}}, 0 \right] = [-0,2; 0,4; 0] \cdot 10^{-2} \text{ T} = [-2; 4; 0] \text{ mT}\end{aligned}$$

Zapisujemy wektor prędkości: $\vec{v} = [0, 0, 200] \text{ m/s}$

Obliczamy siłę ze wzoru Lorentza:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 200 \\ -2 \cdot 10^{-3} & 4 \cdot 10^{-3} & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} -0,8 \\ -0,4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \cdot 10^{-3} \\ -2 \cdot 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ N} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ mN}$$

Zad. 4. Sprawdzić, czy pole podane w zad. 3. spełnia równania Maxwella.

Uwaga: należy założyć, że w rozpatrywanym obszarze nie ma niezrównoważonych ładunków elektrycznych i pole elektryczne nie występuje.

1. Prawo Gaussa dla pola elektrycznego:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

jest spełnione w sposób oczywisty, ponieważ zgodnie z założeniem $\vec{E} = \vec{0}$ i $\rho = 0$.

2. Prawo Gaussa dla pola magnetycznego:

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Obliczamy dywergencję pola magnetycznego.

$$\text{div } \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot [B_x, B_y, B_z] = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Obliczamy pochodne.

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\mu_0 i}{\pi} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\mu_0 i}{\pi} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Po podstawieniu mamy:

$$\text{div } \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{\pi} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{\mu_0 i}{\pi} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} + 0 = 0$$

czyli prawo Gaussa dla pola magnetycznego jest spełnione.

3. Prawo Faraday'a:

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

jest spełnione ponieważ $\vec{E} = \vec{0}$, a $\vec{B}$ nie zależy od czasu.

4. Prawo Ampera - Maxwella

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

W rozpatrywanym obszarze $\vec{J} = \vec{0}$ (opis pola w treści zadania dotyczy otoczenia przewodu gdzie prądy nie płyną, a nie jego wnętrza!), oraz $\vec{E} = \vec{0}$, czyli prawa strona równa jest zeru. Musimy zatem sprawdzić, czy rotacja pola magnetycznego też równa się zeru.

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Obliczamy pochodne:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = 0 \quad (\text{bo } B_z = 0)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = 0 \quad (\text{bo } B_y \text{ nie zależy od } z)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = 0 \quad (\text{bo } B_x \text{ nie zależy od } z)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = 0 \quad (\text{bo } B_z = 0)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\mu_0 i}{\pi} \frac{(-x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\mu_0 i}{\pi} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\mu_0 i}{\pi} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Po podstawieniu widzimy, że składowe x-owa i y-owa rotacji są od razu równe zeru, a składowa z-owa:

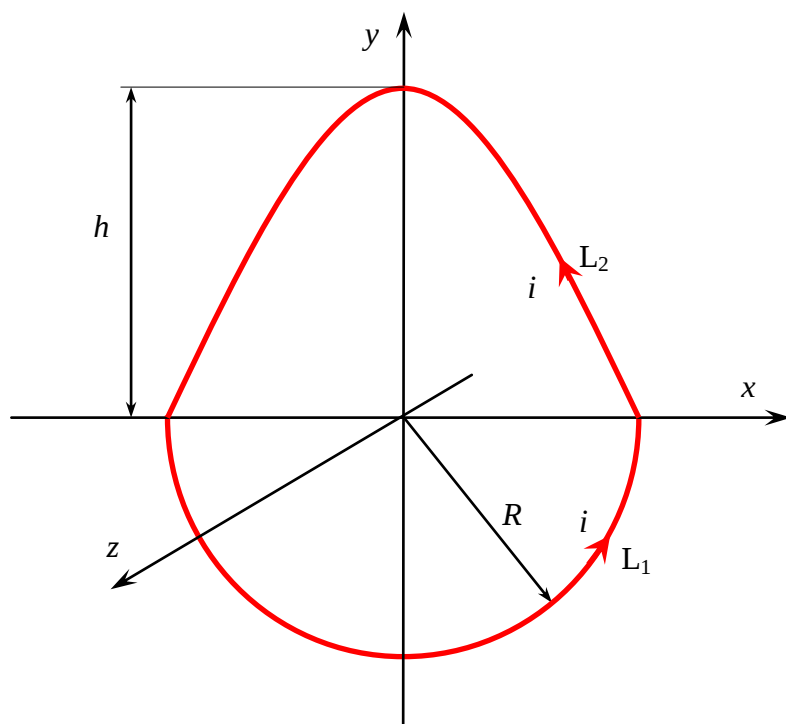
$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \left(-\frac{\mu_0 i}{\pi} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) + \left(-\frac{\mu_0 i}{\pi} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = 0$$

również.

Zatem $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0}$, co ostatecznie kończy dowód.

Zad. 5. Obliczyć rozkład pola magnetycznego od zwoju z prądem stałym przedstawionego na rysunku. Fragment zwoju oznaczony jako L_1 jest półokręgiem, a jako L_2 – odcinkiem paraboli. Składowe pola należy przedstawić w postaci całek oznaczonych, ich obliczanie nie jest wymagane.

Dane: $I = 200 \text{ A}$, $R = 20 \text{ cm}$, $h = 40 \text{ cm}$.



Rozwiązanie

Korzystamy z prawa Biota-Savarta:

$$\vec{B} = \frac{\mu i}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (1)$$

Punkt w którym obliczamy pole będziemy oznaczać jako $P(x, y, z)$, a punkt na krzywej L (bieżący punkt całkowania) jako $P'(x', y', z')$.

Ponieważ zwój składa się z dwóch części, całkę w (1) rozpisujemy na dwie:

$$\vec{B} = \frac{\mu i}{4\pi} \int_{L_1} \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{r}}{r^3} + \frac{\mu i}{4\pi} \int_{L_2} \frac{d\vec{l}_2 \times \vec{r}}{r^3} \quad (2)$$

Pierwsza z całek reprezentuje pole $\vec{B}_1$ generowane przez prąd płynący w części L_1 , a druga pole $\vec{B}_2$ generowane przez prąd płynący w części L_2 .

Obliczanie pola $\vec{B}_1$

Zapisujemy równanie krzywej L_1 w postaci parametrycznej (należy zwrócić szczególną uwagę żeby parametryzacja była zgodna z kierunkiem prądu, podobnie jak przy zwykłych całkach po krzywej skierowanej).

$$L_1: \begin{cases} x' = R \cos \theta \\ y' = R \sin \theta \\ z' = 0 \\ -\pi \leq \theta \leq 0 \quad (\text{lub } \pi \leq \theta \leq 2\pi) \end{cases} \quad (3)$$

Obliczamy wektor $d\vec{l}_1$

$$d\vec{l}_1 = \begin{bmatrix} dx' \\ dy' \\ dz' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R \sin \theta d\theta \\ R \cos \theta d\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Obliczamy wektor $\vec{r}$ oraz jego moduł

$$\vec{r} = \vec{P'P} = \begin{bmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - R \cos \theta \\ y - R \sin \theta \\ z \end{bmatrix} \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{(x - R \cos \theta)^2 + (y - R \sin \theta)^2 + z^2} \quad (5), (6)$$

Obliczamy iloczyn wektorowy

$$\begin{aligned} d\vec{l}_1 \times \vec{r} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -R \sin \theta d\theta & R \cos \theta d\theta & 0 \\ x - R \cos \theta & y - R \sin \theta & z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} Rz \cos \theta d\theta \\ Rz \sin \theta d\theta \\ -R \sin \theta d\theta (y - R \sin \theta) - R \cos \theta d\theta (x - R \cos \theta) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} Rz \cos \theta d\theta \\ Rz \sin \theta d\theta \\ (-R y \sin \theta + R^2 \sin^2 \theta - R x \cos \theta + R^2 \cos^2 \theta) d\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rz \cos \theta d\theta \\ Rz \sin \theta d\theta \\ R(R - y \sin \theta - x \cos \theta) d\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

Podstawiamy (6) i (7) do pierwszej całki w (2). Po wykonaniu prostych działań (dzielenie i mnożenie wektora przez skalar) otrzymujemy ostatecznie:

$$B_{1x} = \frac{\mu i}{4\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{Rz \cos \theta}{\left(\sqrt{(x - R \cos \theta)^2 + (y - R \sin \theta)^2 + z^2} \right)^3} d\theta \quad (8)$$

$$B_{1y} = \frac{\mu i}{4\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{Rz \sin \theta}{\left(\sqrt{(x - R \cos \theta)^2 + (y - R \sin \theta)^2 + z^2} \right)^3} d\theta \quad (9)$$

$$B_{1z} = \frac{\mu i}{4\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{R(R - y \sin \theta - x \cos \theta)}{\left(\sqrt{(x - R \cos \theta)^2 + (y - R \sin \theta)^2 + z^2} \right)^3} d\theta \quad (10)$$

Obliczanie pola $\vec{B}_2$

Znajdujemy równanie krzywej L_2 . Jest to parabola leżąca w płaszczyźnie OXY o miejscach zerowych w punktach $-R$ i R oraz wierzchołku w punkcie $(0, h)$, czyli

$$y' = \frac{h}{R^2} (R^2 - x'^2) \quad (11)$$

(Dla uproszczenia zapisów dalszych wzorów można w tym miejscu podstawić dane liczbowe za R i h . Te i pozostałe dane można podstawiać na każdym etapie rozwiązywania zadania, nie wpływa to na ocenę).

Przekształcamy równanie (11) do postaci parametrycznej podstawiając $x' = -t$ (minus, aby parametr t rósł zgodnie z kierunkiem prądu – patrz rysunek). Mamy więc

$$L_2 : \begin{cases} x' = -t \\ y' = \frac{h}{R^2} (R^2 - t^2) \\ z' = 0 \\ -R \leq \theta \leq R \end{cases} \quad (12)$$

Dalej postępujemy analogicznie jak poprzednio:

$$\vec{dl}_2 = \begin{bmatrix} dx' \\ dy' \\ dz' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -dt \\ -\frac{2h}{R^2} t dt \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\vec{r} = \vec{P'P} = \begin{bmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t \\ y - \frac{h}{R^2} (R^2 - t^2) \\ z \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{(x+t)^2 + \left(y - \frac{h}{R^2} (R^2 - t^2) \right)^2 + z^2} \quad (15)$$

po czym obliczamy iloczyn wektorowy $\vec{dl}_2 \times \vec{r}$ i zapisujemy B_{2x} , B_{2y} , B_{2z} .

Na końcu dodajemy wektory $\vec{B}_1$ i $\vec{B}_2$ dodając ich odpowiednie współrzędne, tzn.:

$$B_x = B_{1x} + B_{2x}$$

$$B_y = B_{1y} + B_{2y}$$

$$B_z = B_{1z} + B_{2z}$$

(16)

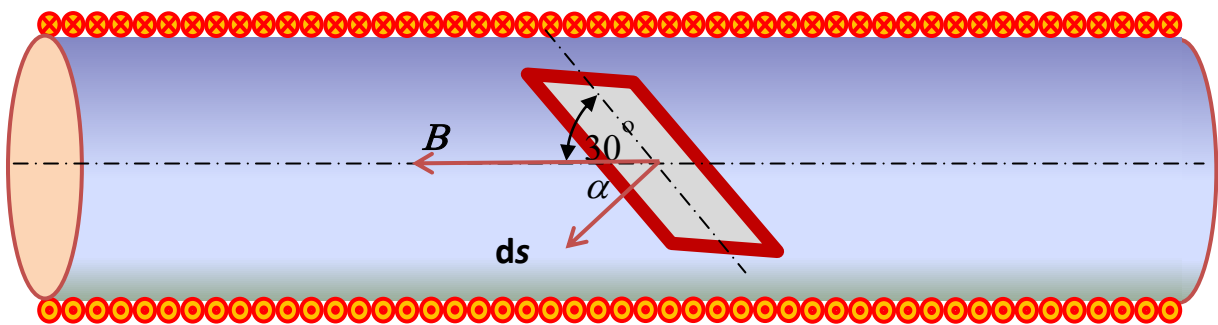
Do (16) wstawiamy (8) – (10) i wzory na B_{2x} , B_{2y} , B_{2z} oraz wprowadzamy dane liczbowe (jeśli nie zostały wprowadzone wcześniej). Należy zawsze pamiętać o podawaniu jednostek wszystkich obliczanych wielkości fizycznych.

Zad. 6. Wewnątrz solenoidu o długości $L = 20$ cm składającego się $N = 5000$ zwojów znajduje się wykonana z przewodnika ramka prostokątna o wymiarach 4×5 cm umieszczona pod kątem 30° do osi solenoidu (patrz rysunek). Solenoid zasilany jest prądem sinusoidalnie zmiennym o częstotliwości 1000 Hz i amplitudzie $I_m = 5$ A. Obliczyć siłę elektromotoryczną indukowaną w ramce.

Wskazówka: Należy założyć, że wektor indukcji magnetycznej wewnątrz solenoidu jest równoległy do jego osi i ma wartość (wzór wyprowadzony na podstawie prawa Ampera):

$$B(t) = \frac{\mu_0 N i(t)}{L}$$

Ilustracja zagadnienia



Rozwiązanie

Korzystamy z prawa Faraday'a:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

gdzie:

$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$ - siła elektromotoryczna indukowana w zwoju,

$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$ - strumień magnetyczny przenikający przez powierzchnię zwoju.

Obliczamy strumień magnetyczny:

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_S B \cos \alpha ds = B \cos \alpha \iint_S ds = BS \cos \alpha = \frac{\mu_0 N i(t)}{L} ab \cos \alpha$$

gdzie a , b – wymiary ramki.

Zgodnie z treścią zadania prąd w solenoidzie jest sinusoidalnie zależny od czasu, czyli:

$$i(t) = I_m \sin \omega t$$

gdzie $\omega = 2\pi f$

Zatem:

$$\Phi = \frac{\mu_0 N I_m a b \cos \alpha}{L} \sin \omega t$$

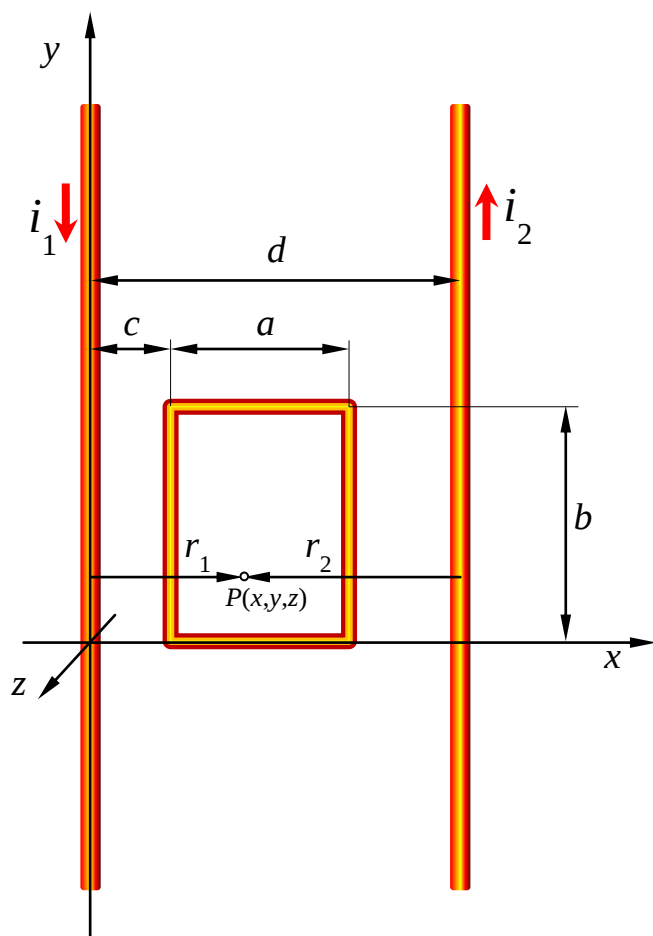
Obliczamy siłę elektromotoryczną:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \frac{\mu_0 N I_m a b \cos \alpha}{2L} \sin 2\pi f t = \frac{\pi \mu_0 N I_m a b \cos \alpha}{L} f \cos 2\pi f t$$

Następnie podstawiamy dane liczbowe i podajemy ostateczny wynik.

Uwaga: Należy zwrócić uwagę, że kąt α **nie jest** podany w treści zadania kątem między płaszczyzną ramki a osią solenoidu (patrz rysunek) i trzeba go też obliczyć!

Zad. 7. Obliczyć siłę elektromotoryczną indukowaną w prostokątnej cewce umieszczonej między dwoma prostoliniowymi przewodami jak na rysunku, z prądem sinusoidalnie zmiennym o przeciwnych fazach i jednakowych amplitudach $I_m = 20$ A.



$$a = 5 \text{ cm}$$

$$b = 6 \text{ cm}$$

$$c = 2 \text{ cm}$$

$$d = 10 \text{ cm}$$

Rozwiązanie

Korzystamy z prawa Faradaya:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Wartość wektora indukcji magnetycznej od prostoliniowego przewodu z prądem określa wzór (wyprowadzony z prawa Ampera):

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

gdzie r oznacza odległość od przewodu.

W rozpatrywanym układzie, zgodnie z regułą prawej dłoni, wektory od obu przewodów na powierzchni ramki skierowane są do niej prostopadłe i mają zgodne zwroty, zatem

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r_1} + \frac{\mu_0 i_2}{2\pi r_2}$$

Zgodnie z treścią zadania:

$$i_1(t) = i_2(t) = I_m \sin \omega t$$

czyli

$$B(t) = \frac{\mu_0 I_m}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \sin \omega t$$

W przyjętym na rysunku układzie współrzędnych mamy:

$$r_1 = x, \quad r_2 = d - x$$

zatem

$$B(x, t) = \frac{\mu_0 I_m}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d - x} \right) \sin \omega t$$

Wektor $\vec{ds}$ jest z definicji prostopadły do powierzchni całkowania, którą jest tutaj powierzchnia ramki, zatem

$$\vec{B} \parallel \vec{ds} \Rightarrow \vec{B} \cdot \vec{ds} = B ds$$

Obliczamy strumień magnetyczny:

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_S \vec{B} \cdot \vec{ds} = \iint_S B ds = \iint_S \frac{\mu_0 I_m}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d - x} \right) \sin \omega t ds = \frac{\mu_0 I_m}{2\pi} \sin \omega t \iint_S \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d - x} \right) ds = \\ &= \frac{\mu_0 I_m}{2\pi} \sin \omega t \int_0^b \left(\int_c^{c+a} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d - x} \right) dx \right) dy = \frac{\mu_0 I_m}{2\pi} \sin \omega t \int_0^b \left(\ln|x| - \ln|d - x| \right) \Big|_c^{c+a} dy = \\ &= \frac{\mu_0 I_m}{2\pi} \sin \omega t \int_0^b (\ln(c + a) - \ln(d - c - a) - \ln c + \ln(d - c)) dy = \frac{\mu_0 I_m}{2\pi} \sin \omega t \ln \frac{(a + c)(d - c)}{c(d - c - a)} \int_0^b dy = \\ &= \frac{\mu_0 I_m}{2\pi} b \ln \frac{(a + c)(d - c)}{c(d - c - a)} \sin \omega t \end{aligned}$$

Obliczamy siłę elektromotoryczną indukowaną w ramce:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \frac{\mu_0 I_m}{2\pi} b \ln \frac{(a + c)(d - c)}{c(d - c - a)} \sin \omega t = -\frac{\mu_0 I_m \omega}{2\pi} b \ln \frac{(a + c)(d - c)}{c(d - c - a)} \cos \omega t = -\mu_0 I_m f b \ln \frac{(a + c)(d - c)}{c(d - c - a)} \cos \omega t$$

Zad. 8. Natężenie pola elektrycznego pewnej fali elektromagnetycznej rozchodzącej się w ośrodku dielektrycznym pozbawionym niezrównoważonych ładunków elektrycznych opisane jest funkcją wektorową:

$$\vec{E} = [E_x(y, t), \quad 0 \quad 0]$$

gdzie

$$E_x(y, t) = E_m \sin(ky - \omega t)$$

E_m – amplituda fali,

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – liczba falowa (moduł wektora falowego $\vec{k}$ określającego kierunek rozchodzenia się fali, λ –

długość fali),

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ – pulsacja (T – okres fali).

Korzystając z różniczkowych równań Maxwella znaleźć funkcję wektorową opisującą indukcję magnetyczną tej fali oraz sprawdzić, czy tak opisane pola spełniają wszystkie te równania.

Rozwiązanie

W celu znalezienia funkcji opisującej wektor indukcji magnetycznej korzystamy z różniczkowej postaci prawa Faraday'a:

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Obliczamy rotację natężenia pola elektrycznego.

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times [E_x, \quad 0, \quad 0] = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ -\frac{\partial E_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

E_x nie zależy od z , więc $\frac{\partial E_x}{\partial z} = 0$.

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} E_m \sin(ky - \omega t) = E_m k \cos(ky - \omega t)$$

Zatem

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -E_m k \cos(ky - \omega t) \end{bmatrix}$$

Rozpisujemy jawnie prawą stronę prawa Faraday'a

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{bmatrix}$$

i porównujemy z lewą:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = E_m k \cos(ky - \omega t)$$

Z pierwszych dwóch równań wynika, że współrzędne B_x i B_y nie zależą od czasu, czyli nie stanowią pola fali elektromagnetycznej, możemy więc przyjąć $B_x = B_y = 0$. Z trzeciego równania obliczamy składową B_z :

$$\begin{aligned} B_z &= \int E_m k \cos(ky - \omega t) dt = E_m k \int \cos(ky - \omega t) dt = \left. \begin{matrix} s = ky - \omega t \\ ds = -\omega dt \\ dt = -\frac{1}{\omega} ds \end{matrix} \right| = E_m k \int \cos s \left(-\frac{1}{\omega} \right) ds = \\ &= -\frac{E_m k}{\omega} \int \cos s ds = -\frac{E_m k}{\omega} \sin s + C = -\frac{E_m k}{\omega} \sin(ky - \omega t) + C \end{aligned}$$

Stała całkowania C jest nie zależy od czasu, czyli jak wyżej, możemy przyjąć $C = 0$. Ostatecznie mamy więc:

$$\vec{B} = [0, \quad 0, \quad B_z(y, t)]$$

gdzie

$$B_z(y, t) = -\frac{E_m k}{\omega} \sin(ky - \omega t)$$

Sprawdzamy pozostałe równania Maxwella.

Prawo Gaussa dla pola elektrycznego

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad (\text{Zgodnie z treścią zadania gęstość ładunków } \rho = 0.)$$

Obliczamy dywergencję natężenia pola elektrycznego:

$$\text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot [E_x, \quad 0, \quad 0] = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial 0}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} = 0 \quad (\text{bo } E_x \text{ nie zależy od } x)$$

Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Obliczamy dywergencję indukcji magnetycznej:

$$\text{div } \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot [0, \quad 0, \quad B_z] = \frac{\partial 0}{\partial x} + \frac{\partial 0}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{bo } B_z \text{ nie zależy od } z)$$

Prawo Ampera-Maxwella

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Zgodnie z treścią zadania (ośrodek dielektryczny) gęstość prądu } \vec{J} = \vec{0}.)$$

Obliczamy rotację indukcji magnetycznej.

$$\vec{\text{rot}}\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_z \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

B_z nie zależy od x , więc $\frac{\partial B_z}{\partial x} = 0$.

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{E_m k}{\omega} \sin(ky - \omega t) \right) = -\frac{E_m k}{\omega} k \cos(ky - \omega t) = -\frac{E_m k^2}{\omega} \cos(ky - \omega t)$$

Zatem

$$\vec{\text{rot}}\vec{B} = \begin{bmatrix} -\frac{E_m k^2}{\omega} \cos(ky - \omega t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rozpisujemy jawnie prawą stronę prawa Ampera:

$$\mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \mu\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i porównujemy z lewą.

$$\mu\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{E_m k^2}{\omega} \cos(ky - \omega t)$$

Stąd:

$$E_x = \int \left(-\frac{E_m k_y^2}{\mu\epsilon\omega} \cos(ky - \omega t) \right) dt = -\frac{E_m k_y^2}{\mu\epsilon\omega} \int \cos(ky - \omega t) dt$$

Ostatnia całka jest identyczna z obliczaną w pierwszej części zadania, stąd

$$E_x(y, t) = \frac{E_m k_y^2}{\mu\epsilon\omega^2} \sin(ky - \omega t)$$

Porównując ten wynik ze współrzędną E_x podaną w treści zadania widzimy, że aby prawo Ampera było spełnione musi zachodzić zależność:

$$\frac{k^2}{\mu\epsilon\omega^2} = 1$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy stąd:

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Podstawiając następnie $\omega = \frac{2\pi}{T}$ i $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ mamy

$$\frac{\lambda}{T} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Stosunek λ/T jest prędkością fali v , czyli ostatecznie

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Wzór ten jest ogólnym wyrażeniem wiążącym prędkość fali elektromagnetycznej w ośrodku dielektrycznym z parametrami tego ośrodka.

Zad. 9.

In a vacuum, in the direction of the OX axis travels plane electromagnetic wave with an amplitude of the electric field $E_m = 30$ V/m and polarization in the OY axis direction. Frequency of the wave: $f = 2$ GHz.

- Write the components of electric and magnetic fields as a function of time and coordinates.
- Show explicitly that these functions satisfy Maxwell's equations.

Solution

a)

Calculation parameters of the wave:

$$\text{Pulsation (angular frequency)} \quad \omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^9 \approx 12,57 \cdot 10^9 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (1)$$

$$\text{Period} \quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2 \cdot 10^9} = 0,5 \cdot 10^{-9} \text{s} = 0,5 \text{ns} \quad (2)$$

$$\text{Wavelength} \quad \lambda = cT = 3 \cdot 10^8 \cdot 0,5 \cdot 10^{-9} = 0,15 \text{m} = 15 \text{cm} \quad (3)$$

$$\text{Wave number} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0,15} \approx 41,89 \frac{\text{rad}}{\text{m}} \quad (4)$$

$$\text{Amplitude of the magnetic field} \quad B_m = \frac{E_m}{c} = \frac{30}{3 \cdot 10^8} = 10^{-7} \text{T} = 0,1 \mu\text{T} \quad (5)$$

Components of the electromagnetic field vectors

$$\vec{E} = [0, E_y(x, t), 0] \quad \vec{B} = [0, 0, B_z(x, t)] \quad (6)$$

$$E_y(x, t) = E_m \sin(kx - \omega t) \quad B_z(x, t) = B_m \sin(kx - \omega t) \quad (7)$$

$$E_y(x, t) = 30 \sin(41.89x - 12.57 \cdot 10^9 t) \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad B_z(x, t) = 10^{-7} \sin(41.89x - 12.57 \cdot 10^9 t) \text{ T} \quad (8)$$

b)

Gauss' law for the electric field in vacuum

$$\text{div} \vec{E} = 0$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} 0 + \frac{\partial}{\partial y} (30 \sin(41.89x - 12.57 \cdot 10^9 t)) + \frac{\partial}{\partial z} 0 = 0 \quad (\text{ok})$$

Gauss' law for the magnetic field

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{div} \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} 0 + \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial z} (10^{-7} \sin(41.89x - 12.57 \cdot 10^9 t)) = 0 \quad (\text{ok})$$

Faraday's law

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

left side:

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial 0}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (30 \sin(41.89x - 12.57 \cdot 10^9 t)) = 0$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (30 \sin(41.89x - 12.57 \cdot 10^9 t)) = 30 \cdot 41.89 \cos(41.89x - 12.57 \cdot 10^9 t) = 1257 \cos(41.89x - 12.57 \cdot 10^9 t) \frac{\text{V}}{\text{m}^2}$$

then:

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1257 \cos(41.89x - 12.57 \cdot 10^9 t) \end{bmatrix} \frac{\text{V}}{\text{m}^2}$$

right side:

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10^{-7} \sin(41.89x - 12.57 \cdot 10^9 t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10^{-7} \cdot 12.57 \cdot 10^9 \cos(41.89x - 12.57 \cdot 10^9 t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1257 \cos(41.89x - 12.57 \cdot 10^9 t) \end{bmatrix} \frac{\text{T}}{\text{s}}$$

Conclusion: left side of the Faraday's law is equal to the right side (ok)

Ampere's law in vacuum

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

left side

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial 0}{\partial z} \\ \frac{\partial 0}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (10^{-7} \sin(41.89x - 12.57 \cdot 10^9 t)) = 0$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (10^{-7} \sin(41.89x - 12.57 \cdot 10^9 t)) = 4.189 \cdot 10^{-6} \cos(41.89x - 12.57 \cdot 10^9 t) \frac{\text{T}}{\text{m}}$$

then:

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4.189 \cdot 10^{-6} \cos(41.89x - 12.57 \cdot 10^9 t) \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{T}}{\text{m}}$$

right side

$$\begin{aligned} \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \sin(41.89x - 12.57 \cdot 10^9 t) \\ 0 \end{bmatrix} = 0.1111 \cdot 10^{-16} \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \cdot 12.57 \cdot 10^9 \cos(41.89x - 12.57 \cdot 10^9 t) \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -4.189 \cdot 10^{-6} \cos(41.89x - 12.57 \cdot 10^9 t) \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\text{T}}{\text{m}} \end{aligned}$$

Conclusion: left side of the Ampere's law is equal to the right side (ok).

Zad. 10.

Pole elektryczne w otoczeniu kuli naładowanej ładunkiem $Q = 5\text{mC}$ opisane jest funkcją:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{kQ}{r^3} \vec{r} \quad (1)$$

gdzie $k = 9 \cdot 10^9 \text{ m/F}$, $\vec{r} = [x, y, z]$

Oblicz pracę, jaką wykonuje siła elektryczna działająca na ładunek $q = 6\mu\text{C}$ poruszający się w tym polu w czasie $2 \leq t \leq 4 \text{ s}$, którego trajektoria opisana jest równaniami:

$$L : \begin{cases} x = 2t \\ y = -5t \\ z = 3t \end{cases} \quad (2)$$

gdzie x, y, z są współrzędnymi punktu wyrażonymi w metrach, a t oznacza czas wyrażony w sekundach.

Rozwiązanie

Korzystamy z ogólnego wzoru na pracę siły $\vec{F}$ działającej na ciało poruszające się po trajektorii L :

$$W = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (3)$$

Siła działająca na ładunek q w polu elektrycznym o natężeniu $\vec{E}$ wyraża się wzorem

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (4)$$

Obliczamy siłę jaka działa na ładunek q w chwili t (podstawiamy (2) do (1)):

$$\vec{F}(t) = q \frac{kQ}{r^3} \vec{r} = \frac{kQq}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} [x, y, z] = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{\left(\sqrt{(2t)^2 + (-6t)^2 + (3t)^2}\right)^3} [2t, -6t, 3t] \text{ N} \quad (5)$$

Po wykonaniu prostych działań otrzymujemy:

$$\vec{F}(t) = \frac{270}{343t^3} [2t, -6t, 3t] \approx \frac{0,787}{t^2} [2, -6, 3] \text{ N} \quad (6)$$

Korzystając z (2) obliczamy wektor $d\vec{l}$:

$$d\vec{l} = [dx, dy, dz] = [2dt, -6dt, 3dt] = [2, -6, 3]dt \quad (7)$$

Podstawiamy (6) i (7) do (3):

$$W = \int_L \frac{0,787}{t^2} [2, \quad -6, \quad 3] \cdot [2, \quad -6, \quad 3] dt \quad (8)$$

Po obliczeniu iloczynu skalarnego pod całką, wyłączeniu stałych czynników przed całkę oraz podstawieniu granic całkowania dla zmiennej t (patrz treść zadania) otrzymujemy:

$$W = 0,787 \cdot 49 \int_5^{10} \frac{1}{t^2} dt = 38,6 \int_5^{10} t^{-2} dt = -38,6 \left. \frac{1}{t} \right|_5^{10} = -38,6 \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{5} \right) = 14,3 \text{ J} \quad (9)$$