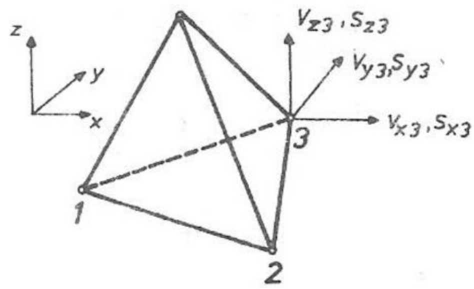
7.2.4. Element trójwymiarowy

Stosowanie metody elementów skończonych do analizy układów trójwymiarowych nie jest dotąd zbyt rozpowszechnione. Wynika to ogólnie z ograniczonego dostępu do maszyn liczących dużej mocy. Przyjęcie najprostszych elementów w postaci czworościanu do analizy nawet niewielkiego zagadnienia technicznego wymaga zwykle rozwiązania układu równań z kilkoma tysiącami niewiadomych. Z drugiej jednak strony omawiana metoda jest praktycznie jedyną metodą umożliwiającą określenie stanu naprężeń i odkształceń w układach trójwymiarowych o złożonej geometrii, warunkach obciążenia i podparcia. Biorąc to pod uwagę oraz zakładając, że możliwości komputerów będą rosły, a dostęp do dużych systemów cyfrowych będzie coraz łatwiejszy, wydaje się celowe omówienie chociażby najprostszego elementu pokazanego na rys. 7.20.



Rys. 7.20

W każdym wierzchołku występują trzy składowe przemieszczenia (v_x, v_y, v_z) oraz trzy siły (S_x, S_y, S_z).

Przemieszczenia tworzą wektory:

$$
v_x = \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{x2} \\ v_{x3} \\ v_{x4} \end{bmatrix}, \qquad v_y = \begin{bmatrix} v_{y1} \\ v_{y2} \\ v_{y3} \\ v_{y4} \end{bmatrix}, \qquad v_z = \begin{bmatrix} v_{z1} \\ v_{z2} \\ v_{z3} \\ v_{z4} \end{bmatrix}. \tag{7.115}
$$

Odpowiadają im wektory przemieszczeń uogólnionych:

$$q_x = \begin{bmatrix} q_{x1} \\ q_{x2} \\ q_{x3} \\ q_{x4} \end{bmatrix}, \qquad q_y = \begin{bmatrix} q_{y1} \\ q_{y2} \\ q_{y3} \\ q_{y4} \end{bmatrix}, \qquad q_z = \begin{bmatrix} q_{z1} \\ q_{z2} \\ q_{z3} \\ q_{z4} \end{bmatrix}. \tag{7.116}$$

Zakładając liniową zmienność składowych pola przemieszczeń mamy:

$$u^T = [1 \quad x \quad y \quad z] \tag{7.117}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{u}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{u}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}. \tag{7.118}$$

Wektory odkształceń i naprężeń określone są wzorami:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{x,x} \\ v_{y,y} \\ v_{z,z} \\ v_{x,y}+v_{y,x} \\ v_{x,z}+v_{z,x} \\ v_{y,z}+v_{z,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T_{,x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{u}^T_{,y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{u}^T_{,z} \\ \mathbf{u}^T_{,y} & \mathbf{u}^T_{,x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{u}^T_{,z} & \mathbf{0} & \mathbf{u}^T_{,x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{u}^T_{,z} & \mathbf{u}^T_{,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \mathbf{B}_q \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}, \tag{7.119}$$

gdzie:

$$\mathbf{B}_q = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right], \tag{7.120}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \mathrm{E}\,\mathrm{e} = \mathrm{E}\,\mathrm{B_q} \cdot \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}. \tag{7.121}$$

Macierz E występująca w powyższym wzorze jest określona następująco:

$$\mathrm{E} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & a & a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ a & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \tag{7.122}$$

gdzie:

$$a = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad b = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} . \tag{7.123}$$

Macierz sztywności wyznaczamy ze wzoru analogicznego do (7.113). Całkowanie jest bardzo proste, ponieważ elementy macierzy występujących pod całką są stałe. Po wykonaniu wskazanych działań mamy:

$$k_q = \frac{EV(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & b & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \tag{7.124}$$

gdzie V oznacza objętość elementu.

Związki pomiędzy przemieszczeniami, rzeczywistymi i uogólnionymi mają postać:

$$v_x = \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{x2} \\ v_{x3} \\ v_{x4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} q_x, \tag{7.125.1}$$

$$v_y = \begin{bmatrix} v_{y1} \\ v_{y2} \\ v_{y3} \\ v_{y4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} q_y, \tag{7.125.2}$$

$$v_z = \begin{bmatrix} v_{z1} \\ v_{z2} \\ v_{z3} \\ v_{z4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} q_z, \tag{7.125.3}$$

albo krótko:

$$\begin{aligned} v_x &= G^T q_x , \\ v_y &= G^T q_y , \\ v_z &= G^T q_z . \end{aligned} \tag{7.126}$$

Po odwróceniu otrzymujemy:

$$\begin{aligned} q_x &= U^T v_x , \\ q_y &= U^T v_y , \\ q_z &= U^T v_z , \end{aligned} \tag{7.127}$$

gdzie oznaczyliśmy $U = G^{-1}$.

Zależności pomiędzy siłami węzłowymi rzeczywistymi i uogólnionymi, analogiczne do (7.57a) wyglądają następująco:

$$\begin{aligned} S_x &= U\,Q_x\,, \\ S_y &= U\,Q_y\,, \\ S_z &= U\,Q_z\,, \end{aligned} \tag{7.128}$$

gdzie:

$$S_x = \begin{bmatrix} S_{x1} \\ S_{x2} \\ S_{x3} \\ S_{x4} \end{bmatrix}, \quad S_y = \begin{bmatrix} S_{y1} \\ S_{y2} \\ S_{y3} \\ S_{y4} \end{bmatrix}, \quad S_z = \begin{bmatrix} S_{z1} \\ S_{z2} \\ S_{z3} \\ S_{z4} \end{bmatrix}, \tag{7.129}$$

$$Q_x = \begin{bmatrix} Q_{x1} \\ Q_{x2} \\ Q_{x3} \\ Q_{x4} \end{bmatrix}, \quad Q_y = \begin{bmatrix} Q_{y1} \\ Q_{y2} \\ Q_{y3} \\ Q_{y4} \end{bmatrix}, \quad Q_z = \begin{bmatrix} Q_{z1} \\ Q_{z2} \\ Q_{z3} \\ Q_{z4} \end{bmatrix}. \tag{7.130}$$

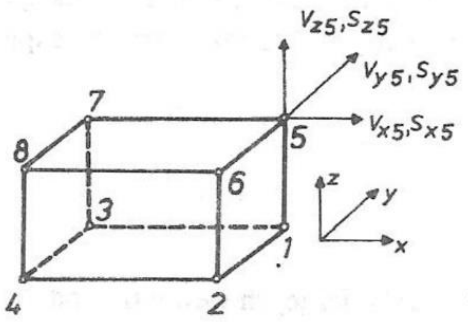
Macierz sztywności odniesioną do rzeczywistych sił i przemieszczeń obliczamy z zależności:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} U & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & U \end{bmatrix} \mathbf{k}_q \begin{bmatrix} U^T & 0 & 0 \\ 0 & U^T & 0 \\ 0 & 0 & U^T \end{bmatrix}. \tag{7.131}$$

Analizę elementu prostopadłościennego (rys. 7.21) przeprowadzamy identycznie, jak czworościennego. Wektory analogiczne do (7.115), (7.116), (7.120), (7.130) będą miały po osiem składowych.

Do opisu pola przemieszczeń zastosujemy wektor $\mathbf{u}$ w postaci:

$$\mathbf{u}^T = [1 \; x \; y \; z \; xy \; xz \; yz \; xyz]\,. \tag{7.132}$$



Rys. 7.21