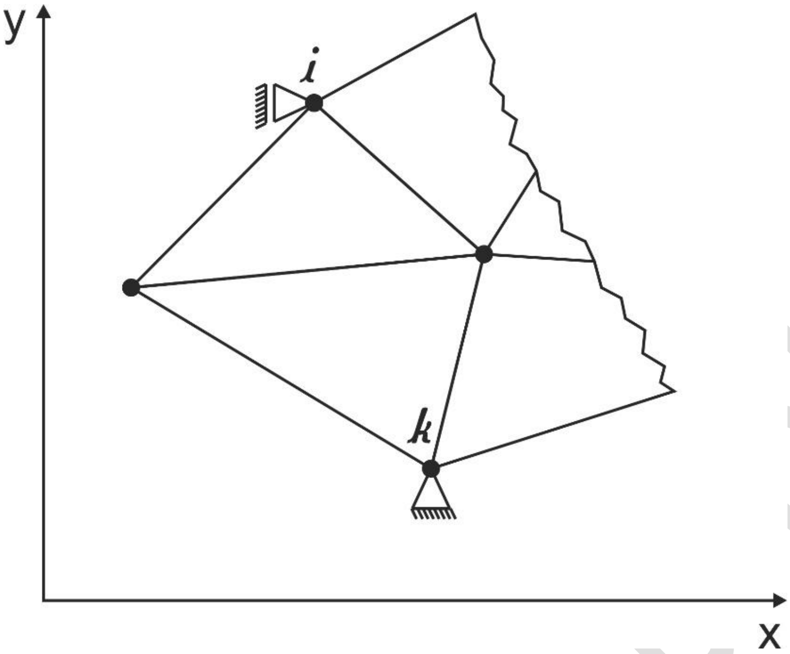
## ***WARUNKI BRZEGOWE:***

Z uwagi na przemieszczeniowe ujęcie metody, warunki brzegowe posiadają charakter geometryczny. Uwzględnienie warunków podparcia powoduje modyfikację macierzy sztywności, a w konsekwencji wyeliminowanie jej osobliwości.
Rozważamy podparcie węzłów „i” oraz „k”, pokazane na rysunku:

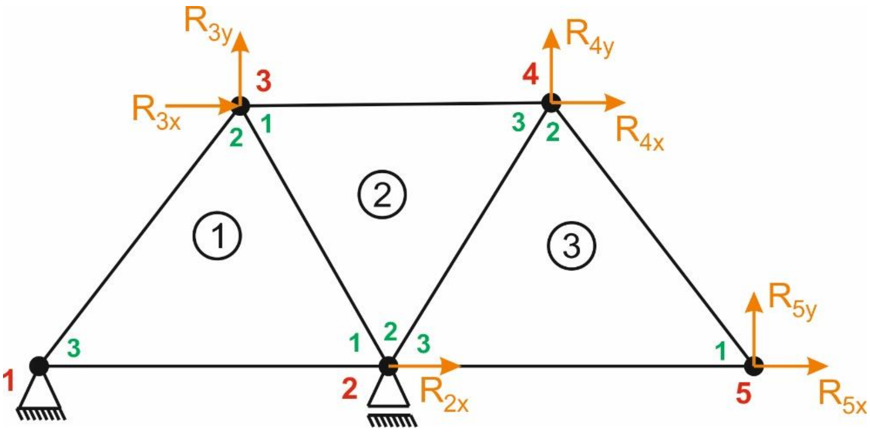



Przemieszczenia w wymienionych węzłach wynoszą odpowiednio:
Węzeł „i”: $u_i = 0$
Węzeł „k”: $u_k = 0, v_k = 0$

Oznacza to, że w równaniu macierzowym (133) trzy równania są trywialne. Aby to uwzględnić, należy wyzerować wszystkie elementy wiersza i kolumny macierzy **K**, odpowiadające zerowemu przemieszczeniu, z wyjątkiem elementu na głównej przekątnej, który przyjmuje wartość 1. Wyzerować należy również odpowiednie elementy wektora **R**, zgodnie ze schematem:

$$\overset{\boldsymbol{R}}{\begin{bmatrix} R_{1x} \\ \vdots \\ R_{ix} = 0 \\ \vdots \\ R_{kx} = 0 \\ R_{ky} = 0 \\ \vdots \\ R_{ny} \end{bmatrix}} = \overset{\boldsymbol{K}}{\begin{bmatrix} & & 0 & & 0 & 0 & & \\ & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ & & 0 & & 0 & 0 & & \end{bmatrix}} \cdot \overset{\boldsymbol{r}}{\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_k \\ v_k \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}} \qquad [7.226]$$

***WYZNACZANIE NAPRĘŻEŃ:***




Warunki brzegowe: $r_{1x} = 0, \; r_{1y} = 0, \; r_{2y} = 0$

Równanie dla układu:

$$\overset{\boldsymbol{R}}{\begin{bmatrix} R_{1x} = 0 \\ R_{1y} = 0 \\ R_{2x} \\ R_{2y} = 0 \\ R_{3x} \\ R_{3y} \\ R_{4x} \\ R_{4y} \\ R_{5x} \\ R_{5y} \end{bmatrix}} = \overset{\boldsymbol{K'}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & 0 & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & 0 & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & 0 & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & 0 & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & 0 & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & 0 & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & 0 & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}} \cdot \overset{\boldsymbol{r}}{\begin{bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \\ r_{3x} \\ r_{3y} \\ r_{4x} \\ r_{4y} \\ r_{5x} \\ r_{5y} \end{bmatrix}}$$

Gdzie **K'** jest macierzą sztywności układu zmodyfikowaną warunkami brzegowymi.
W skróconej postaci:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{K'} \cdot \boldsymbol{r}$$

Stąd:

$$\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{K'})^{-1} \cdot \boldsymbol{R}$$

Po rozwiązaniu powyższego równania, można określić przemieszczenia poszczególnych elementów:

$$\boldsymbol{V}_{x1} = \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{x2} \\ v_{x3} \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} r_{x2} \\ r_{x3} \\ r_{x1} = 0 \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{V}_{x2} = \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{x2} \\ v_{x3} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} r_{x3} \\ r_{x2} \\ r_{x4} \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{V}_{x3} = \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{x2} \\ v_{x3} \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} r_{x5} \\ r_{x4} \\ r_{x2} = 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}_{y1} = \begin{bmatrix} v_{y1} \\ v_{y2} \\ v_{y3} \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} r_{y2} \\ r_{y3} \\ r_{y1} = 0 \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{V}_{y2} = \begin{bmatrix} v_{y1} \\ v_{y2} \\ v_{y3} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} r_{y3} \\ r_{y2} = 0 \\ r_{y4} \end{bmatrix} ; \; \boldsymbol{V}_{y3} = \begin{bmatrix} v_{y1} \\ v_{y2} \\ v_{y3} \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} r_{y5} \\ r_{y4} \\ r_{y2} \end{bmatrix}$$

Obliczanie składowych stanu naprężenia (por. 7.71,7.73):

$$\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta v_x}{\delta x} \\ \frac{\delta v_y}{\delta y} \\ \frac{\delta v_x}{\delta y} + \frac{\delta v_y}{\delta x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{,x}^T & 0 \\ 0 & \boldsymbol{u}_{,y}^T \\ \boldsymbol{u}_{,y}^T & \boldsymbol{u}_{,x}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_x \\ \boldsymbol{q}_y \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_q \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_x \\ \boldsymbol{q}_y \end{bmatrix} \; ; \; \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{e} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B}_q \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_x \\ \boldsymbol{q}_y \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_i = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B}_q \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_x \\ \boldsymbol{q}_y \end{bmatrix}_i$$