WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW I KONSTRUKCJI
II LiK - SEMESTR LETNI

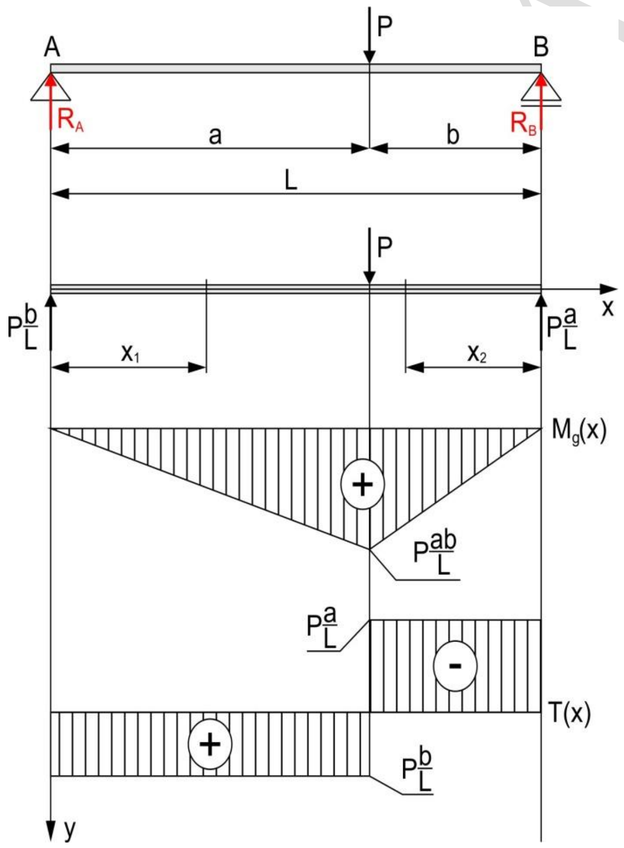
ROZDZIAŁ IX – ZGINANIE

2) Wykresy momentów gnących i sił tnących.

Wzajemną zależność pomiędzy wartościami sił tnących i momentów gnących opisuje równanie (6):

$$T = \frac{dM_g}{dx}$$

Przykłady elementarne:



Reakcje więzów:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow R_B \cdot L = P \cdot a \rightarrow R_B = P\frac{a}{L}$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow R_A \cdot L = P \cdot b \rightarrow R_A = P\frac{b}{L}$$

$$0 \le x_1 \le a$$

$$M_{gx_1} = P\frac{b}{L} \cdot x_1$$

$$M_{gx_1|x_1=0} = 0\,; \quad M_{gx_1|x_1=a} = P\frac{a \cdot b}{L}$$

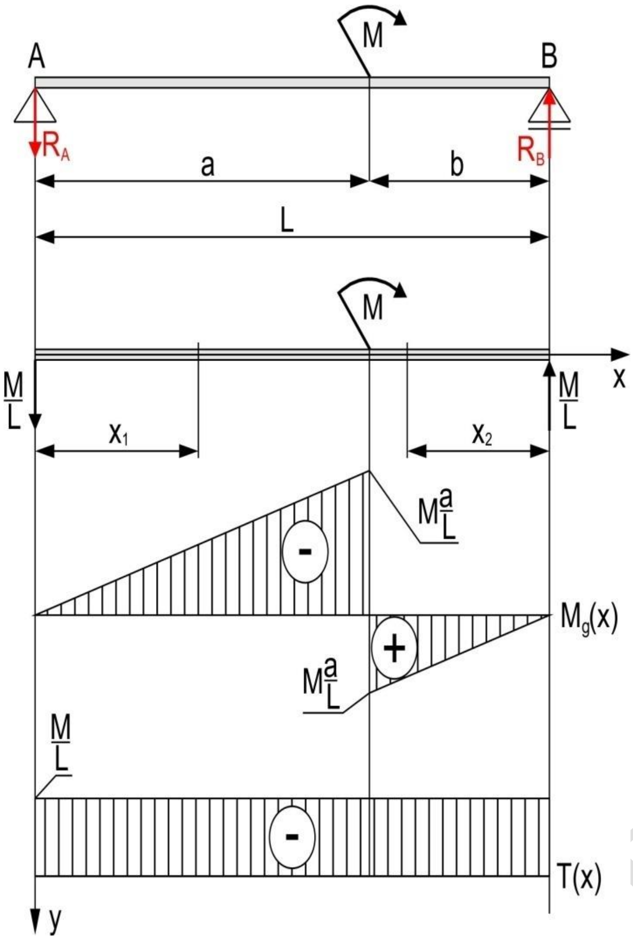
$$T_{x_1} = P\frac{b}{L} = const.$$

$$0 \le x_2 \le b$$

$$M_{gx_2} = P\frac{a}{L} \cdot x_2$$

$$M_{gx_2|x_2=0} = 0\,; \quad M_{gx_2|x_2=b} = P\frac{a \cdot b}{L}$$

$$T_{x_2} = P\frac{a}{L} = const.$$



Reactje więzów:

$$\sum M_A = 0 \to R_B \cdot L = M \to R_B = \frac{M}{L}$$
$$\sum M_B = 0 \to R_A \cdot L = M \to R_A = \frac{M}{L}$$

$$0 \le x_1 \le a$$

$$M_{gx_1} = -\frac{M}{L} \cdot x_1$$

$$M_{gx_1|x_1=0} = 0\,; \;\; M_{gx_1|x_1=a} = -M\frac{a}{L}$$

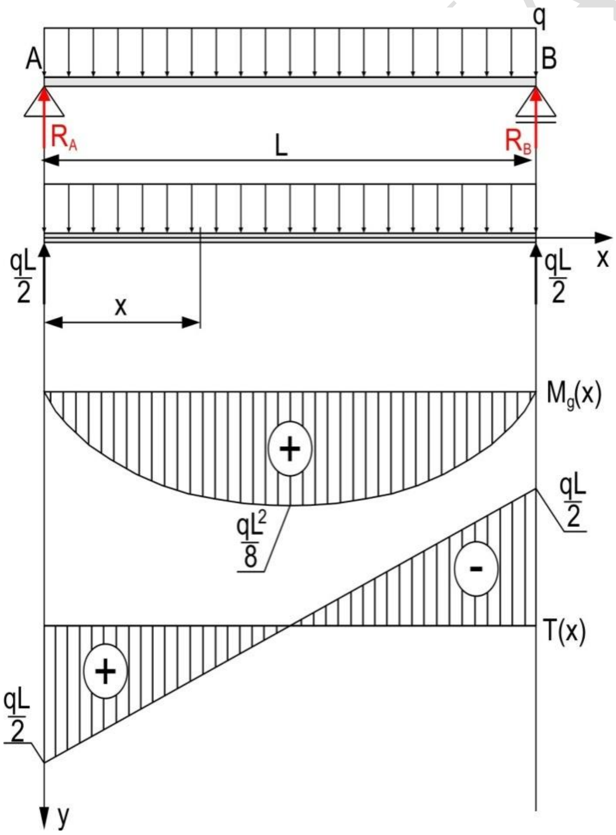
$$T_{x_1} = -\frac{M}{L} = const.$$

$$0 \le x_2 \le b$$

$$M_{gx_2} = \frac{M}{L} \cdot x_2$$

$$M_{gx_2|x_2=0} = 0\,; \;\; M_{gx_2|x_2=b} = M\frac{b}{L}$$

$$T_{x_2} = -\frac{M}{L} = const.$$



Reakcje więzów:

$$R_A = R_B = \frac{1}{2} q x^2$$

$$0 \le x \le L$$

$$M_{gx} = \frac{qL}{2} \cdot x - \frac{1}{2} q \cdot x^2$$

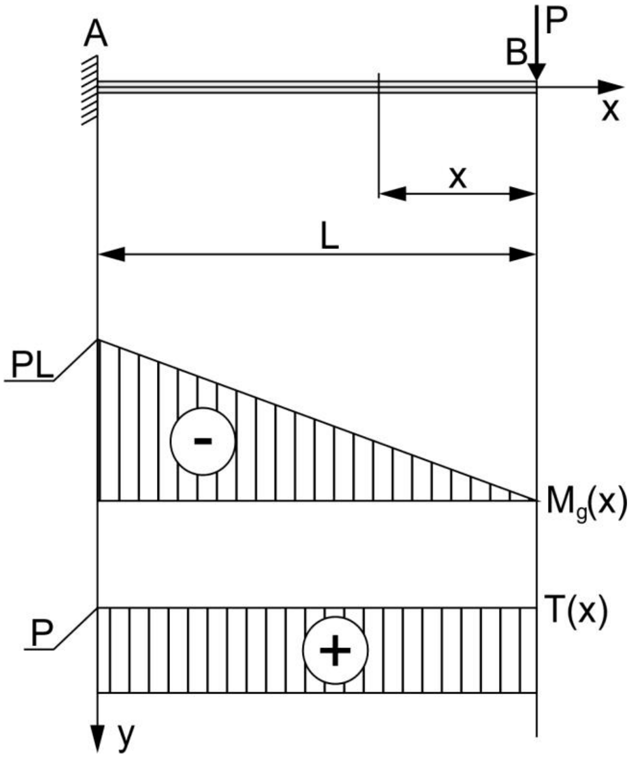
$$M_{gx}\Big|_{x=0} = 0 \;;\;\; M_{gx}\Big|_{x=L} = 0$$

$$T_x = \frac{1}{2} qL - qx$$

$$T_x|_{x=0} = \frac{1}{2} qL \quad ; \quad T_x|_{x=L} = -\frac{1}{2} qL$$

$$\frac{1}{2} qL - qx_0 = 0 \;\to\; x_0 = \frac{1}{2} L$$

$$M_{gx}\Big|_{x=\frac{1}{2}L} = \frac{qL^2}{4} - \frac{qL^2}{8} = \frac{qL^2}{8}$$



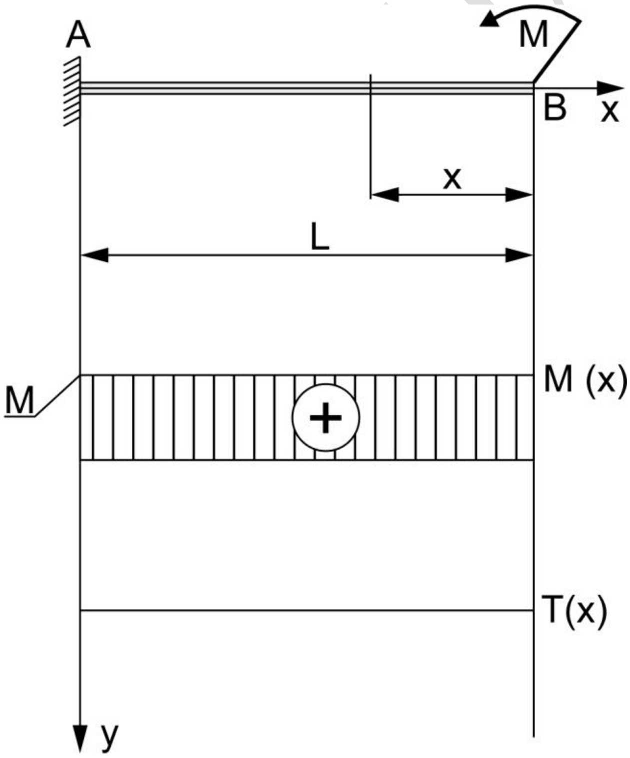
$$0 \leq x \leq L$$

$$M_{gx} = -P \cdot x$$

$$M_{gx}\big|_{x=0} = 0$$

$$M_{gx}\big|_{x=L} = -PL$$

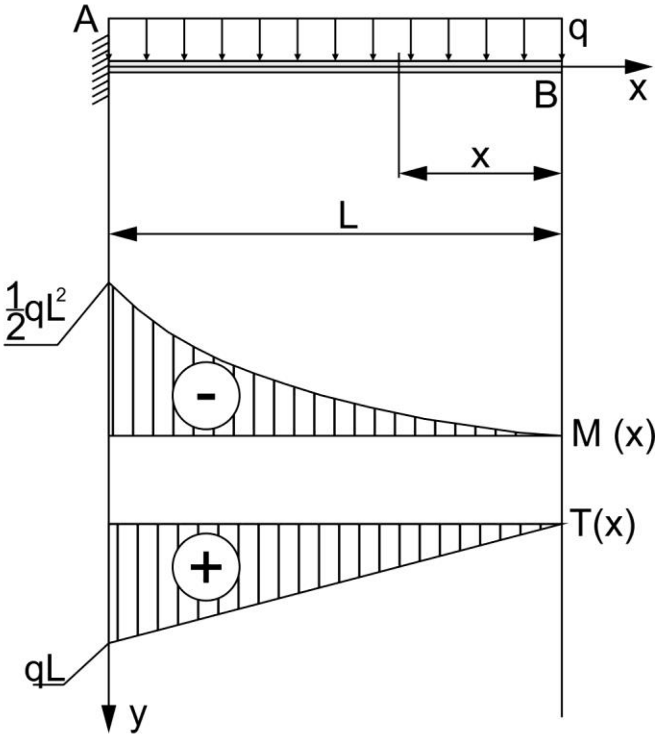
$$T_x = P = const.$$



$$0 \leq x \leq L$$

$$M_{gx} = M = const.$$

$$T_x = 0$$



$$0 \leq x \leq L$$

$$M_{gx} = -\frac{1}{2}qx^2$$

$$M_{gx}\big|_{x=0} = 0$$

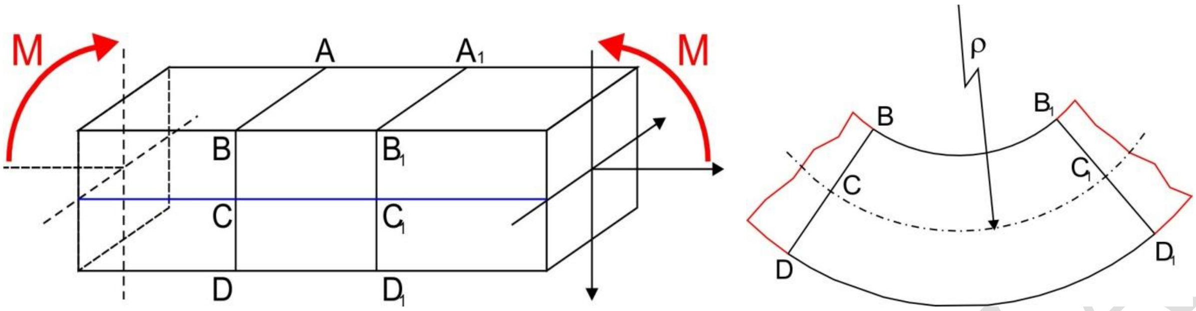
$$M_{gx}\big|_{x=L} = -\frac{1}{2}\,qL^2$$

$$T_x = qx$$

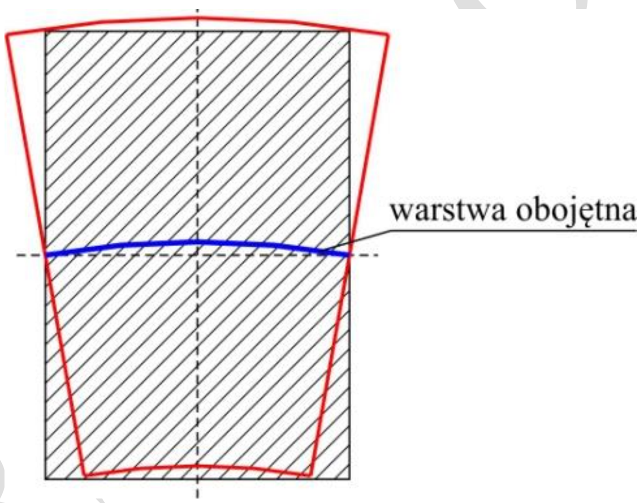
$$T_x|_{x=0} = 0 \quad ; \quad T_x|_{x=L} = qL$$

2) Czyste zginanie – analiza naprężeń i odkształceń.

Rozpatrujemy pręt posty, o przekroju prostokątnym, poddany czystemu zginaniu.

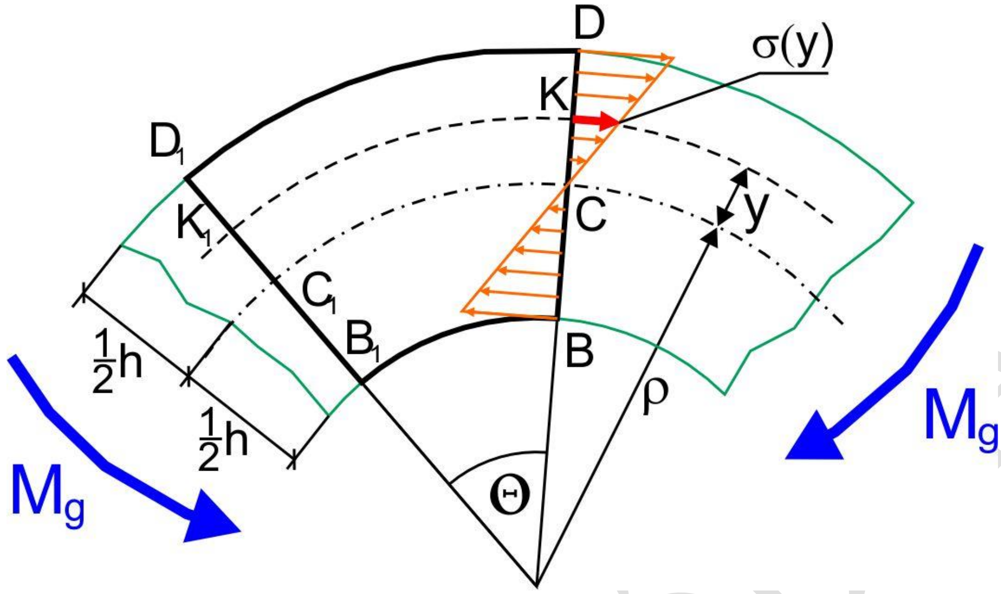


W przypadku czystego zginania **ρ=const**.
Obowiązuje hipoteza płaskich przekrojów.
Włókna DD_1 ulegają wydłużeniu, włókna BB_1 skróceniu. Włókna CC_1 nie zmieniają swojej długości.



Włókna położone w poziomej płaszczyźnie symetrii **xz** nie ulegają ani wydłużeniu, ani skróceniu, a zatem naprężenia w tych włóknach są równe zero. Powierzchnię utworzoną z tych włókien nazywamy ***warstwą obojętną***. Krawędź przecięcia się warstwy obojętnej z płaszczyzną przekroju poprzecznego pręta zginanego, nazywamy ***osią obojętną*** tego przekroju.

Rozpatrujemy wyodrębniony myślowo fragment pręta poddanego czystemu zginaniu.



Włókno **CC₁** należy do warstwy obojętnej, zatem jego długość po odkształceniu nie uległa zmianie i wynosi:

$CC_1 = \rho \cdot \Theta$

Włókno **KK₁** przed odkształceniem miało długość równą **CC₁**, natomiast po odkształceniu:

$KK_1 = (\rho + y) \cdot \Theta$

Wydłużenie względne włókna wynosi:

$$\varepsilon = \frac{KK_1 - CC_1}{CC_1} = \frac{(\rho + y) \cdot \Theta - \rho \cdot \Theta}{\rho \cdot \Theta} = \frac{y}{\rho} \qquad (7)$$

Zgodnie z prawem Hooke'a, włókno to rozciągane jest naprężeniem:

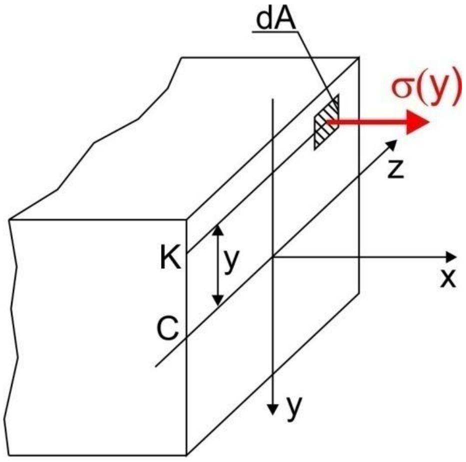
$\sigma_y = \varepsilon \cdot E$

Zatem:

$$\sigma_y = \frac{y}{\rho} \cdot E \quad (8)$$

Promień krzywizny **ρ** jest stały, zatem naprężenia w poszczególnych punktach przekroju pręta zginanego zmieniają się proporcjonalnie do odległości tych punktów od osi obojętnej.

Naprężenia te muszą zapewniać równowagę statyczną rozpatrywanej części pręta:



Siła elementarna wynosi: $dP = \sigma(y)dA$
Po podstawieniu zależności (8):

$$dP = \frac{y}{\rho} \cdot E \cdot dA \qquad (9)$$

Z warunku równowagi statycznej wynika, że suma sił elementarnych w całym przekroju pręta wynosi 0:

$$\int_A dP = 0 \rightarrow \int_A \frac{y}{\rho} \cdot E \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y \cdot dA = 0 \quad (10)$$

Ponieważ **E** i **ρ** są różne od zera, równanie (10) spełnione jest gdy:

$$\int_A y \cdot dA = 0\,,$$

A zatem kiedy moment statyczny pola przekroju względem osi obojętnej jest równy zero.

Oznacza to, że oś obojętna musi pokrywać się z osią centralną przekroju, a zatem warstwa obojętna przechodzi przez środki ciężkości przekrojów poprzecznych pręta.

<u>Uwaga!</u>
Ze względu na małe odkształcenia, przyjmuje się, ze oś obojętna jest prostą, a warstwa obojętna – powierzchnią walcową.

Moment elementarnej siły **dP** względem osi obojętnej wynosi:

$$dM = dP \cdot y \qquad (11)$$

Z warunku równowagi momentów dla rozpatrywanej części pręta wynika:

$$M_g = \int_A dM = \int_A dP \cdot y = \int_A \frac{y}{\rho} \cdot E \cdot y \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot J_Z \quad (12)$$

Równanie (12) można zapisać w postaci:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_g}{E \cdot J_Z} \qquad (13)$$

Z równania (8) otrzymujemy:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma_y}{E \cdot y} \qquad (14)$$

Porównując związki (13) i (14) otrzymujemy:

$$\frac{M_g}{E \cdot J_Z} = \frac{\sigma_y}{E \cdot y} \tag{15}$$

Stąd:

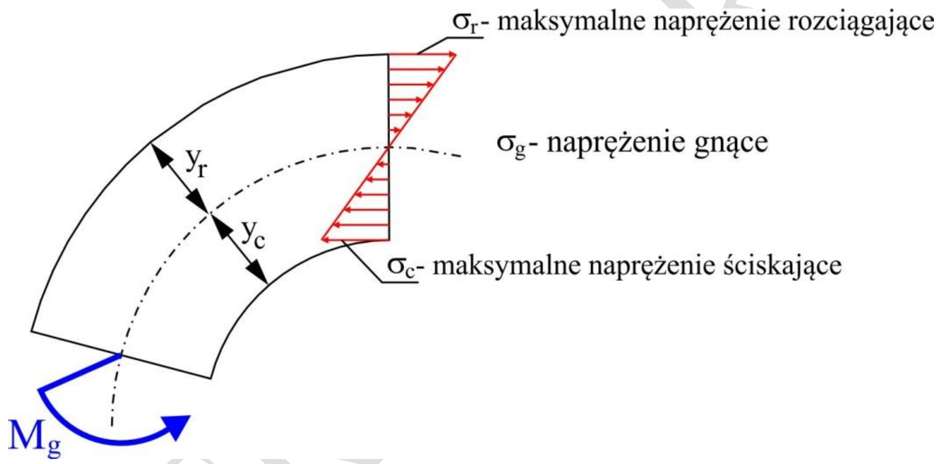
$$\boldsymbol{\sigma_y = \frac{M_g}{J_Z} \cdot y} \tag{16}$$

Powyższa formuła pozwala wyznaczyć wartość naprężenia normalnego w dowolnym punkcie przekroju poprzecznego pręta zginanego, w funkcji obciążenia.

Z wyrażenia (16) wynika, że największe wartości przyjmują naprężenia w włóknach najbardziej oddalonych od osi obojętnej.

Jeżeli odległości skrajnych włókien ściskanych i rozciąganych od osi obojętnej są równe, to wartości największych naprężeń rozciągających i ściskających są równe. Dla uproszczenia nazywamy je ***naprężeniami gnącymi***.

Wprowadzamy następujące oznaczenia:



Jeżeli $\boldsymbol{y_r = y_c = y_{max}}$, to: $\boldsymbol{\sigma_{max} = \sigma_r = |\sigma_c| = M_g \frac{y_{max}}{J_z}}$

$$\boldsymbol{W_z = \frac{J_z}{y_{max}}} - \textit{wskaźnik wytrzymałości przekroju na zginanie}$$

Zatem:

$$\boldsymbol{\sigma_g = \frac{M_g}{W_z}}$$

W tym przypadku warunek wytrzymałościowy przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{\sigma_g = \frac{M_g}{W_z} \le k_g} \quad ; \; k_g - \textit{wytrzymałość dopuszczalna na zginanie}$$

Jeżeli $y_r \neq y_c$, to:

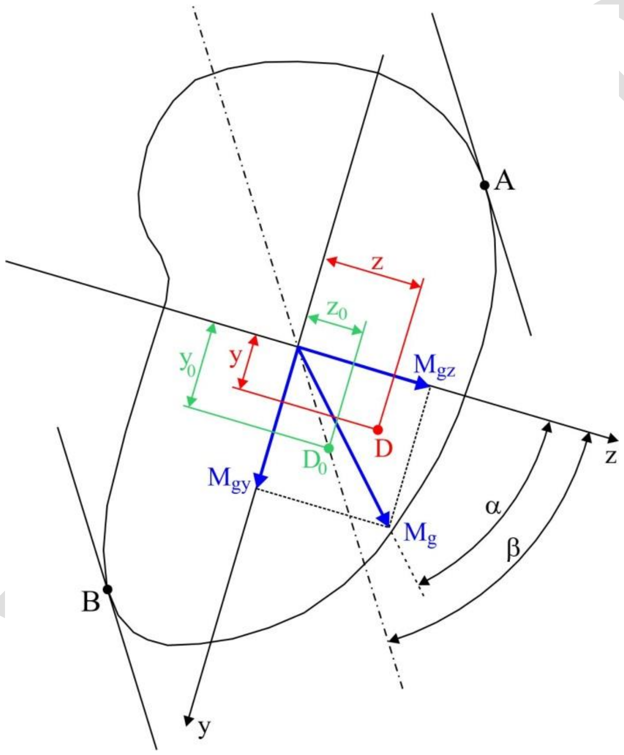
$$\boldsymbol{\sigma_r = M_g \frac{y_r}{J_z}} \;\; ; \;\; \boldsymbol{W_{zr} = \frac{J_z}{y_r}} \;\; ; \;\; \boldsymbol{\sigma_r = \frac{M_g}{W_{zr}} \leq k_r} \; - \;\; dla\ włókien\ rozciąganych$$

$$\boldsymbol{\sigma_c = M_g \frac{y_c}{J_z}} \;\; ; \;\; \boldsymbol{W_{zc} = \frac{J_z}{y_c}} \;\; ; \;\; \boldsymbol{\sigma_c = \frac{M_g}{W_{zc}} \leq k_c} \; - \;\; dla\ włókien\ ściskanych$$

3) Zginanie ukośne.

Zginanie nazywamy ukośnym, jeżeli kierunek wektora momentu gnącego nie pokrywa się z kierunkiem jednej z głównych centralnych osi bezwładności przekroju.

Rozpatrujemy dowolny przekrój pręta obciążonego momentem gnącym $\mathbf{M_g}$, którego kierunek względem układu osi głównych centralnych określony jest kątem $\boldsymbol{\alpha}$.



Wektor momentu gnącego można rozłożyć na dwie składowe:

$$M_{gy} = M_g \cdot sin\alpha$$
$$M_{gz} = M_g \cdot cos\alpha \qquad (17)$$

Naprężenie normalne w punkcie **D(y,z)** można wyznaczyć jako sumę naprężeń spowodowanych dwoma zginaniami prostymi, których superpozycja stanowi zginanie ukośne.

$$\sigma_D = M_{gy} \frac{z}{J_y} + M_{gz} \frac{y}{J_z} \qquad (18)$$

Uwzględniając zależność (17):

$$\sigma_D = M_g \left(\frac{z \cdot sin\alpha}{J_y} + \frac{y \cdot cos\alpha}{J_z} \right) \quad (19)$$

W celu określenia równania osi obojętnej przekroju przyrównujemy $\boldsymbol{\sigma=0}$. Równanie jest spełnione gdy:

$$\frac{z_0 \cdot sin\alpha}{J_y} + \frac{y_0 \cdot cos\alpha}{J_z} = 0 \quad , \tag{20}$$

gdzie y_0, z_0 są współrzędnymi dowolnego punktu $\mathbf{D_0}$ leżącego na osi obojętnej.

Załóżmy, że orientację osi obojętnej przekroju, która, jak wykazano wcześniej, musi przechodzić przez jego środek ciężkości, względem osi głównych centralnych, określa kąt $\boldsymbol{\beta}$:

$$\frac{y_0}{z_0} = tg\beta \tag{21}$$

Równanie (20) można zapisać:

$$\frac{y_0}{z_0} = -\frac{J_z}{J_y} tg\alpha \tag{22}$$

Zatem z (21) i (22):

$$tg\beta = -\frac{J_z}{J_y} tg\alpha \quad (23)$$

Położenie osi obojętnej zależy zatem od kierunku wektora momentu gnącego i od stosunku dwóch głównych centralnych momentów bezwładności.

Kierunek osi obojętnej w zginaniu ukośnym nie pokrywa się z kierunkiem wektora momentu gnącego.

Największe wartości naprężeń występują w punktach A i B, na konturze przekroju, najbardziej oddalonych od osi obojętnej.