Funkcje uwikłane

Weźmy funkcję $F: D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^2$ jest obszarem i załóżmy, że F jest ciągła na D.
Rozważmy zbiór

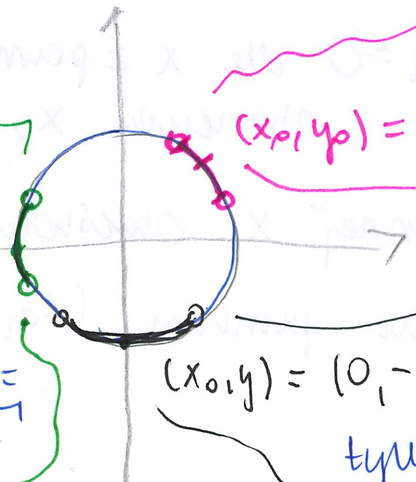
$$A = \{ (x,y) \in D : F(x,y) = 0 \}$$

i weźmy punkt $(x_0, y_0) \in E$.

Pytanie: Kiedy przez punkt (x_0, y_0) przechodzi ciągła krzywa o równaniu $y = y(x)$, zawarta w A? Albo krzywa o równaniu $x = x(y)$, zawarta w A? Jeśli taka krzywa istnieje, to jest ona wyznaczona jednoznacznie, czy też takich krzywych jest więcej?

Przykład $\quad F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$A = \{ (x,y) : x^2 + y^2 = 1 \}$ okrąg o środku $(0,0)$ i promieniu 1



$(x_0, y_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

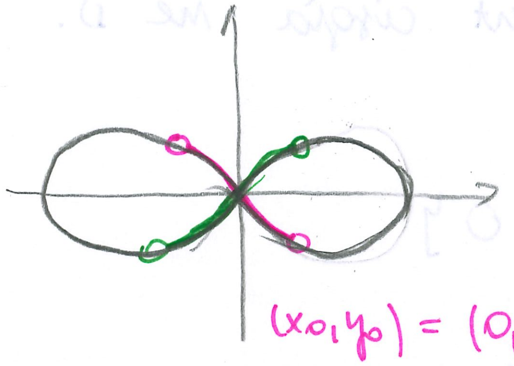
$y = y(x) = \sqrt{1-x^2}$
$x = x(y) = \sqrt{1-y^2}$ ta sama krzywa

$(x_0, y_0) = (-1, 0)$ tylko $x = x(y) = -\sqrt{1-y^2}$

$(x_0, y) = (0, -1)$ tylko $y = y(x) = -\sqrt{1-x^2}$

Przykład $F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$

$A = \{(x,y) : (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0\}$ lemniskata Bernoulliego



$(x_0,y_0) = (0,0)$

tutaj mamy więcej niż jedną krzywą (funkcji)

Definicja Każdą funkcję $y(x)$ spełniającą równość $F(x, y(x)) = 0$ dla x z pewnego przedziału nazywamy funkcją uwikłaną zmiennej x określoną przez równanie $F(x,y)=0$. Analogicznie definiujemy funkcję uwikłaną zmiennej y ($x = x(y)$, gdzie y należy do pewnego przedziału).

Definicja Dla punktu (x_0,y_0) takiego, że $F(x_0,y_0)=0$ funkcję $y(x)$ spełniającą:

$y(x_0) = y_0$

$F(x,y(x)) = 0$ dla x z pewnego otoczenia x_0

nazywamy funkcją uwikłaną zmiennej x określoną równaniem $F(x,y)=0$ w otoczeniu punktu (x_0,y_0).

Analogicznie, funkcję $x(y)$ spełniającą:

$$x(y_0) = x_0$$

$$F(x(y), y) = 0 \quad \text{dla } y \text{ z pewnego otoczenia } y_0$$

nazywamy funkcją uwikłaną zmiennej y określoną równaniem $F(x,y)=0$ na otoczeniu punktu (x_0, y_0).

Pytanie: Jak w analityczny sposób stwierdzić, czy zbiór punktów określony wzorem $F(x,y)=0$ może być w otoczeniu pewnego punktu (x_0,y_0) przedstawiony w postaci wykresu funkcji

$$y = f(x) \quad \text{lub} \quad x = g(y) \quad ?$$

Odpowiedź na to pytanie daje poniższe tw.:

Twierdzenie (o funkcji uwikłanej)

Niech funkcja $F: U \to \mathbb{R}$ określona na otoczeniu $U = U(x_0,y_0)$ punktu $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ spełnia warunki:

1) F jest klasy $C^{(p)}$ $(p \geq 1)$

2) $F(x_0,y_0) = 0$

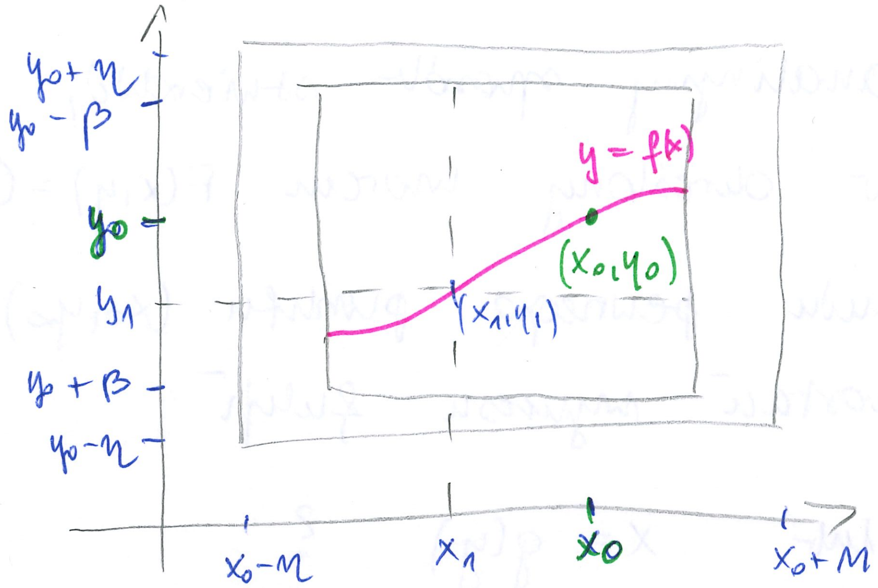
3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$.

Wówczas istnieje $I = I_x \times I_y$, gdzie $I_x = \{x \in \mathbb{R} : |x-x_0| < \alpha\}$, $I_y = \{y \in \mathbb{R} : |y-y_0| < \beta\}$, $I \subset U$ oraz funkcja $f: I_x \to I_y$ klasy $C^{(p)}$, że dla dow. $(x,y) \in I$ mamy:

równość $F(x,y)=0 \iff$ równość $y = f(x)$.

Ponadto, pochodna funkcji f w punkcie $x \in I_x$ dana jest wzorem:

$$\boxed{y'(x) = f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}}$$



Dowód: Bez straty ogólności możemy założyć, że $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)>0$ (w przeciwnym przypadku zamiast F weźlibyśmy funkcję $-F$).

Z założenia 1) mamy: $\frac{\partial F}{\partial y}$ jest ciągła, zatem istnieje kwadrat $Q=[x_0-\eta,x_0+\eta]\times[y_0-\eta,y_0+\eta]\subset U$, na którym $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)>0$.

Niech $0<\beta\le\eta$. Wtedy funkcja $y\mapsto F(x_0,y)$ na przedziale $[y_0-\beta,y_0+\beta]$ jest rosnąca, gdyż na tym przedziale $\frac{\partial F}{\partial y}>0$. Zatem:

$$F(x_0,y_0-\beta)<F(x_0,y_0)=0<F(x_0,y_0+\beta).$$

Funkcje:

$$x\mapsto F(x,y_0-\beta)$$
$$x\mapsto F(x,y_0+\beta)$$

są ciągłe w punkcie x_0, więc

istnieje liczba $0 < \alpha \leq \eta$ taka, że dla $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ zachodzi:

$$F(x, y_0 - \beta) < 0 < F(x, y_0 + \beta).$$

W następnym kroku dowodu pokazujemy, że prostokąt

$$I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$$

jest prostokątem I z tezy twierdzenia.

Niech x_1 będzie dowolnym punktem przedziału otwartego $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$. Funkcja ciągła $y \mapsto F(x_1, y)$ przyjmuje na końcach przedziału $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ wartości różnych znaków, więc ist. $y_1 = y(x_1) \in (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$, takie, że $F(x_1, y(x_1)) = 0$. Punkt y_1 jest wyznaczony jednoznacznie, bo funkcja $y \mapsto F(x_1, y)$ jest rosnąca.

Przyjmując $f(x) = y(x)$, dostajemy funkcję określoną na przedziale I_x o wartościach w I_y i spełniającą równość:

$$F(x, f(x)) = 0,$$

mamy przy tym $y_0 = f(x_0)$, bo $F(x_0, y_0) = 0$.

Następnie w dowodzie pokazuje się, że:

- f jest ciągła w każdym punkcie x przedziału I_x
- f jest klasy $C^{(1)}$ (i klasy $C^{(p)}$, gdy F jest klasy $C^{(p)}$)
- zachodzi wzór $f'(x) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$ □

Uwaga: Jeśli funkcja F jest klasy C^2, to otrzymujemy wzór na drugą pochodną f:

$$f''(x) = -\frac{\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cdot f'(x)\right]\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot f'(x)\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}$$

po uproszczeniu:

$$\boxed{f''(x) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}}$$

Wróćmy do naszego pierwszego dwuwymiarowego przykładu

$$F(x,y) = x^2+y^2-1$$

1) F jest klasy C^1, gdyż

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y \text{ — ciągłe}$$

$$(x_0,y_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} > 0 \quad (\neq 0)$$

zatem istnieje $I = \overbrace{(x_0-\alpha, x_0+\alpha)}^{I_x} \times \overbrace{(y_0-\beta, y_0+\beta)}^{I_y}$

oraz $y: I_x \to I_y$ klasy C^1, że dla dow. $(x,y) \in I$

mamy $F(x,y)=0 \Leftrightarrow y=f(x)$

oraz $f'(x) = -\frac{2x}{2f(x)} = -\frac{x}{f(x)}$

w szczególności: $y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$

Faktycznie: $y(x) = \sqrt{1-x^2}$

$$y'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{f(x)}$$

$(x_0, y_0) = (-1, 0)$ $\quad F(-1,0) = 0$, ale

$\frac{\partial F}{\partial y}(-1,0) = 0$ więc nie możemy

stosować tw. o funkcji uwikłanej

widzimy, że w tym punkcie funkcji $y = y(x)$

nie ma

ALE: $\frac{\partial F}{\partial x}(-1,0) = -2 \neq 0$!

więc istnieje $x = x(y)$ na pewnym prostokącie $I = I_y \times I_x$

takie, że $F(x,y) = 0 \iff x = x(y)$

w szczególności $-1 = x(0)$

oraz

$$x'(y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x(y), y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x(y), y)} = -\frac{y}{x(y)}$$

Faktycznie: $x(y) = \sqrt{1-y^2}$

$$x'(y) = \frac{-2y}{2\sqrt{1-y^2}} = -\frac{y}{x(y)}$$

Wróćmy teraz do naszego drugiego przykładu

$$F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$$

1) F jest klasy C^1

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x^2+y^2)\cdot 2x - 4x = 4x(x^2+y^2-1)$$

ciągłe

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2(x^2+y^2)\cdot 2y + 4y^4 = 4y(x^2+y^2+1)$$

2) Weźmy (x,y) takie, że $F(x,y)=0$

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0 \quad \forall_{(x,y)}$ takiego, że $x\in\mathbb{R}$, $y\neq 0$

<u>ZATEM</u>: dla dowolnego punktu (x_0,y_0) takiego, że $F(x_0,y_0)=0$ oraz $y_0\neq 0$ istnieje funkcja uwikłana $y(x): I_x \to I_y$ (czyli istnieje lokalnie) której pochodna jest równa:

$$y'(x) = \frac{x\,(x^2+y^2(x)-1)}{y(x)\,(x^2+y^2(x)+1)}$$

<u>NATOMIAST</u>: jak wygląda sytuacja w punktach (x_0,y_0) takich, że $F(x_0,y_0)=0$ oraz $y_0=0$?

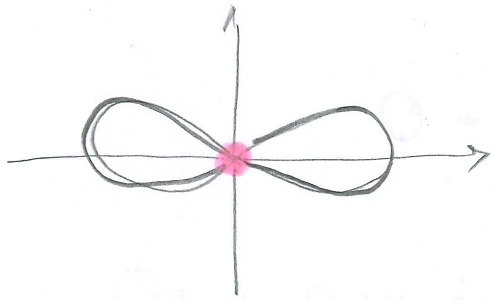
Gdy $y_0 = 0$, to $F(x_0, 0) = 0 \iff x_0^2(x_0^2 - 2) = 0 \iff$

$$x_0 = 0 \lor x_0 = \sqrt{2} \lor x_0 = -\sqrt{2}$$

Czyli zostały trzy punkty do rozważenia:

DLA $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$$



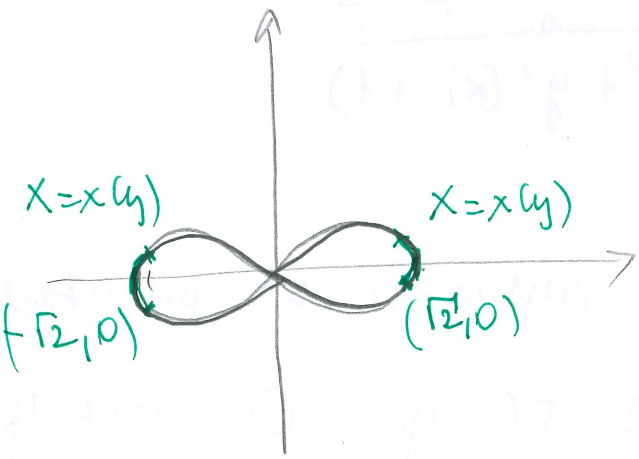
Jest to tzw. punkt osobliwy – brak jednoznaczności funkcji uwikłanej na otoczeniu $(0,0)$ – jest to tzw.

PUNKT ROZGAŁĘZIENIA

DLA $(x_0, y_0) = (\pm\sqrt{2}, 0)$

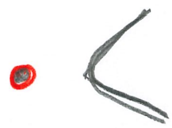
$$\frac{\partial F}{\partial x}(\pm\sqrt{2}, 0) \neq 0$$

więc istnieje funkcja uwikłana $x = x(y)$ na otoczeniu każdego z tych punktów



Uwaga

Gdy $F(x_0,y_0)=0$ i $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=0$, to punkt (x_0,y_0) nazywamy punktem osobliwym krzywej $F(x,y)=0$. Wyróżnia się tzw. punkty osobliwe podwójne (lub dwukrotne), gdy nie wszystkie pochodne cząstkowe rzędu 2 funkcji F w tym punkcie są równe 0. Wśród nich rozróżnia się:

- punkty rozgałęzienia 
- ostrza krzywej 
- punkty odosobnione 

Więcej w [F. Leja, Rachunek różniczkowy i całkowy, VII, § 8 (str. 231)]

Ekstrema funkcji uwikłanej

Twierdzenie

Niech funkcja F ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego (czyli F ma być klasy C^2) na otoczeniu punktu (x_0, y_0). Załóżmy, że

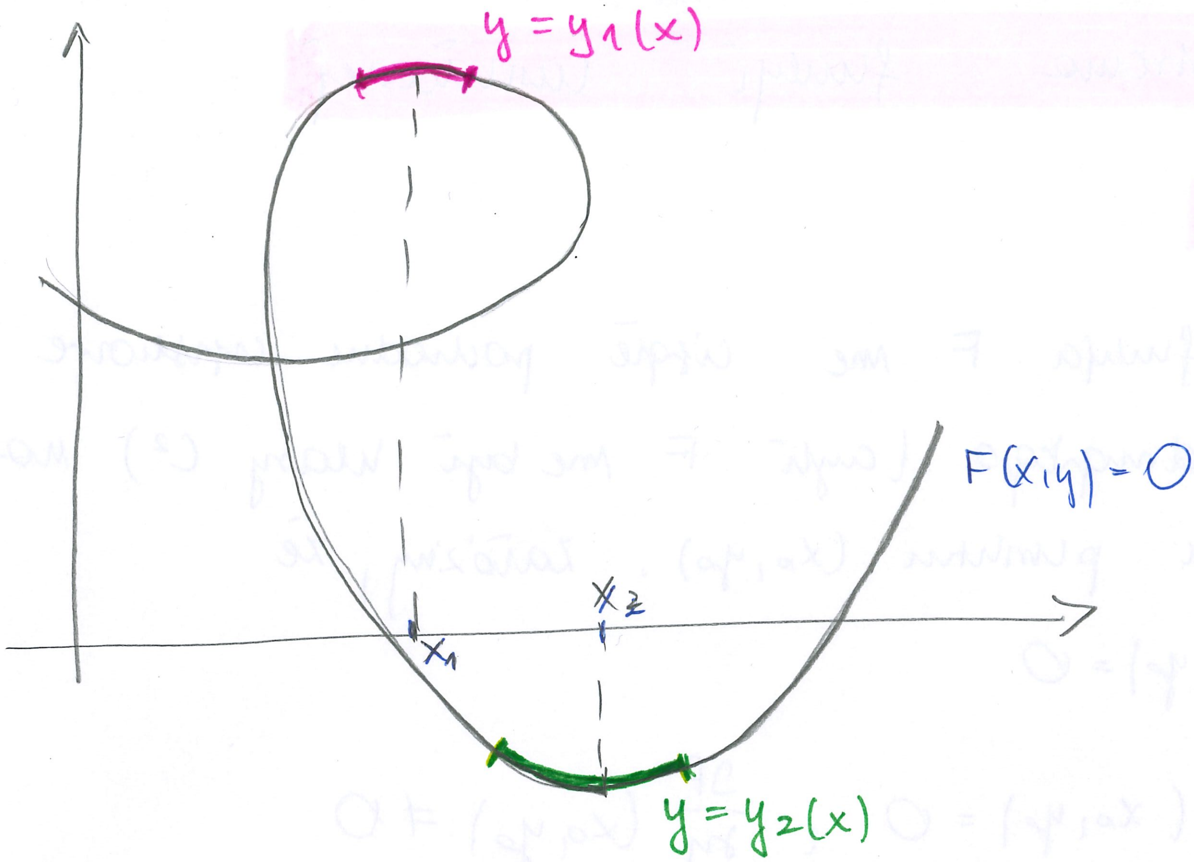
1) $F(x_0, y_0) = 0$

2) $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

3) $$D = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} \neq 0$$

Wtedy funkcja uwikłana $y = y(x)$ określona warunkiem $F(x, y) = 0$ ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne właściwe i jest to:

- minimum, gdy $D > 0$
- maksimum, gdy $D < 0$.



Funkcja uwikłana $y = y_1(x)$ ma w punkcie x_1 maksimum lokalne, zaś funkcja $y = y_2(x)$ ma w punkcie x_2 minimum lokalne.

Jak szukamy ekstremów funkcji uwikłanej

1. Rozwiązujemy układ warunków

$$F(x,y)=0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0$$

i dostajemy punkty podejrzane o ekstremum.

2. W każdym z punktów podejrzanych sprawdzamy warunek:

$$D(x_0,y_0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)} \neq 0$$

Gdy $D(x_0,y_0)>0$, to w (x_0,y_0) jest minimum,
gdy $D(x_0,y_0)<0$, to w (x_0,y_0) jest maksimum.