3) Energia sprężysta w prętach dowolnie obciążonych.

Z przedstawionych powyżej wyrażeń wynika, że energia sprężysta nie jest liniową, lecz kwadratową funkcją sił przekrojowych: $\mathbf{N_X}$, $\mathbf{M_{gX}}$, $\mathbf{M_{GX}}$, $\mathbf{T_X}$. Jeżeli zatem nawet siły te są liniowymi funkcjami sił zewnętrznych, to energia sprężysta jest kwadratową funkcją sił zewnętrznych.

Rozpatrujemy przykład pręta prostego, poddanego rozciąganiu siłą $\mathbf{P_1}$, następnie $\mathbf{P_2}$, wreszcie siłą $\mathbf{P_1+P_2}$.

W pierwszym i drugim przypadku wyrażenia określające energię sprężystą przybierają postać:

$$V_{P1} = \frac{P_1^2 \cdot L}{2EA} \;\; ; \;\; V_{P2} = \frac{P_2^2 \cdot L}{2EA}$$

W przypadku jednoczesnego działania sił P_1 i P_2:

$$V_{P1+P2} = \frac{(P_1 + P_2)^2 \cdot L}{2EA} = \frac{(P_1^2 + 2P_1P_2 + P_2^2)L}{2EA} = \frac{P_1^2 \cdot L}{2EA} + \frac{P_2^2 \cdot L}{2EA} + \frac{2P_1P_2 \cdot L}{2EA}$$

Zatem:

$$V_{P1+P2} \neq V_{P1} + V_{P2}$$

Należy zatem wnioskować, że w ogólnym przypadku energii nagromadzonej pod wpływem różnych obciążeń <u>nie można obliczać stosując zasadę superpozycji.</u>

Wyjątek stanowią przypadki, w których poszczególne składowe obciążenia wykonują prace na różnych przemieszczeniach. Przykładowo, w przypadku pręta poddanego rozciąganiu siłą **P** oraz skręcaniu momentem $\mathbf{M_S}$, siła nie wykonuje pracy na przemieszczeniu kątowym, a moment – na przemieszczeniu liniowym.

W takich przypadkach ogólne wyrażenie opisujące energię sprężystą ma postać:

$$V = \int_L \frac{N_x^2 dx}{2EA} + \int_L \frac{M_{sx}^2 dx}{2GJ_O} + \int_L \frac{M_{gx}^2 dx}{2EJ_Z} + \int_L \frac{\alpha \cdot T_x^2 dx}{GA} \qquad (19)$$

Należy podkreślić, że składnik odpowiadający sile tnącej uwzględniany jest dość rzadko, w przypadku prętów, których długość jest tego samego rzędu, co wymiary przekroju.

4) Siły uogólnione i współrzędne uogólnione.

Przedstawione wzory na energię sprężystą posiadają taką samą budowę: energia sprężysta jest połową iloczynu obciążenia i wywołanego nim przemieszczenia. Aby umożliwić zapis o charakterze ogólnym, dotyczącym wszystkich przypadków obciążeń, wprowadzamy następujące pojęcia:

P_i – siła uogólniona – dowolne obciążenie działające na ciało (siła skupiona, moment, obciążenie ciągłe)

f_i – współrzędna uogólniona – przemieszczenie odpowiadające sile uogólnionej

W ogólnym przypadku:

$$L_{Pi} = V_i = \frac{1}{2} \cdot P_i \cdot f_i \tag{20}$$

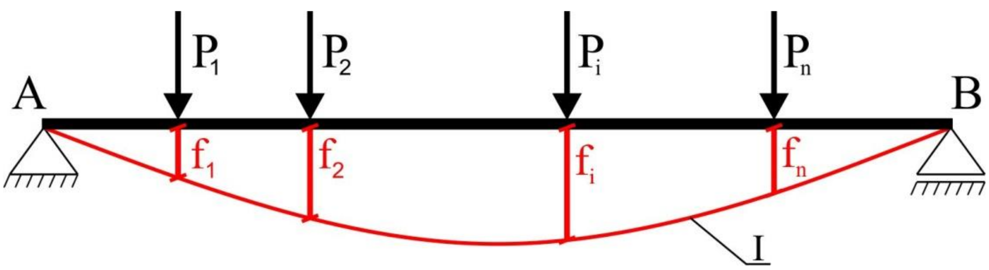
Praca wykonana przez układ sił $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ na przemieszczeniach $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ jest równa energii sprężystej V układu i wynosi:

$$L_P = V = \frac{1}{2}(P_1 \cdot f_1 + P_2 \cdot f_2 + \dots + P_i \cdot f_i + \dots + P_n \cdot f_n) \tag{21}$$

<u>Powyższa zależność jest słuszna wyłącznie dla układów Clapeyrona!</u>

5) Twierdzenie Castigliano.

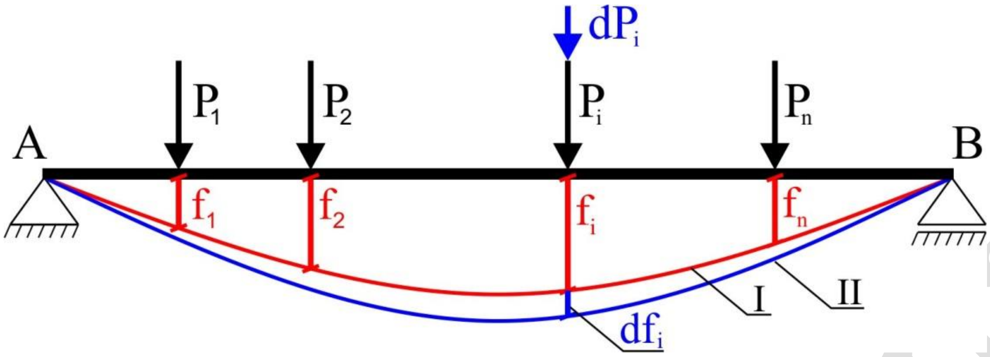
Rozpatrujemy dowolny układ Clapeyrona, reprezentowany przez belkę spoczywającą na dwóch podporach, obciążoną statycznie siłami **P_1**, **P_2**, … , **P_n** (rozważania przeprowadzone na tym przykładzie mają znaczenie ogólne).



Zgodnie ze wzorem (21) energia sprężysta belki wyniesie:

$$V_I = \frac{1}{2}(P_1 \cdot f_1 + P_2 \cdot f_2 + \cdots + P_i \cdot f_i + \cdots + P_n \cdot f_n) \tag{22}$$

Zakładamy, że siła $\mathbf{P_i}$ doznaje przyrostu $\mathbf{dP_i}$



Przyrost energii **dV** spowodowany przez siłę $\mathbf{dP_i}$ wynosi:

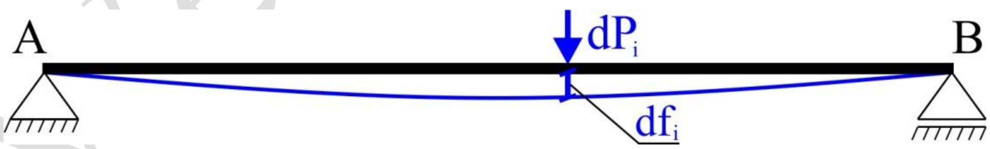
$$dV = \frac{\partial V}{\partial P_i} dP_i \tag{23}$$

Wyrażenie $\frac{\partial V}{\partial P_i}$ jest gradientem przyrostu energii przypadającego na przyrost siły.

Energia sprężysta wynosi zatem:

$$V_{II} = V_I + dV = V_I + \frac{\partial V}{\partial P_i} dP_i \tag{24}$$

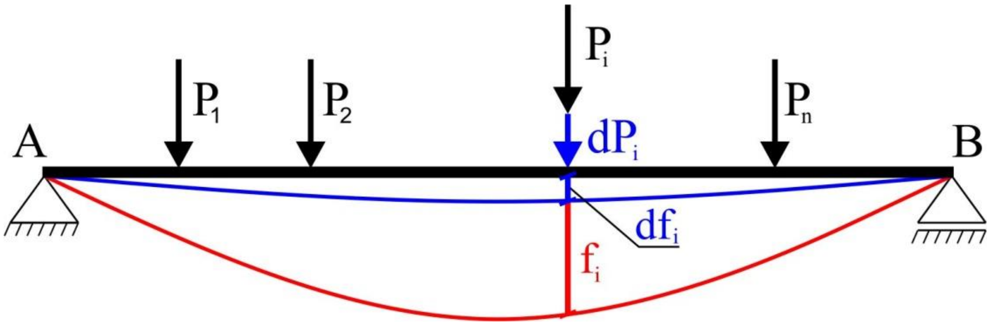
Następnie rozpatrujemy tę samą belkę, zakładamy jednak, że obciążenia przyłożone są w odwrotnej kolejności: Do nieobciążonej belki przykładamy siłę $\mathbf{dP_i}$, która spowoduje powstanie przemieszczenia $\mathbf{df_i}$



Praca statycznie przyłożonej siły $\mathbf{dP_i}$ na przemieszczeniu $\mathbf{df_i}$ jest równa energii sprężystej nagromadzonej w belce i wynosi:

$$V = \frac{1}{2} \cdot dP_i \cdot df_i \tag{25}$$

Następnie przykładamy siły $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, … , $\mathbf{P_n}$. Praca wykonana przez te siły wynosi $\mathbf{V_I}$ (wzór 22).



Podczas przykładania układu sił $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, … , $\mathbf{P_n}$, siła $\mathbf{dP_i}$ posiada ustaloną wartość. Praca wykonana przez tę siłę na przemieszczeniu $\mathbf{f_i}$ wyniesie zatem:

$$dL_i = dP_i \cdot f_i \tag{26}$$

Energia sprężysta belki wyniesie zatem:

$$V_{II} = \frac{1}{2} \cdot dP_i \cdot df_i + V_I + dP_i \cdot f_i \tag{27}$$

Porównując prawe strony równań (24) i (27) otrzymujemy:

$$V_I + \frac{\partial V}{\partial P_i} \cdot dP_i = \frac{1}{2} \cdot dP_i \cdot df_i + V_I + dP_i \cdot f_i \tag{28}$$

Odrzucając człon $\frac{1}{2} \cdot dP_i \cdot df_i$ jako małą wyższego rzędu, ostatecznie otrzymujemy:

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{P_i}} = \boldsymbol{f_i}} \tag{29}$$

Powyższa formuła jest twierdzeniem Castigliano:

Pochodna cząstkowa energii sprężystej układu względem siły uogólnionej jest równa współrzędnej uogólnionej, odpowiadającej tej sile.

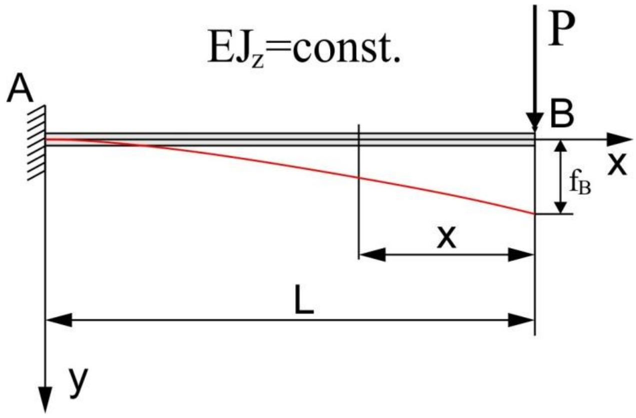
Różniczkując równanie (19) względem siły uogólnionej $\mathbf{dP_i}$, pomijając wpływ sił tnących, otrzymujemy następujący wzór ogólny:

$$\frac{\partial V}{\partial P_i} = \int_L \frac{2N_x \frac{\partial N_x}{\partial P_i} dx}{2EA} + \int_L \frac{2M_{sx} \frac{\partial M_{sx}}{\partial P_i} dx}{2GJ_O} + \int_L \frac{2M_{gx} \frac{\partial M_{gx}}{\partial P_i} dx}{2EJ_Z} \tag{30}$$

Zatem ostatecznie:

$$\frac{\partial V}{\partial P_i} = \int_L \frac{N_x \frac{\partial N_x}{\partial P_i}}{EA} dx + \int_L \frac{2M_{sx} \frac{\partial M_{sx}}{\partial P_i}}{GJ_O} dx + \int_L \frac{M_{gx} \frac{\partial M_{gx}}{\partial P_i}}{EJ_Z} dx \qquad (31)$$

Przykład:



Siłą uogólnioną, odpowiadającą przemieszczeniu $\mathbf{f_B}$ jest siła **P**. Zatem:

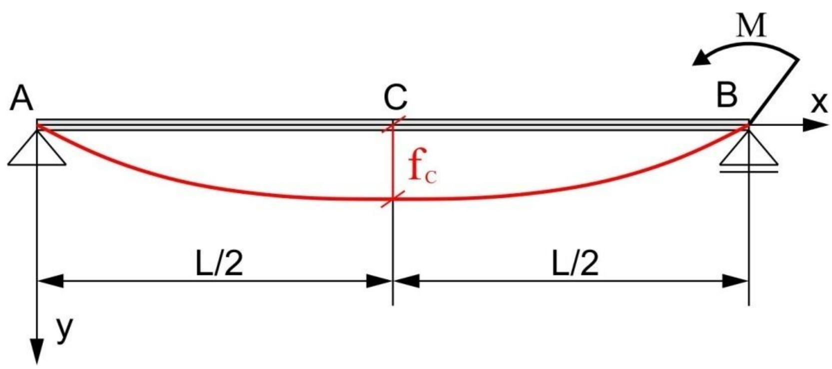
$$f_B = \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{EJ_z} \int_0^L M_{gx} \frac{\partial M_{gx}}{\partial P} dx$$

$$M_{gx} = -P \cdot x$$

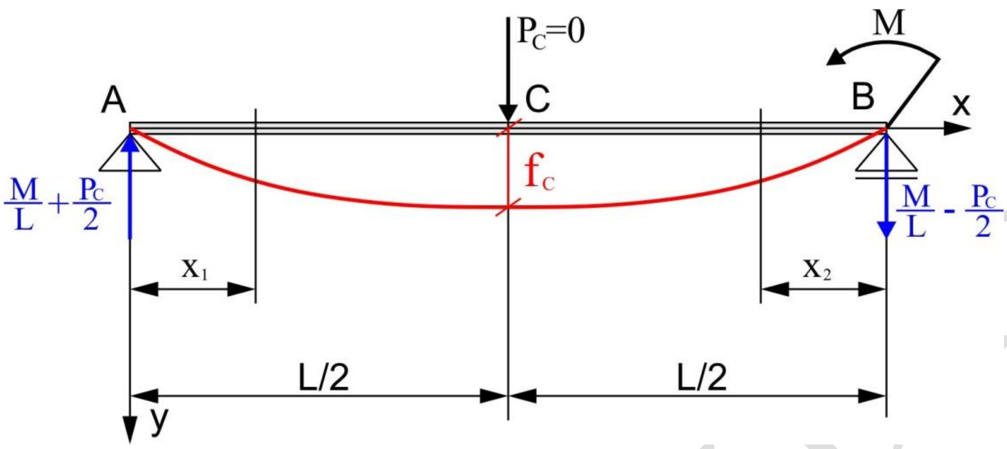
$$\frac{\partial M_{gx}}{\partial P} = -x$$

$$f_B = \frac{1}{EJ_z} \int_0^L (-P \cdot x)(-x) dx = \frac{P}{EJ_z} \int_0^L x^2 dx = \frac{P}{EJ_z} \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^L = \frac{PL^3}{3EJ_z}$$

Przykład:



Ponieważ w punkcie **C** nie występuje siła odpowiadająca współrzędnej uogólnionej $\mathbf{f_i}$, należy ją wprowadzić, przyjmując że jej wartość wynosi zero.



$$f_c = \frac{\partial V}{\partial P_C}$$

$$f_C = \frac{1}{EJ_z}\left[\int_0^{L/2} M_{gx_1}\frac{\partial M_{gx_1}}{\partial P_C}dx_1 + \int_0^{L/2} M_{gx_2}\frac{\partial M_{gx_2}}{\partial P_C}dx_2\right]$$

$$0 \le x_1 \le \frac{L}{2}$$

$$M_{gx_1} = \left(\frac{M}{L}+\frac{P_C}{2}\right)x_1 \quad ; \quad \frac{\partial M_{gx_1}}{\partial P_C} = \frac{x_1}{2}$$

$$0 \le x_2 \le \frac{L}{2}$$

$$M_{gx_2} = \left(\frac{M}{L}-\frac{P_C}{2}\right)x_2 + M \quad ; \quad \frac{\partial M_{gx_2}}{\partial P_C} = \frac{x_2}{2}$$

$$f_C = \frac{1}{EJ_z}\left[\int_0^{L/2} \frac{M}{L}x_1\cdot\frac{x_1}{2}dx_1 + \int_0^{L/2} \left\{\left(-\frac{M}{L}\right)x_2 + M\right\}\frac{x_2}{2}dx_2\right]$$