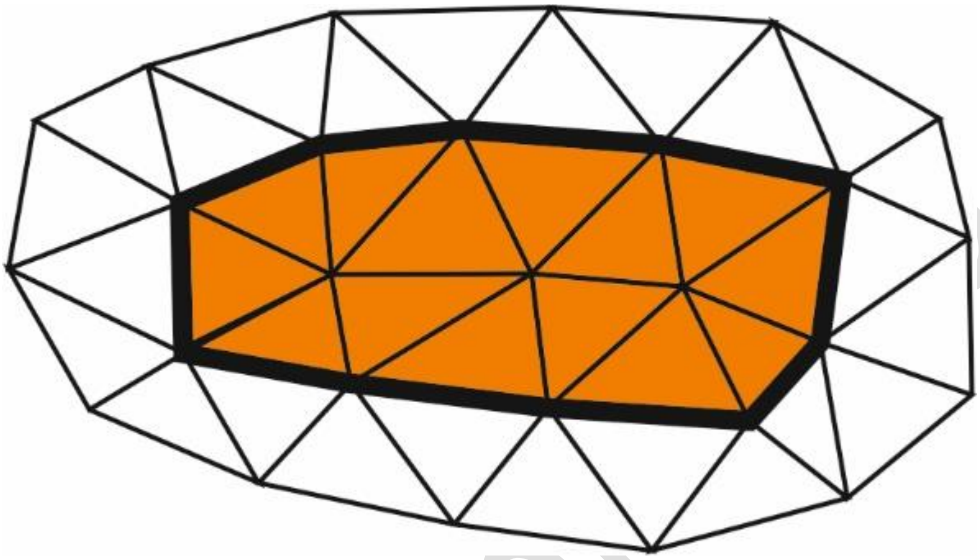
Koncepcja superelementu

Polega na rozłożeniu dużego problemu na szereg mniejszych, które można rozwiązywać oddzielnie, niezależnie jeden od drugiego. Koncepcja ta powstała w dążeniu do ograniczenia rozmiarów zadań numerycznych. Jej istota polega na wydzieleniu ***podkonstrukcji*** z większej konstrukcji, podzielonej na elementy.



Rozważamy wydzielony fragment konstrukcji stanowiący podkonstrukcję.
Wektor parametrów węzłowych związanych z podkonstrukcją ma postać:

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_w \\ \boldsymbol{r}_z \end{bmatrix} \qquad [7.133]$$

gdzie:

$\boldsymbol{r}_w$ – przemieszczenia węzłów leżących wewnątrz podkonstrukcji
$\boldsymbol{r}_z$ – przemieszczenia węzłów zewnętrznych leżących na linii rozgraniczenia (pogrubionej)

Podobnie przedstawić można wektor sił węzłowych:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_w \\ \boldsymbol{R}_z \end{bmatrix} \qquad [7.134]$$

Pomiędzy powyższymi wektorami zachodzi relacja:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{r} \qquad [7.135]$$

gdzie $\boldsymbol{K}$ jest macierzą sztywności podkonstrukcji, otrzymaną poprzez złożenie macierzy sztywności poszczególnych jej elementów.

Równanie (138) można zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_w \\ \boldsymbol{R}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{ww} & \boldsymbol{K}_{wz} \\ \boldsymbol{K}_{zw} & \boldsymbol{K}_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_w \\ \boldsymbol{r}_z \end{bmatrix} \qquad [7.136]$$

Ze względu na symetrię macierzy sztywności:

$$\boldsymbol{K}_{zw} = \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{wz}}^{\boldsymbol{T}}$$

Po rozpisaniu równania (139) otrzymujemy:

$$\boldsymbol{R}_w = \boldsymbol{K}_{ww} \cdot \boldsymbol{r}_w + \boldsymbol{K}_{wz} \cdot \boldsymbol{r}_z \qquad [7.137]$$

$$\boldsymbol{R}_z = \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{wz}}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{r}_w + \boldsymbol{K}_{zz} \cdot \boldsymbol{r}_z \qquad [7.138]$$

Z równania (140) wyznaczamy $\boldsymbol{r}_w$:

$$\boldsymbol{r}_w = \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{ww}}^{-1} \cdot \boldsymbol{R}_w - \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{ww}}^{-1} \cdot \boldsymbol{K}_{wz} \cdot \boldsymbol{r}_z \qquad [7.139]$$

Po wstawieniu do (141):

$$(\boldsymbol{K}_{zz} - \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{wz}}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{ww}}^{-1} \cdot \boldsymbol{K}_{wz})\boldsymbol{r}_z = \boldsymbol{R}_z - \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{wz}}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{ww}}^{-1} \cdot \boldsymbol{R}_w \qquad [7.140]$$

co można zapisać:

$$\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{r}_z = \boldsymbol{F} \qquad [7.141]$$

gdzie:

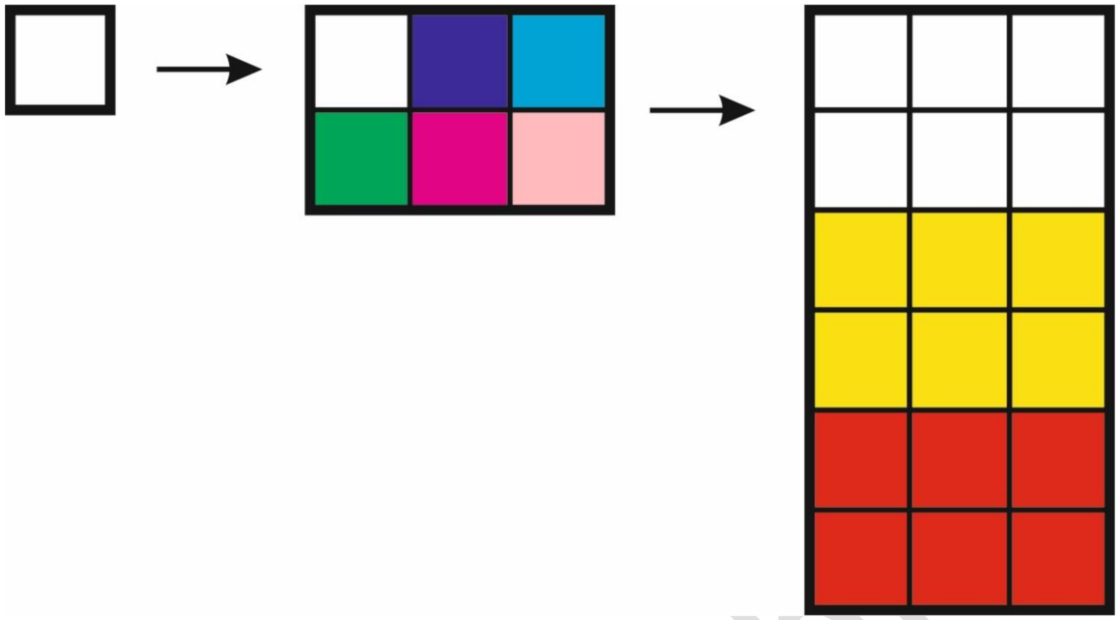
$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_{zz} - \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{wz}}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{ww}}^{-1} \cdot \boldsymbol{K}_{wz} \qquad [7.142]$$

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}_z - \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{wz}}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{ww}}^{-1} \cdot \boldsymbol{R}_w \qquad [7.143]$$

Równanie (144) ma identyczną postać jak w przypadku analizy elementu, przy czym dotyczy podkonstrukcji. Można zatem traktować podkonstrukcję jako tzw. superelement. Liczba niewiadomych przemieszczeń węzłowych ulega zmniejszeniu, a jako wielkości niewiadome występują wyłącznie parametry $\boldsymbol{r}_z$.

W równaniach (145) i (146) występuje między innymi macierz $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{ww}}^{-1}$, która staje się macierzą nieosobliwą tylko wówczas, gdy parametry $\boldsymbol{r}_z$ dobrane są tak, by uniemożliwić ruch superelementu jako ciała sztywnego.

Superelement utworzony z elementów podstawowych może być podstawą do zbudowania superelementu wyższego rzędu, złożonego z superelementów:



Koncepcja superelementu jest szczególnie korzystna w przypadkach konstrukcji złożonych z powtarzających się części, które stanowią rodzaj naturalnych superelementów.