Analiza matematyczna III
ćw. 9 06.12.2023

Zad. 1 Zbadać, czy funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

jest różniczkowalna w punkcie $p=(0,0)$.

Z definicji: f jest różniczkowalna w p, gdy ist. pochodne cząstkowe w p oraz (dla $p=(x_0,y_0)$):

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} e^{-\frac{1}{h^2}} = 0, \text{ gdyż:}$$

- $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} e^{-\frac{1}{h^2}} = 0$:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} e^{-\frac{1}{h^2}} = \left\{ \frac{1}{h} = t \right\} = \lim_{t\to\infty} t e^{-t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{t^2}\cdot 2t} = 0,$$

- $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{h} e^{-1/h^2} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{1}{k} e^{-\frac{1}{k^2}} = 0$$

czyli:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-0\cdot h-0\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} e^{-\frac{1}{h^2+k^2}} = \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{h^2+k^2}=t \\ \text{wtedy:} \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t^2}} = 0$$

Oznacza to, że f jest różniczkowalna w $p=(0,0)$.

zad. 2 Pokaż, że funkcja $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$.

Z definicji różniczkowalności:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|h\cdot k|}-0-0-0}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|h\cdot 0|}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\sqrt{|0\cdot k|}}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{k}=0$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|h\cdot k|}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$ – nie istnieje, bo biorąc:

$\left(\frac{1}{n},0\right)$: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{|\frac{1}{n}\cdot 0|}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+0}}=\lim_{n\to\infty}\frac{0}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}0=0$

$\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$: $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{|\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}|}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n^2}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Czyli f nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$

Zad. 3 Zbadać różniczkowalność funkcji

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy^3)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla } (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & \text{dla } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Warunek wystarczający różniczkowalności w p

Jeżeli f ma pochodne cząstkowe I rzędu w pewnym otoczeniu punktu p oraz pochodne te są ciągłe w p, to f jest różniczkowalne w p.

Różniczkowalność w punkcie (x,y), $(x,y)\neq(0,0)$:

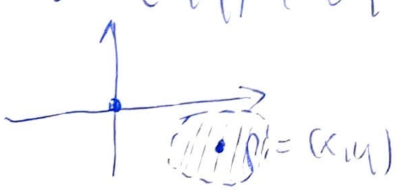
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\cos(xy^3)\cdot y^3\sqrt{x^2+y^2}-\sin(xy^3)\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{y^3(x^2+y^2)\cos(xy^3)-x\sin(xy^3)}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\cos(xy^3)\cdot 3xy^2\sqrt{x^2+y^2}-\sin(xy^3)\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{3xy^2(x^2+y^2)\cos(xy^3)-y\sin(xy^3)}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)}$$

Obydwie pochodne cząstkowe są określone i ciągłe w każdym punkcie $p=(x,y)\neq(0,0)$, zatem w każdym punkcie $(x,y)\neq(0,0)$ f jest różniczkowalna.



promień otoczenia dobieramy tak, aby otoczenie było rozłączne z $\{(0,0)\}$.

cd. zad. 3;

Różniczkowalność w (0,0) sprawdzamy z definicji:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin(h\cdot 0)}{\sqrt{0+h^2}} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin 0}{|h|}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\overbrace{\sin(0\cdot k^3)}^{\to 0}}{\sqrt{0+k^2}} - 0}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\frac{0}{|k|}}{k} = 0;$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{\sin(hk^3)}{\sqrt{h^2+k^2}} - 0 - 0 - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sin(hk^3)}{h^2+k^2} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\sin(hk^3)}{hk^3}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{hk^3}{h^2+k^2}}_{\to 0} = 0.$$

$$0 \leq \frac{|hk^3|}{h^2+k^2} \leq \frac{|hk|\cancel{k^2}}{\cancel{k^2}} = |hk| \to 0$$

CZYLI funkcja f jest różniczkowalna na $\mathbb{R}^2$

zad. 4

Zbadaj różniczkowalność funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \dfrac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Różniczkowalność w dow. punkcie (x,y), $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + \frac{3x^2\sqrt{x^2+y^2} - (x^3+y^3)\frac{1\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} =$$

$$= 1 + \frac{3x^2(x^2+y^2) - (x^3+y^3)x}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 1 + \frac{2x^4+3x^2y^2-xy^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2\sqrt{x^2+y^2} - (x^3+y^3)\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{3y^2(x^2+y^2) - (x^3+y^3)y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2y^4+3x^2y^2-x^3y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

obydwie pochodne cząstkowe są określone i ciągłe w każdym punkcie $p = (x,y) \neq (0,0)$, zatem w każdym takim punkcie f jest różniczkowalna.

Różniczkowalność w punkcie $(0,0)$ (spr. z def.):

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\, h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(h + \frac{h^3+0^3}{\sqrt{h^2+0^2}}\right) = \lim_{h\to 0}\left(1 + \frac{h^2}{|h|}\right) =$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+}\left(1+\dfrac{h^2}{|h|}\right) = \lim\limits_{h\to 0^+}\left(1+\dfrac{h^2}{h}\right) = \lim\limits_{h\to 0^+}(1+h) = 1. \\ \lim\limits_{h\to 0^-}\left(1+\dfrac{h^2}{|h|}\right) = \lim\limits_{h\to 0^-}\left(1+\dfrac{h^2}{-h}\right) = \lim\limits_{h\to 0^-}(1-h) = 1 \end{cases}$$

wyż: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ 		cd zad. 4

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{1}{k}\left(\frac{k^3}{\sqrt{k^2}}\right) = \lim_{k\to 0} \frac{k^2}{|k|} = 0$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\cancel{h} + \frac{h^3+k^3}{\sqrt{h^2+k^2}} - 0 - \cancel{h} - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^3+k^3}{h^2+k^2} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left[\frac{h^3}{h^2+k^2} + \frac{k^3}{h^2+k^2}\right] = 0$$

$$0 \le \frac{|h^3|}{h^2+k^2} \le \frac{|h^3|}{h^2} = |h| \to 0$$

$$0 \le \frac{|k^3|}{h^2+k^2} \le \frac{|k^3|}{k^2} = |k| \to 0$$

czyli f jest różniczkowalna na $\mathbb{R}^2$.

zad. 5 Wykazać, że powierzchnia o równaniu

$$z = x \arcsin \frac{y}{x+y}, \quad y \neq -x$$

posiada płaszczyznę styczną w punkcie $(1,1,z_0)$. Napisać równanie tej płaszczyzny.

Jeśli f jest różniczkowalna w p, to w p istnieje płaszczyzna styczna do wykresu f.

Sprawdźmy różniczkowalność f w punkcie $p(1,1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \arcsin \frac{y}{x+y} + x \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{(x+y)^2}}} \cdot \frac{(-y)}{(x+y)^2} =$$

$$= \arcsin \frac{y}{x+y} - \frac{xy}{(x+y)^2\sqrt{1-\left(\frac{y}{x+y}\right)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{x+y}\right)^2}} \cdot \frac{x+y-y}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{(x+y)^2\sqrt{1-\left(\frac{y}{x+y}\right)^2}}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ istnieją na pewnym otoczeniu punktu $(1,1)$ oraz są ciągłe w tym punkcie (bo są ciągłe na

wowane: $x \neq y \wedge 1 - \frac{y^2}{(x+y)^2} > 0 \Leftarrow x(x+2y) > 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{4\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Równanie szukanej płaszczyzny: $z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$

$$z_0 = f(1,1) = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$z - \frac{\pi}{6} = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)(x-1) + \frac{1}{2\sqrt{3}}(y-1)$$

$$\boxed{(\sqrt{3}-\pi)x - \sqrt{3}y + 6z = 0}$$