7.3. Analiza układu

Analiza układu polegająca na zbudowaniu macierzy sztywności całej konstrukcji rozpatrywana była w punkcie 3.4 na przykładzie ramy płaskiej. Tutaj omówimy sposób budowy macierzy układu mający charakter uniwersalny. Przebieg jego jest jednakowy, niezależnie od rodzaju rozpatrywanej konstrukcji i typu zastosowanych elementów.

Macierz sztywności całego układu, określającą związek pomiędzy przemieszczeniami węzłów i obciążeniem, budujemy na podstawie uprzednio ustalonych macierzy sztywności poszczególnych elementów. Wykorzystujemy tutaj, jak już wcześniej wspomniano, warunki zgodności przemieszczeń w węzłach (proces *zszywania* elementów w całość) oraz warunki równowagi.

Dla każdego elementu p należącego do badanego układu, znana jest zależność typu:

$$\mathbf{S}_p = \mathbf{k}_p \, \mathbf{v}_p \, . \tag{7.217}$$

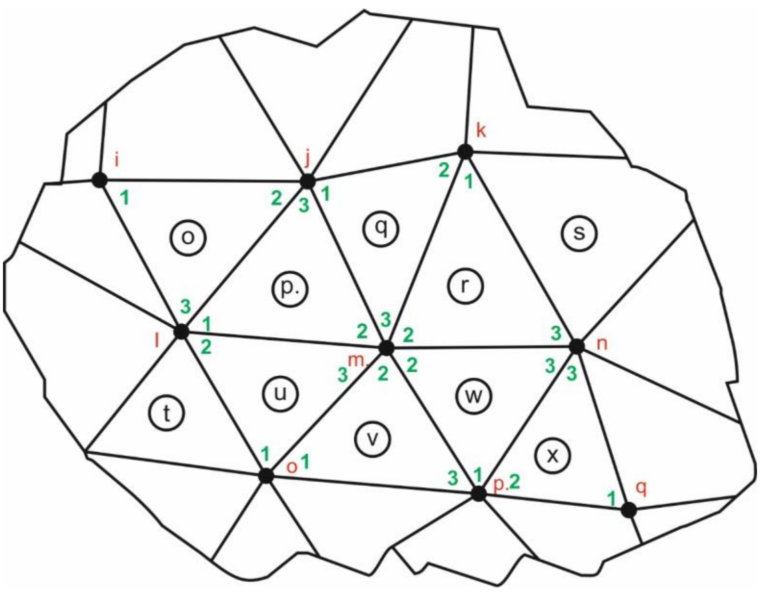
Jeżeli element ma i węzłów, to powyższy związek można przedstawić w postaci:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_i \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1i} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{i1} & k_{i2} & \cdots & k_{ii} \end{bmatrix}_p \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \end{bmatrix}_p . \tag{7.218}$$

Przy założeniu, że w każdym węźle jest j składowych sił oraz przemieszczeń (w sensie ogólnym) poszczególne elementy wyrażenia (7.218) są wektorami i macierzami, np.

$$S_{1,p} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_j \end{bmatrix}, \qquad k_{11,p} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1j} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{j1} & k_{j2} & \cdots & k_{jj} \end{bmatrix}, \qquad v_{1,p} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_j \end{bmatrix}.$$

Załóżmy, że w wyniku podziału układu na elementy powstała siatka, w której jest n węzłów (rys. 7.41). Niechaj będą to elementy trójkątne. Przyjęcie takich elementów nie



Rys. 7.41

zawęża ogólnego charakteru niżej podanych rozważań. Należy zauważyć, że poszczególne węzły mają numerację dwojakiego rodzaju: numery globalne dotyczące siatki podziału oraz lokalne związane z określonym elementem. Taka numeracja jest bardzo pomocna przy budowaniu macierzy sztywności konstrukcji. Jeżeli globalny węzeł l siatki pokrywa się z węzłem lokalnym m elementu p, wtedy warunek zgodności przemieszczeń wyraża się następująco:

$$\mathbf{r}_l = \mathbf{v}_{m,p}. \tag{7.219}$$

Niech w węźle l siatki zbiega się q elementów. Warunek równowagi tego węzła, przy uwzględnieniu zgodności przemieszczeń, zapisujemy w postaci:

$$\mathbf{R}_l = \sum_{p=1}^{q} \mathbf{S}_{m,p} = \sum_{p=1}^{q} [\mathbf{k}_{m1}\ \ \mathbf{k}_{m2} \ldots \mathbf{k}_{mi}]_p \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_i \end{bmatrix}_p =$$

$$= \sum_{p=1}^{q} [\mathbf{k}_{m1}\ \ \mathbf{k}_{m2} \ldots \mathbf{k}_{mi}]_p \begin{bmatrix} \mathbf{r}_a \\ \mathbf{r}_b \\ \vdots \\ \mathbf{r}_l \\ \vdots \\ \mathbf{r}_x \end{bmatrix}_p, \tag{7.220}$$

gdzie:

a, b,...,l,...,x – globalne numery węzłów siatki pokrywające się z lokalnymi numerami węzłów elementów p, zbiegających się w węźle l,

$\mathbf{R}_l$ – wektor sił zewnętrznych (danych) skupionych w węźle l.

Postępując analogicznie z każdym węzłem siatki otrzymujemy układ równań:

$$
\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}, \tag{7.221}
$$

co można zapisać krótko jako:

$$
\mathbf{R} = \mathbf{K}\mathbf{r}, \tag{7.222}
$$

tutaj $\mathbf{K}$ jest poszukiwaną macierzą sztywności układu. Jeżeli w poszczególnych węzłach siatki jest j składowych przemieszczeń, wtedy każdy z wektorów $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{R}_i$ ma wymiar 1 x j, elementy $\mathbf{K}_{ij}$ mają wymiar j x j, a sama macierz jest macierzą kwadratową o wymiarze (n x j) x (n x j), (przypominamy, że n oznacza liczbę węzłów siatki).

Warto nieco dokładniej omówić technikę budowania macierzy $\mathbf{K}$, gdyż tkwi w niej pewna istotna cecha metody elementów skończonych.

Rozważmy obszar płaski podzielony na elementy trójkątne (por. np. rys. 7.41). Zakładamy, że sztywności wszystkich elementów z wyjątkiem elementu p są równe zeru. Wówczas równanie wygląda następująco:

$$
\begin{array}{r} \\ \\ i- \\ \\ j- \\ \\ k- \\ \\ \\ \end{array}
\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ R_1 \\ \vdots \\ R_2 \\ \vdots \\ R_3 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & k_{11} & \dots & k_{12} & \dots & k_{13} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & k_{21} & \dots & k_{22} & \dots & k_{23} & \dots & k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & k_{31} & \dots & k_{32} & \dots & k_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{bmatrix}_p \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_j \\ \vdots \\ r_k \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}. \tag{7.223}
$$

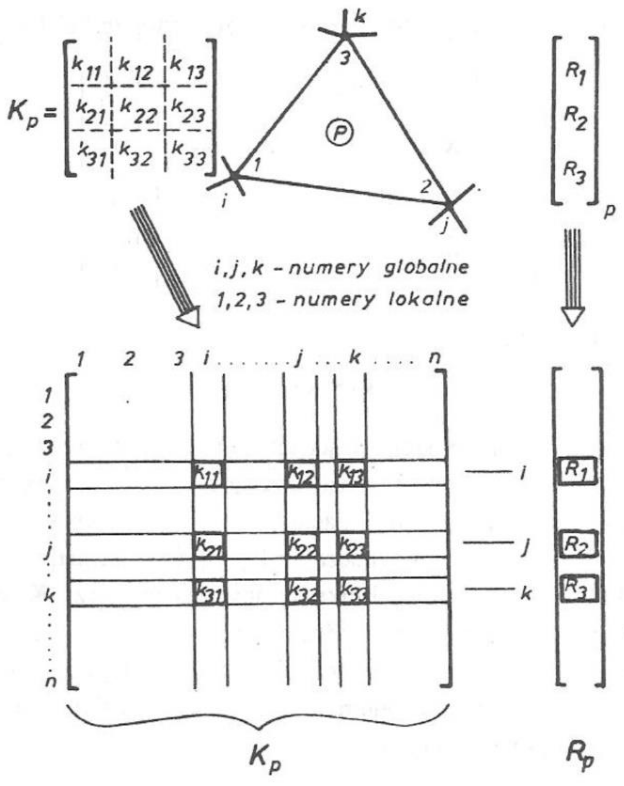
Sposób powstawania powyższego równania ilustruje dodatkowo rys. 7.42.

Na zewnątrz macierzy $\mathbf{K}_p$ umieszczono globalne numery węzłów siatki.

Związek (7.223) można zapisać jako:

$$
\mathbf{R}_p = \mathbf{K}_p\, \mathbf{r}. \tag{7.224}
$$

Jak widać z (7.223), składnikami $\mathbf{K}_p$ różnymi od zera są składniki związane z elementem p, a ściślej z przemieszczeniami węzłów siatki i, j, k, odpowiadającymi lokalnym numerom węzłów elementu.



Rys. 7.42

Postępując analogicznie z każdym z elementów badanego układu oraz wykorzystując zasadę superpozycji, otrzymamy:

$$\sum_{p=1}^{m} \mathbf{R}_p = \sum_{p=1}^{m} \mathbf{K}_p \ \mathbf{r} = \mathbf{Kr} = \mathbf{R}, \tag{7.225}$$

gdzie:

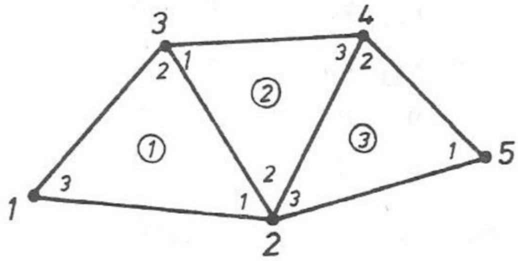
$\mathbf{R}_p$ – oznacza udział elementu p w wektorze **R**,
$\mathbf{K}_p$ – oznacza udział elementu p w macierzy **K**,
m – liczba elementów układu.

Należy podkreślić, że wymiar każdej macierzy $\mathbf{K}_p$ jest taki sam jak wymiar macierzy **K** (macierz sztywności całego układu). Podobnie wymiar każdego wektora $\mathbf{R}_p$ jest taki jak wektora **R**.

Fakt ten ma istotne znaczenie przy zautomatyzowaniu procesu budowania macierzy **K** oraz wektora **R**. W pamięci maszyny bowiem rezerwujemy jednorazowo obszary dla **K** i **R**, a następnie realizując dodawanie zgodnie z (7.225), przesyłamy zgodnie z przyjętym systemem kodowania do poszczególnych komórek tych obszarów różne od zera składniki macierzy $\mathbf{K}_p$ i wektorów $\mathbf{R}_p$. Na tym właśnie polega wspomniana cecha elementów skończonych.

Przykład.

Sposób budowania macierzy $\mathbf{K}_p$ i $\mathbf{K}$ omówimy na przykładzie konstrukcji pokazanej na rys. 7.43. Zakładamy, że elementy połączone są w węzłach przegubowo, tzn. że w każdym węźle ustalamy dwa składowe przemieszczenia i dwie składowe siły oddziaływania. Mamy tutaj n = 5, m = 3.



Rys. 7.43

Przypominamy (por. rys. 7.43), że węzły mają podwójną numerację. Numery lokalne związane z elementem, i globalne odnoszące się do całej konstrukcji, np. węzeł o numerze globalnym 3 ma numer lokalny 2 w odniesieniu do elementu 1 albo numer 1 w odniesieniu do elementu 2.

Macierz sztywności konstrukcji zgodnie z (7.225) będzie:

(1) $$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3,$$

albo :

(2) $$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \cdots & \mathbf{K}_{15} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \cdots & \mathbf{K}_{25} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{K}_{51} & \mathbf{K}_{52} & \cdots & \mathbf{K}_{55} \end{bmatrix}.$$

Przypominamy, że każdy wyraz macierzy (2) jest także macierzą o wymiarze 2 x 2 (2 – liczba składowych przemieszczeń w węźle).

Uwzględniając numerację lokalną, możemy macierz sztywności każdego elementu zapisać w postaci:

(3) $$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} & \mathbf{k}_{13} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} & \mathbf{k}_{23} \\ \mathbf{k}_{31} & \mathbf{k}_{32} & \mathbf{k}_{33} \end{bmatrix},$$

gdzie wyrazy k_{11}, k_{12} ... k_{33} są macierzami kwadratowymi 2 x 2 (w każdym węźle dwa przemieszczenia).

Budujemy macierz K_1, tzn. zakładamy, że sztywności elementów 2 i 3 są równe zeru. Po uwzględnieniu rys. (7.41) oraz (7.223), a także (2), (3) otrzymujemy:

(4)
$$K_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} k_{33} & k_{31} & k_{32} & 0 & 0 \\ k_{13} & k_{11} & k_{12} & 0 & 0 \\ k_{23} & k_{21} & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} , \quad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

(nad macierzą i na prawo umieszczono dla ułatwienia globalne numery węzłów).

Jednostkowe przemieszczenie węzła 1 spowoduje wystąpienie w nim „siły" k_{33} (numer globalny 1 odpowiada lokalnemu 3), w węźle 2 „siły" k_{31} oraz w węźle 3 „siły" k_{32} – por. (3). Podobnie można prześledzić wpływ przemieszczeń węzłów 2 i 3.

Dwie pozostałe macierze będą miały postać:

(5)
$$K_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{21} & k_{23} & 0 \\ 0 & k_{12} & k_{11} & k_{13} & 0 \\ 0 & k_{32} & k_{31} & k_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} , \quad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

(6)
$$K_3 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{33} & 0 & k_{32} & k_{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{23} & 0 & k_{22} & k_{21} \\ 0 & k_{13} & 0 & k_{12} & k_{11} \end{bmatrix} \end{array} . \quad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}$$

Macierz sztywności konstrukcji otrzymujemy wykonując dodawanie (1). Przykładowo podajemy obliczenie jednego z wyrazów tej macierzy zapisanej w postaci (2):

$$K_{22} = k_{11} + k_{22} + k_{33}.$$

Warto wspomnieć, że macierz **K** jest symetryczna i że jej wyrazy najbardziej oddalone od przekątnej głównej są równe zeru. Jest to więc tzw. *macierz pasmowa.*

Otrzymana na podstawie (7.225) macierz sztywności konstrukcji jest macierzą osobliwą. Jak pamiętamy, przy jej budowaniu uwzględnione zostały warunki równowagi i zgodności przemieszczeń, nie zostały natomiast narzucone żadne ograniczenia kinematyczne na przemieszczenia żadnego z węzłów. Jednakże funkcje zastosowane przy budowie macierzy sztywności elementów opisujące pola przemieszczeń uwzględniały możliwość przemieszczania się całego elementu jako ciała sztywnego. Taką możliwość ma oczywiście także cała konstrukcja i stąd wynika osobliwość macierzy **K**. Aby tę osobliwość usunąć, należy ograniczyć przemieszczenia węzłów tak, aby co najmniej wyeliminować możliwość przemieszczania się konstrukcji jako ciała sztywnego. W przypadku układu płaskiego np. należy pozbawić go trzech stopni swobody.