Przedstawimy teraz ogólną wersję twierdzenia o funkcjach uwikłanych

Mamy dany układ równań

$$F_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0$$
$$F_2(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \qquad (*)$$
$$\vdots$$
$$F_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0$$

Układ ten chcemy rozwikłać względem zmiennych $y_1, \dots, y_n$, tzn. szukamy układu postaci

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_m)$$
$$y_2 = f_2(x_1, \dots, x_m) \qquad (**)$$
$$\vdots$$
$$y_n = f_n(x_1, \dots, x_m),$$

lokalnie równoważnego układowi $(*)$. Zwykle piszemy:

- $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$
- lewą stronę układu $(*)$ zapisujemy $F(x,y)$
- cały układ $(*)$ zapisujemy $F(x,y) = 0$
- układ $(**)$ zapisujemy $y = f(x)$.

- oznaczenia

$$[f'(x)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{bmatrix}$$

$$[F'_x(x,y)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x,y) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m}(x,y) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x,y) & & \frac{\partial F_n}{\partial x_m}(x,y) \end{bmatrix}$$

$$[F'_y(x,y)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x,y) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}(x,y) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1}(x,y) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(x,y) \end{bmatrix}$$

macierz kwadratowa — jest odwracalna wtedy gdy jej wyznacznik jest $\neq 0$.

Twierdzenie (o funkcji uwikłanej)

Niech U będzie otoczeniem punktu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{m+n}$.

Jeśli odwzorowanie $F: U \to \mathbb{R}^n$ spełnia warunki

1°. F jest klasy $C^{(p)}$ $(p \geq 1)$

2°. $F(x_0, y_0) = 0$

3°. macierz $[F'_y(x_0, y_0)]$ jest odwracalna

to istnieją:

$(m+n)$ – wymiarowy "prostokąt" $I = I_x^m \times I_y^n \subset U$, gdzie

$I_x^m = \{x \in \mathbb{R}^m : |x_i - x_{0i}| < \alpha$ dla $i = 1, \dots, m\}$,

$I_y^n = \{y \in \mathbb{R}^n : |y_j - y_{0j}| < \beta$ dla $j = 1, \dots, n\}$

i odwzorowanie $f: I_x^m \to I_y^n$ klasy $C^{(p)}$ takie, że dla dowolnego $(x, y) \in I$:

równość $F(x, y) = 0 \iff$ równości $y = f(x)$.

Ponadto macierz Jacobiego odwzorowania f jest równa

$$[f'(x)] = - \left[F'_y(x, f(x))\right]^{-1} \left[F'_x(x, f(x))\right].$$

Definicja

Niech G, D będą otwartymi podzbiorami przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Odwzorowanie $f: G \to D$ nazywamy dyfeomorfizmem, klasy $C^{(p)}$, gdzie $p = 1, 2, \dots, \infty$, jeśli jest ono bijekcją oraz f i f^{-1} są funkcjami klasy $C^{(p)}$.

Dyfeomorfizmy klasy C^1 nazywamy krótko dyfeomorfizmami.

Czyli dyfeomorfizm to odwzorowanie $f: G \to D$, które:
- jest bijekcją
- f i f^{-1} są klasy C^1.

Twierdzenie (o funkcji odwrotnej)

Niech G będzie obszarem w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Jeśli odwzorowanie $f: G \to \mathbb{R}^n$ spełnia:

1° jest klasy $C^{(p)}$, gdzie $p \geq 1$

2° $y_0 = f(x_0)$ dla pewnego $x_0 \in G$

3° macierz $[f'(x_0)]$ jest odwracalna

to istnieją: otoczenie $U \subset G$ punktu x_0 i otoczenie V punktu y_0 takie, że $f: U \to V$ jest dyfeomorfizmem klasy $C^{(p)}$. Przy tym, jeśli $x \in U$ i $y = f(x) \in V$, to

$$[(f^{-1})'(y)] = [f'(x)]^{-1}.$$

UWAGA : jeśli $f: G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$, to

$$f(x) = [f(x_1, x_2, \dots, x_n)] = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

wtedy oznaczamy :

$$[f'(x)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

DOWÓD :

Zdefiniujmy funkcję $F: G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ wzorem

$$F(x,y) = f(x) - y .$$

wtedy :

$$y = f(x) \iff F(x,y) = 0 .$$

Chcemy rozwiązać $F(x,y) = 0$ względem zmiennej x w pewnym otoczeniu punktu $(x_0, y_0) \in G \times \mathbb{R}^n$.

z założeń 1°, 2°, 3° twierdzenia wynika, że i

- F jest klasy $C^{(p)}$
- $F(x_0, y_0) = 0$
- macierz $[F'_x(x_0, y_0)] = [f'(x_0)]$ jest nieosobliwa.

Na mocy TFU istnieją przedziały I_x, I_y zawierające punkty x_0, y_0 oraz odwzorowanie $g: I_y \to I_x$ klasy $C^{(p)}$ takie, że dla dowolnego punktu $(x,y) \in I_x \times I_y$ zachodzi

$$f(x)-y=0 \iff x=g(y), \qquad (***)$$

$$[g'(y)] = -[F'_x(x,y)]^{-1}\,[F'_y(x,y)].$$

W naszym przypadku jest:

$$[F'_x(x,y)] = [f'(x)], \quad [F'_y(x,y)] = -Id_{R^n},$$

zatem

$$[g'(y)]=[f'(x)]^{-1}. \qquad (\heartsuit)$$

Jeżeli weźmiemy teraz $V=I_x$, $U=g(V)$ to $(***)$ daje, że funkcje $f: U\to V$ i $g: V\to U$ są wzajemnie odwrotne, tzn. $g=f^{-1}$ na zbiorze V.

Ponieważ $V=I_y$, to V jest otwarty i zawiera y_0. Zatem przy założeniach $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ obraz $y_0=f(x_0)$ punktu x_0 wewnętrznego w zbiorze G, jest punktem wewnętrznym dla obrazu $f(G)$. Na mocy $(\heartsuit)$ macierz $[g'(y)]$ jest odwracalna, zatem odwzorowanie $g: V\to U$ ma własności $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ dla obrazu V i punktu $y_0\in V$. Wtedy $x_0=g(y_0)$ jest punktem wewnętrznym zbioru $U=g(V)$.

Ponieważ $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ zachodzą w dowolnym punkcie $y \in V$, to $x = g(y)$ jest punktem wewnętrznym zbioru U. Zatem U jest zbiorem otwartym (i oczywiście spójnym) zawierającym punkt x_0. Pokazaliśmy więc, że odwzorowanie $f: U \to V$ spełnia warunki na dyfeomorfizm klasy $C^{(p)}$. $\square$

<u>Uwaga</u>: Rozważmy $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taką, że $f' \neq 0$. Wtedy f jest wzajemnie jednoznaczna na całej dziedzinie, więc odwracalna.

Natomiast w przypadku wyższej liczby zmiennych warunek ten oznacza, że jest LOKALNIE wzajemnie jednoznaczna, tzn. każdy punkt ma otoczenie, na którym funkcja jest wzajemnie jednoznaczna.

Jednak f nie musi być wzajemnie jednoznaczna na całej dziedzinie!

Przykład

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x,y) = (e^x \cos y \,,\, e^x \sin y)$$

Wtedy

$$\det\left[f'(x,y)\right] = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \cos y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

dla każdego $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

ale $f(0,0) = f(0,2\pi)$.