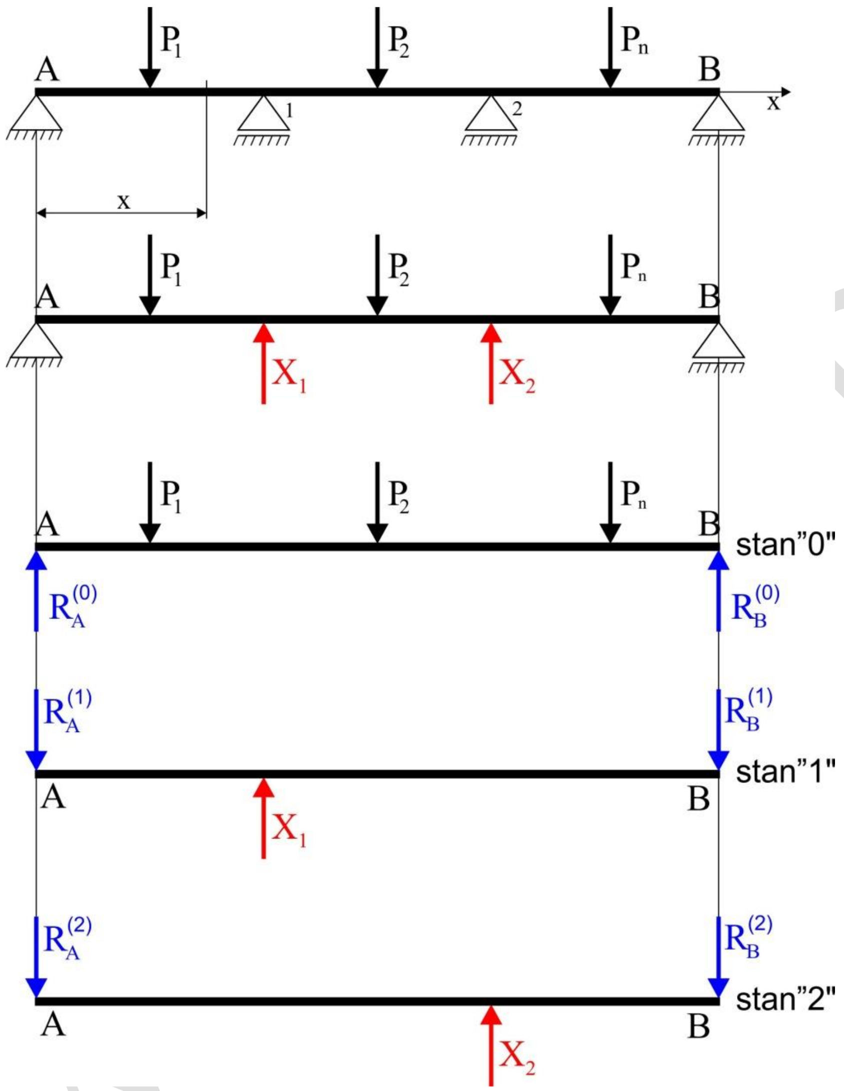
3) Równania Maxwella-Mohra.

Rozpatrujemy dowolny, statycznie niewyznaczalny układ Clapeyrona, reprezentowany przez belkę pokazaną na rysunku.

Jako statycznie niewyznaczalne przyjmujemy reakcje w punktach **1,2** – oznaczone jako $\mathbf{X_1}$**,** $\mathbf{X_2}$.



Układ traktujemy jako superpozycję układu statycznie wyznaczalnego, poddanego działaniu sił czynnych (stan"0") oraz układów obciążanych kolejno statycznie niewyznaczalnymi reakcjami: $\mathbf{X_1}$ (stan"1") oraz $\mathbf{X_2}$ (stan"2").

Moment gnący w dowolnym przekroju belki, określonym współrzędną **x**, jest sumą algebraiczną momentów w poszczególnych stanach:

$$M_g = M_g^{(0)} + M_g^{(1)} + M_g^{(2)} \qquad (2)$$

Przyjmujemy oznaczenia:

$m_g^{(1)}$ – momet gnący w przekroju określonym współrzędną **x,** od siły jednostkowej **X_1=1**

$m_g^{(2)}$ – momet gnący w przekroju określonym współrzędną **x,** od siły jednostkowej **X_2=1**

Dla układu n-krotnie statycznie niewyznaczalnego mamy zatem:

$$M_g = M_g^{(0)} + m_g^{(1)} \cdot X_1 + m_g^{(2)} \cdot X_2 + \cdots + m_g^{(i)} \cdot X_i + \cdots + m_g^{(n)} \cdot X_n \qquad (3)$$

Energia sprężysta układu wynosi:

$$V = \int_L \frac{M_g^2 dx}{2EJ_z}$$

W rozpatrywanym układzie Clapeyrona, dla każdej reakcji statycznie niewyznaczalnej można sformułować związek wynikający z tw. Menabrei. Otrzymujemy zatem tyle równań, ile jest wielkości statycznie niewyznaczalnych.

$$\frac{\partial V}{\partial X_1} = 0\,, \quad \frac{\partial V}{\partial X_2} = 0\,, \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial X_i} = 0\,, \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial X_n} = 0 \qquad (4)$$

Pochodna cząstkowa energii sprężystej względem **X_1** wynosi:

$$\frac{\partial V}{\partial X_1} = \int_L \frac{1}{EJ_z} M_g \frac{\partial M_g}{\partial X_1} dx \qquad (5)$$

gdzie:

$$\frac{\partial M_g}{\partial X_1} = m_g^{(1)} \quad \left(bo\ M_g - (3)\right) \qquad (6)$$

Po podstawieniu (6) i (3) do (5) oraz wykorzystując zależność (4) otrzymujemy:

$$\frac{\partial V}{\partial X_1} = \int\limits_L \frac{M_g^{(0)} m_g^{(1)}}{EJ_z} d$$
$$+X_1 \int\limits_L \frac{m_g^{(1)} m_g^{(1)}}{EJ_z} dx$$
$$+ X_2 \int\limits_L \frac{m_g^{(2)} m_g^{(1)}}{EJ_z} dx + \cdots$$
$$+X_i \int\limits_L \frac{m_g^{(i)} m_g^{(1)}}{EJ_z} dx + \cdots + X_n \int\limits_L \frac{m_g^{(n)} m_g^{(1)}}{EJ_z} dx = 0 \qquad (7)$$

Dla uproszczenia zapisu każdą z całek oznaczamy literą **α** z odpowiednimi indeksami. Np.

$$\alpha_{12} = \int_L \frac{m_g^{(2)} m_g^{(1)}}{EJ_z} dx$$

Uwaga! Z zasady przemienności iloczynu wynika, że $\boldsymbol{\alpha_{12} = \alpha_{21}}$!

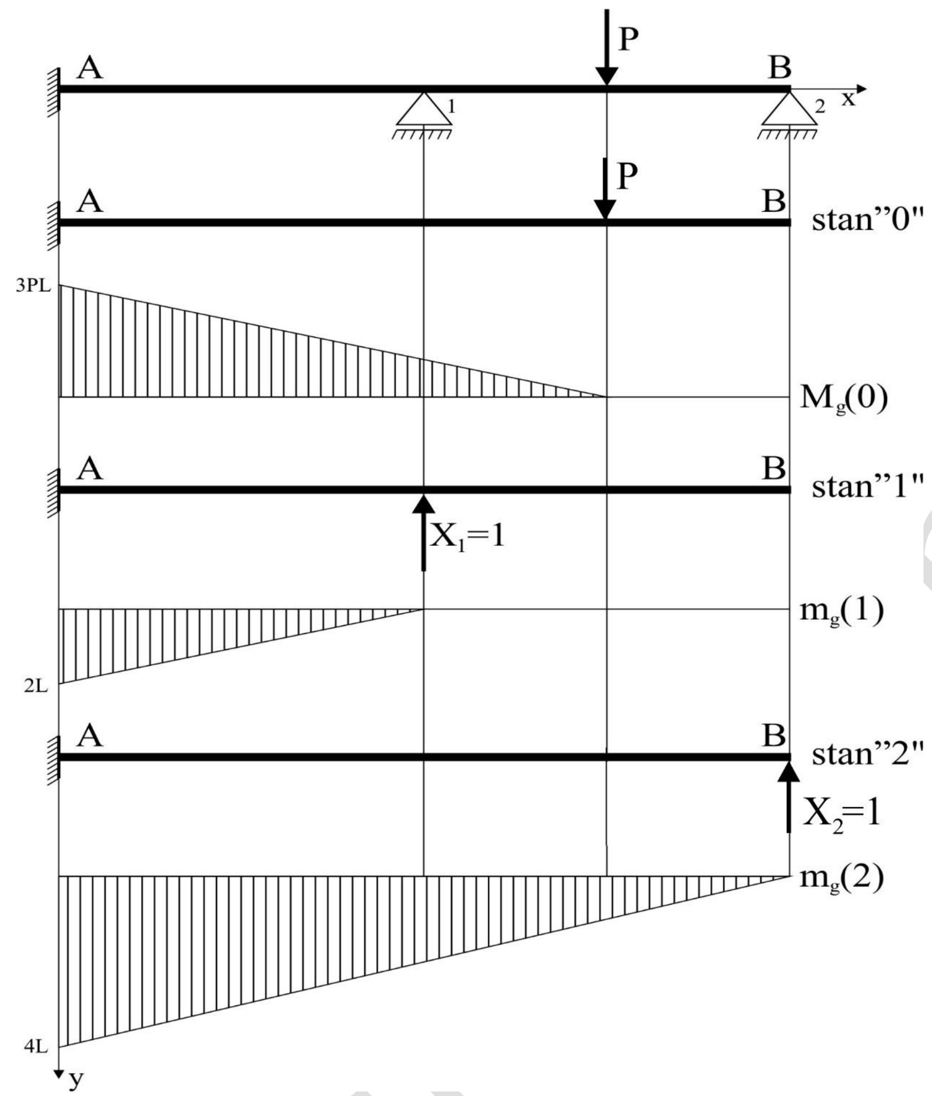
Przeprowadzając powyższy tok rozumowania dla wszystkich wielkości statycznie niewyznaczalnych, otrzymujemy układ równań Maxwella-Mohra:

$$\begin{array}{l}
\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 + \alpha_{12} \cdot X_2 + \ldots + \alpha_{1i} \cdot X_i + \cdots + \alpha_{1n} \cdot X_n = 0 \\
\alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot X_1 + \alpha_{22} \cdot X_2 + \ldots + \alpha_{2i} \cdot X_i + \cdots + \alpha_{2n} \cdot X_n = 0 \\
. \\
. \\
. \\
\alpha_{i0} + \alpha_{i1} \cdot X_1 + \alpha_{i2} \cdot X_2 + \ldots + \alpha_{ii} \cdot X_i + \cdots + \alpha_{in} \cdot X_n = 0 \\
. \\
. \\
. \\
\alpha_{n0} + \alpha_{n1} \cdot X_1 + \alpha_{n2} \cdot X_2 + \ldots + \alpha_{ni} \cdot X_i + \cdots + \alpha_{nn} \cdot X_n = 0
\end{array} \qquad (8)$$

Z powyższych równań można wyznaczyć wszystkie reakcje podporowe.

Wielkości $\boldsymbol{\alpha_{ij}}$ nazywamy ***współczynnikami wpływu***!

Przykład:



$$\alpha_{10} = \frac{1}{EJ_z}[\ldots]\ ;\ \ \alpha_{11} = \cdots\ \ ;\ \alpha_{20} = \cdots;\ \alpha_{12} = \alpha_{21}\ \ ;\ \ \alpha_{22} = \cdots$$

$$\alpha_{10} + \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 = 0$$
$$\alpha_{20} + \alpha_{21}X_1 + \alpha_{22}X_2 = 0 \qquad\qquad => \ X_1, X_2$$