Ekstrema funkcji n zmiennych

Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie niepustym zbiorem otwartym.

Definicja 47:

Funkcja $f: A \to \mathbb{R}$ ma w punkcie $p_0 \in A$ maksimum lokalne, gdy istnieje sąsiedztwo $S(p_0) \subset A$ takie, że:

$$\forall_{p \in S(p_0)} \quad f(p) \leq f(p_0).$$

Definicja 48

Funkcja $f: A \to \mathbb{R}$ ma w punkcie $p_0 \in A$ minimum lokalne, gdy istnieje sąsiedztwo $S(p_0) \subset A$ takie, że:

$$\forall_{p \in S(p_0)} \quad f(p) \geq f(p_0).$$

Definicja 49

Maksima lokalne i minima lokalne nazywamy ekstremami lokalnymi.

Bardzo często opuszczamy słowo "lokalne" i mówimy maksimum, minimum, ekstremum.

Ekstremum nazywamy właściwym, gdy zamiast nierówności słabej spełnione jest nierówność ostra:

$\forall_{p \in S(p_0)} \; f(p) < f(p_0)$ maksimum właściwe

$\forall_{p \in S(p_0)} \; f(p) > f(p_0)$ minimum właściwe

Twierdzenie 50 (warunek konieczny istnienia ekstremum)

Niech $f: A \to \mathbb{R}$ ma w punkcie $p_0 \in A$ wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu. Jeżeli f ma w punkcie p_0 ekstremum, to:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(p_0) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0) = 0. \quad (K)$$

Punkt p_0, w którym istnieją wszystkie pochodne cząstkowe oraz spełniony jest warunek (K) nazywamy punktem krytycznym lub stacjonarnym funkcji f.

Zatem funkcja f może mieć ekstrema jedynie w punktach stacjonarnych lub w punktach, w których choć jedna pochodna cząstkowa nie istnieje.

Definicja 51:

Forma kwadratowa to funkcja f postaci

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{1n} x_1 x_n +$$
$$+ a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2^2 + \dots + a_{2n} x_2 x_n +$$
$$+ \dots +$$
$$+ a_{n1} x_n x_1 + a_{n2} x_n x_2 + \dots + a_{nn} x_n^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j ,$$

gdzie a_{ij} są zadanymi liczbami takimi, że

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{dla} \quad i,j = 1, 2, \dots, n.$$

Macierz postaci

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{11} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą formy kwadratowej f.

Definicja 52: Formę kwadratową f nazywamy

- **określoną dodatnio**,

  gdy $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ dla wszystkich $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$

- **określoną ujemnie**,

  gdy $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$ dla wszystkich $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$

- **nieokreśloną**,

  gdy przyjmuje zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne.

Twierdzenie Sylvestera:

Niech f będzie formą kwadratową o macierzy A j.w.

Oznaczmy:

$$W_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ii} \end{vmatrix} \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Wtedy forma f jest określona:

- **dodatnio** wtw gdy dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$ zachodzi:

  $W_i > 0$ $\left[\begin{array}{l} W_1 > 0,\ W_2 > 0 \text{ dla } f(x,y) \\ W_1 > 0,\ W_2 > 0,\ W_3 > 0 \text{ dla } f(x,y,z) \end{array} \right]$

- **ujemnie** wtw gdy dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$ zachodzi:

  $(-1)^i W_i > 0$ $\left[\begin{array}{l} W_1 < 0,\ W_2 > 0 \text{ dla } f(x,y) \\ W_1 < 0,\ W_2 > 0,\ W_3 < 0 \text{ dla } f(x,y,z) \end{array} \right]$

Twierdzenie 53: (warunek wystarczający istnienia ekstremum)

Jeżeli funkcja $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jest klasy C^2 w pewnym otoczeniu punktu $p_0 \in A$, gdzie p_0 jest punktem stacjonarnym funkcji f oraz forma kwadratowa

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0) \cdot x_i \cdot x_j$$

jest określona dodatnio [ujemnie], to funkcja f ma w punkcie p_0 minimum lokalne [maksimum lokalne].

Jeżeli forma g jest nieokreślona, to funkcja f nie ma ekstremum w punkcie p_0.

Dla funkcji dwóch zmiennych mamy:

Jeżeli funkcja $f(x,y)$ jest klasy C^2 w pewnym otoczeniu punktu $p_0 \in A \subset \mathbb{R}^2$, gdzie p_0 jest punktem stacjonarnym funkcji f oraz zachodzi warunek

$$W(p_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0) \end{vmatrix} > 0,$$

to f ma w punkcie p_0 ekstremum właściwe i jest to:

- MAKSIMUM, gdy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0) < 0$
- MINIMUM, gdy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0) > 0$.

Gdy $W(p_0) < 0$, to f nie ma ekstremum w p_0.

Gdy $W(p_0) = 0$, to twierdzenie nie rozstrzyga – w p_0 funkcja może mieć lub nie mieć ekstremum.

Przykład Wyznaczyć ekstrema funkcji $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 \qquad D = \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4x + 4y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 4x - 4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 4$$

$$W = \begin{vmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{vmatrix} = W(x,y)$$

szukamy punktów stacjonarnych:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \Big/ +$$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 = -y^3 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y \\ y^3 - 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y \\ y(y^2 - 2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$A(0,0)$ $B(-\sqrt{2}, 2)$ $C(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

punkty stacjonarne

$$W(A) = W(0,0) = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$$ – tw. nie rozstrzyga (w A może być ekstremum lub nie)

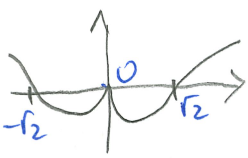
Zbadamy jego istnienie innymi metodami i mamy wtedy:
w punkcie A f nie ma ekstremum, bo gdy przetniemy powierzchnię $z = f(x,y)$ płaszczyzną o równaniu $y = x$, mamy:

$$z = f(x,x) = x^4 + x^4 - 2x^2 + 4x^2 - 2x^2 = 2x^4 > 0 \text{ dla } x \neq 0$$

Zatem na krzywej $z = f(x,x)$ f osiąga dowolnie blisko punktu $(0,0)$ wartości dodatnie.

Ale gdy przetniemy powierzchnię $z = f(x,y)$ płaszczyzną $y = 0$, mamy:

$$z = f(x,0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$



zatem dowolnie blisko punktu $(0,0)$ f osiąga wartości ujemne. Zatem $(0,0)$ nie spełnia definicji ekstremum.

$W(B) = W(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{vmatrix} 12\cdot 2-4 & 4 \\ 4 & 12\cdot 2-4 \end{vmatrix} = 20\cdot 20 - 16 > 0$

ponadto $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\sqrt{2}, 2) = 20 > 0$

zatem w B f osiąga minimum

$W(C) = W(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{vmatrix} 12\cdot 2-4 & 4 \\ 4 & 12\cdot 2-4 \end{vmatrix} = 20\cdot 20 - 16 > 0$

ponadto $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 20 > 0$

zatem w C f osiąga minimum

Dla funkcji trzech zmiennych mamy:

Jeżeli funkcja $f(x,y,z)$ jest klasy C^2 w pewnym otoczeniu punktu $p_0 \in A$, gdzie p_0 jest punktem stacjonarnym funkcji f oraz:

$$W_1(p_0) = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0) \right| > 0 \qquad \left(W_1(p_0) < 0 \right)$$

$$W_2(p_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0) \end{vmatrix} > 0 \qquad \left(W_2(p_0) > 0 \right)$$

$$W_3(p_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(p_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(p_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(p_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(p_0) \end{vmatrix} > 0$$

$$\left(W_3(p_0) < 0 \right)$$

to funkcja f ma w punkcie p_0 minimum lokalne (maksimum lokalne).

Przykład: Znaleźć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xy+x+2z \qquad D=\mathbb{R}^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x-y+1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y-x \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z+2$$

$$\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ 2y-x=0 \quad \Rightarrow \quad x=2y \\ 2z+2=0 \quad \Rightarrow \quad z=-1 \end{cases} \Rightarrow 4y-y+1=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{3}$$

$$x=-\frac{2}{3}$$

$$z=-1$$

$A\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right)$ punkt stacjonarny

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = -1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8-2>0$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4-1=3>0$$

$$W_1 = |2| = 2>0$$

f ma w punkcie $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right)$ minimum lokalne

Definicja 56 $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$ otw., $y = K(x)$ – krzywa zawarta w A

Funkcja $f(x,y)$ ma w punkcie $(x_0,y_0) \in A$ minimum lokalne właściwe z warunkiem $y = K(x)$, jeżeli $y_0 = K(x_0)$ oraz istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że

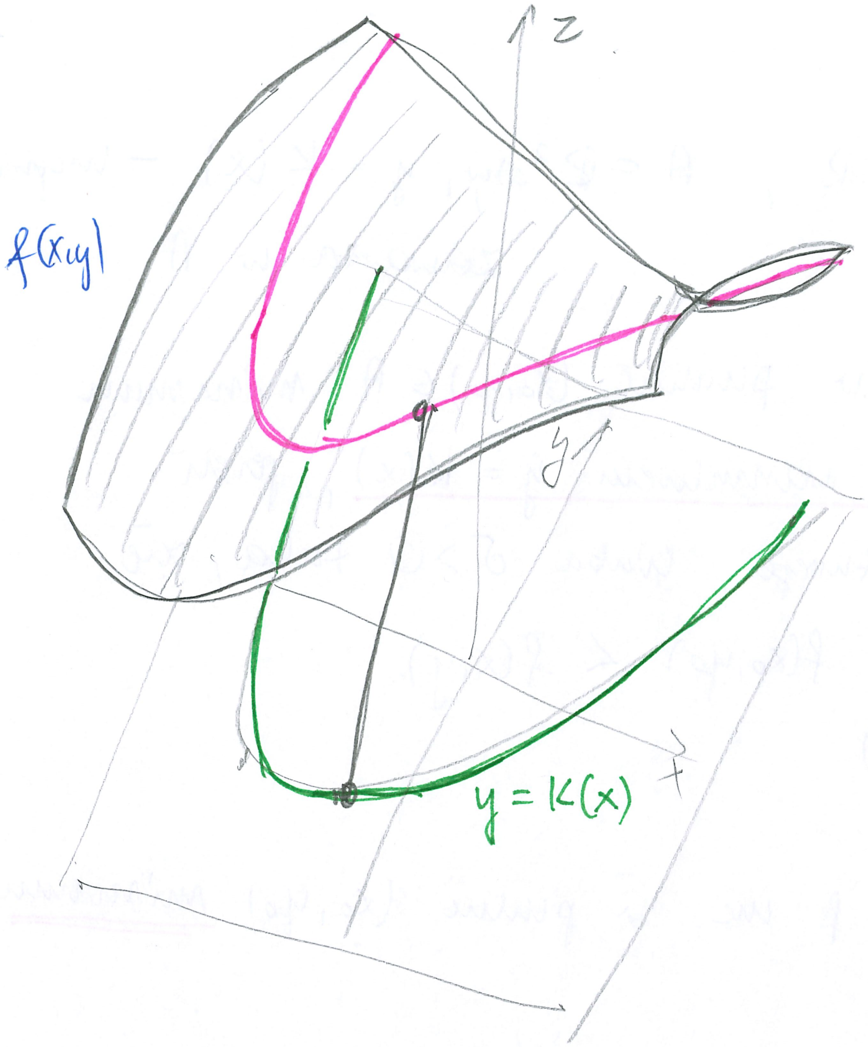
$$\forall_{\substack{(x,y) \in S((x_0,y_0),\delta) \\ y = K(x)}} \quad f(x_0,y_0) < f(x,y).$$

Krótko mówimy, że f ma w punkcie (x_0,y_0) minimum warunkowe.

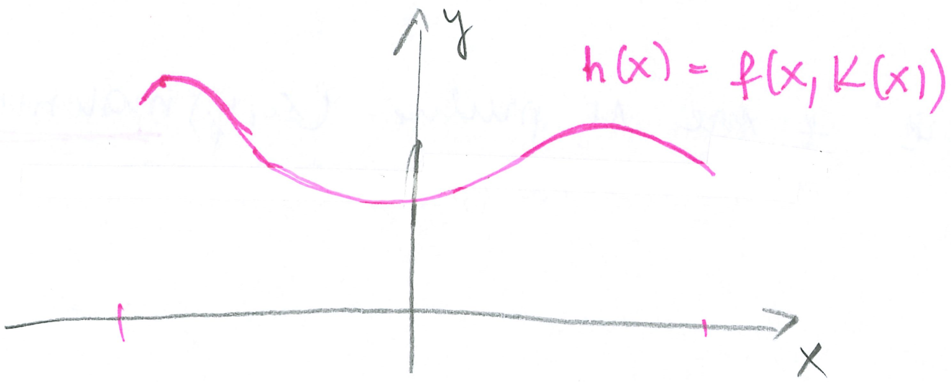
Funkcja $f(x,y)$ ma w punkcie $(x_0,y_0) \in A$ maksimum lokalne właściwe z warunkiem $y = K(x)$, jeżeli $y_0 = K(x_0)$ oraz istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że:

$$\forall_{\substack{(x,y) \in S((x_0,y_0),\delta) \\ y = K(x)}} \quad f(x,y) < f(x_0,y_0)$$

Krótko mówimy, że f ma w punkcie (x_0,y) maksimum warunkowe.



Jeżeli do wzoru $z = f(x,y)$ wstawimy $y = K(x)$, to otrzymamy funkcję jednej zmiennej x daną wzorem $z = f(x, K(x)) = h(x)$. Dla badania ekstremów warunkowych funkcji $z = f(x,y)$ przy warunku $y = K(x)$ wystarczy znaleźć ekstrema funkcji $h(x)$.



Analogicznie definiujemy ekstrema warunkowe z warunkiem $x = K(y)$ - sprowadzamy znalezienie ekstremów warunkowych do ekstremów funkcji jednej zmiennej y.

Uwaga: analogicznie możemy zdefiniować ekstrema warunkowe przy warunku $G(x,y)=0$, gdzie równanie $G(x,y)=0$ opisuje krzywą Γ na płaszczyźnie (niekoniecznie daną wzorem $y = K(x)$!)

Definicja 57

Funkcja $f(x,y)$ ma w punkcie $(x_0,y_0) \in A$ minimum lokalne właściwe z warunkiem $G(x,y)=0$, gdy $G(x_0,y_0)=0$ oraz istnieje $\delta > 0$, że

$$\forall_{\substack{(x,y) \in S((x_0,y_0),\delta) \\ G(x,y)=0}} \quad f(x_0,y_0) < f(x,y).$$

Funkcja $f(x,y)$ ma w punkcie $(x_0,y_0) \in A$ maksimum lokalne właściwe z warunkiem $G(x,y)=0$, gdy $G(x_0,y_0)=0$ oraz istnieje $\delta > 0$, że:

$$\forall_{\substack{(x,y) \in S((x_0,y_0),\delta) \\ G(x,y)=0}} \quad f(x,y) < f(x_0,y_0)$$

Jak szukamy ekstremów warunkowych z warunkiem $G(x,y)=0$:

1) krzywą $\Gamma: G(x,y)=0$ dzielimy na łuki, które są wykresami funkcji postaci:

$y = h(x),\ x \in I$ lub $x = p(y),\ y \in J$

przedział przedział

2) dla każdego łuku szukamy ekstremów warunkowych:

gdy $y = h(x),\ x \in I$ to szukamy ekstremów funkcji jednej zmiennej $y = f(x, h(x)),\ x \in I$

gdy $x = p(y),\ y \in J$ to szukamy ekstremów funkcji jednej zmiennej $x = f(p(y), y),\ y \in J$

3) porównujemy wartości otrzymanych ekstremów na krzywej Γ i ustalamy ekstrema warunkowe.

Przykład

Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji

$f(x,y) = x^2 + y$ przy warunku $y = \frac{16}{x}$, $x \in (0,\infty)$

$y = K(x)$

$$y = f\left(x, \frac{16}{x}\right) = x^2 + \frac{16}{x} = h(x), \quad x \in (0,\infty)$$

$$h'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2}$$

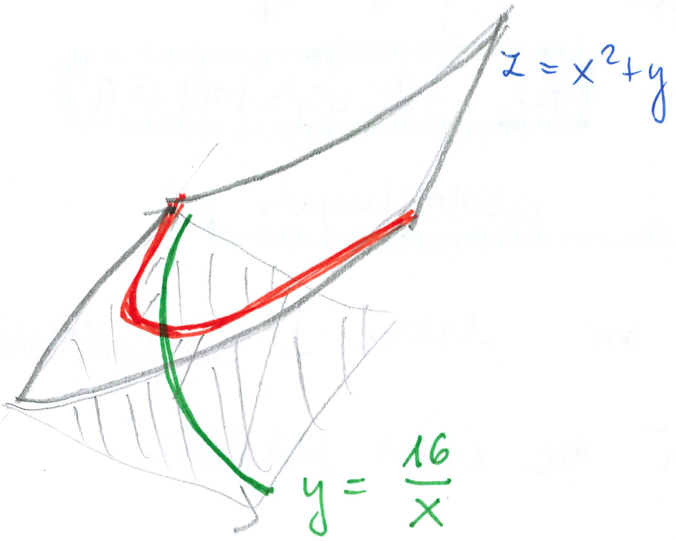
$$h'(x) = 0 \iff 2x^3 - 16 = 0 \iff x^3 = 8 \iff x = 2$$

$$h''(x) = 2 + \frac{16 \cdot 2x}{x^4} = 2 + \frac{32}{x^3}$$

$$h''(2) = 2 + \frac{32}{8} = 2 + 4 = 6 > 0$$

funkcja $h(x)$ w punkcie $x = 2$ ma minimum lokalne.

Dla $x = 2$ mamy $y = \frac{16}{2} = 8$, zatem funkcja $f(x,y)$ ma w punkcie $(2,8)$ minimum lokalne przy warunku $y = \frac{16}{x}$, przy czym $f_{min}(2,8) = 4 + 8 = 12$.



Ekstrema globalne funkcji

Główne zastosowanie metod obliczania ekstremów lokalnych i warunkowych to rozwiązywanie tzw. ZAGADNIEŃ OPTYMALIZACYJNYCH, które sprowadzają się do wyznaczania największej (lub najmniejszej) wartości funkcji w danym zbiorze. Takie wartości nazywamy też ekstremami globalnymi.

Ogólnie – funkcja dwóch zmiennych nie musi przyjmować wartości ekstremalnych w danym obszarze. Np: $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y$ jest ciągła i określona na całej pł. $\mathbb{R}^2$, jest też ograniczona: $-\pi \le f(x,y) \le \pi$, ale nie osiąga wartości najmniejszej ani największej. Zachodzi jednak (znane nam) $\boxed{\text{tw. Weierstrassa}}$ o istnieniu ekstremów globalnych:

Funkcja $f(x,y)$ określona na zbiorze D ograniczonym i domkniętym przyjmuje na nim wartość największą i najmniejszą.

Algorytm znajdowania ekstremów globalnych na obszarze domkniętym

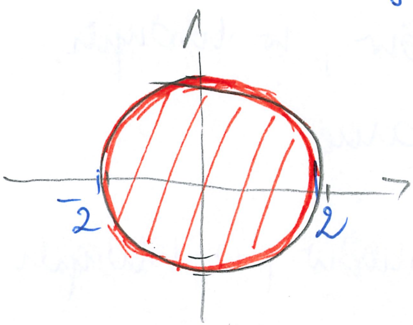
1) na obszarze otwartym szukamy punktów, w których funkcja <u>może mieć</u> ekstrema lokalne

2) na brzegu obszaru szukamy punktów, w których funkcja <u>może mieć</u> ekstrema warunkowe

3) porównujemy wartości funkcji w otrzymanych punktach - wśród nich są f_{max} i f_{min}

<u>Uwaga</u> Po znalezieniu ekstremów można dodatkowo próbować ustalić, czy już to maksimum czy minimum, ale zwykle szybciej (i prościej) już postępować jak w punkcie 3).

Przykład Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x,y) = x(y^2-1)$ w obszarze $x^2+y^2 \le 4$.



1) szukamy punktów podejrzanych o ekstremum w obszarze otwartym $x^2+y^2<4$:

$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2-1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$

$$\begin{cases} 2xy = 0 \\ y^2-1=0 \end{cases}$$

$x=0, \ y^2=1 \quad \vee \quad \begin{cases} y=0 \\ \text{sprzeczne z drugim równaniem} \end{cases}$

$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$

$A(0,1)$, $B(0,-1)$ punkty stacjonarne

pochodne I rzędu ist. w całym kole otwartym

2) brzeg obszaru dzielimy na dwa półokręgi:

$y=\sqrt{4-x^2} \quad \vee \quad y=-\sqrt{4-x^2}$, gdzie $x\in[-2,2]$

$f(x,y) = f(x,\sqrt{4-x^2}) = x(4-x^2-1) = x(3-x^2) = \underline{3x-x^3}$ dla $-2\le x\le 2$

$f(x,y) = f(x,-\sqrt{4-x^2}) = x(4-x^2-1) = x(3-x^2)$

$f'_x = 3-3x^2 \qquad f'x=0 \iff x=1 \vee x=-1$

dokładamy jeszcze punkty skrajne przedziału: $x=2 \vee x=-2$

czyli łącznie otrzymujemy punkty do sprawdzenia

$A(0,1)$, $B(0,-1)$, $C(1,\sqrt{3})$, $D(-1,\sqrt{3})$, $H(2,0)$, $J(-2,0)$, $E(1,-\sqrt{3})$, $G(-1,-\sqrt{3})$

3) obliczamy wartości :

$f(0,1)=0$ $\quad$ $f(0,-1)=0$

$f(1,\sqrt{3}) = 3-1 = \underline{\underline{2}}$ $\quad$ $f(-1,-\sqrt{3}) = \underline{\underline{-2}}$ $\quad$ $f(1,-\sqrt{3}) = 1\cdot 2 = \underline{\underline{2}}$

$f(2,0) = \underline{\underline{-2}}$ $\quad$ $f(-2,0) = -2\cdot(-1) = \underline{\underline{2}}$ $\quad$ $f(-1,\sqrt{3}) = -1\cdot 2 = \underline{\underline{-2}}$

$f_{max} = 2$ $\quad$ $f_{min} = -2$