UŚREDNIANIE PODCZS CYFROWEGO POMIARU SYGNAŁÓW TŁUMIENIE ZAKŁÓCEŃ OKRESOWYCH

Cel: Zapoznać się z zasadami projektowania funkcji wagowych dla tłumienia składowych harmonicznych podczas cyfrowego pomiaru parametrów sygnałów AC.

Plan wykładu

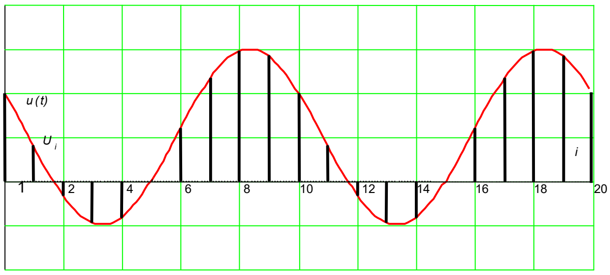
1. Wstęp. Cyfrowe opracowanie sygnałów pomiarowych: cyfrowe pomiary parametrów sygnałów AC.
2. Tłumienie (eliminacja) składowych harmonicznych
3. Parametry uśredniania spróbkowanego sygnału
4. Cyfrowe uśrednianie z wykorzystaniem prostych funkcji wagowych. Projektowanie prostych funkcji wagowych
5. Tłumienie składowych harmonicznych w szerokim zakresie częstotliwości. Zastosowanie specjalnych funkcji wagowych

7. Wnioski

1. Wstęp

Zasada cyfrowego uśredniania polega na wstępnym przetwarzaniu analogowo-cyfrowym sygnału wejściowego - skrót: pobranie próbek U_1, $U_2, \ldots, U_n$) w dyskretny momenty czasowe $t_1, t_2, \ldots, t_n$ i następnym wyznaczaniu wartości średniej z N próbek

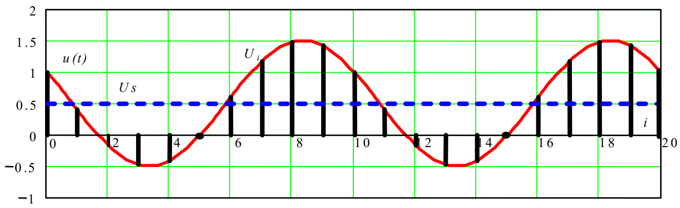
$$U_{sr} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} U_i = \frac{U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_N}{N}$$



1. Wstęp

W praktyce pomiarowej na drodze uśredniania często są mierzone parametry sygnałów przemiennych, będących wartościami średnimi pewnych funkcji wartości chwilowych sygnału:

Wartość składowej stałej sygnału

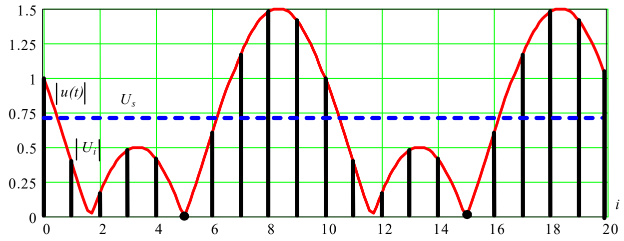


$$U_0 = U_{DC} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} U_i = \frac{U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_N}{N}$$

1. Wstęp

W praktyce pomiarowej na drodze uśredniania często są mierzone parametry sygnałów przemiennych, będących wartościami średnimi pewnych funkcji wartości chwilowych sygnału:

Wartość średnia wyprostowana sygnału

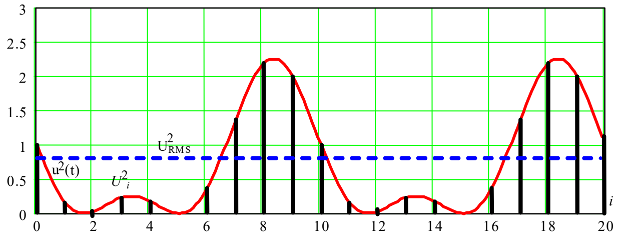


$$U_{SW} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|U_i| = \frac{|U_1|+|U_2|+|U_3|+\ldots+|U_N|}{N}$$

1. Wstęp

W praktyce pomiarowej na drodze uśredniania często są mierzone parametry sygnałów przemiennych, będących wartościami średnimi pewnych funkcji wartości chwilowych sygnału:

Wartość skuteczna sygnału



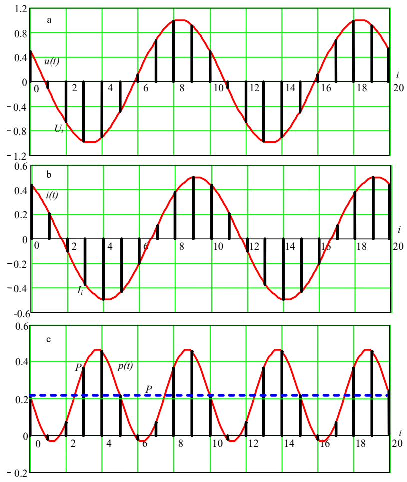
$$U_{TrueRMS} = U = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U_i^2} = \sqrt{\frac{U_1^2+U_2^2+U_3^2+\ldots+U_N^2}{N}}$$

1. Wstęp

W praktyce pomiarowej na drodze uśredniania często są mierzone parametry sygnałów przemiennych, będących wartościami średnimi pewnych funkcji wartości chwilowych sygnału:

Wartość mocy czynnej

$$P = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} U_i \cdot I_i = \frac{U_1 \cdot I_1 + U_2 \cdot I_2 + U_3 \cdot I_3 + \ldots + U_N \cdot I_N}{N}$$



2. Tłumienie (eliminacja) składowych harmonicznych w trakcie ich uśredniania

2.1. Skuteczność uśredniania.

We wszystkich algorytmach pomiarów parametrów sygnałów zmiennych po odpowiednim przetwarzaniu sygnału wejściowego istnieją:

- korzystna składowa w postaci składowej stałej Ux;
- niekorzystna składowa w postaci składowych harmonicznych Uh(t) przetworzonego sygnału

$$U_i = U_x + U_h(t_i)$$

2. Tłumienie (eliminacja) składowych harmonicznych w trakcie ich uśredniania

2.1. Skuteczność uśredniania.

Według definicji parametrów sygnałów zmiennych zadaniem operacji uśredniania

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U_i=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(U_x+U_h(t_i)\right)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U_x+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U_h(t_i)=$$
$$=U_x+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U_h(t_i)$$

- wyznaczanie składowej stałej przetworzonego odpowiednio do mierzonego parametru sygnału;

- **Tłumienie wpływu składowych harmonicznych**, wynikających podczas odpowiedniego przetwarzania sygnału.

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U_h(t_i)=\Delta U_h\to 0$$

2. Tłumienie (eliminacja) składowych harmonicznych w trakcie ich uśredniania

2.1. Skuteczność uśredniania.

Skuteczność eliminacji (tłumienia) niekorzystnych składowych harmonicznych na drodze uśredniania próbek sygnału może być scharakteryzowana

- błędem uśredniania , który powinien dążyć do zera , oraz $\Delta U_h\to 0$

- współczynnikiem tłumienia Ktł, jako stosunek amplitudy $U_{h,m}$ **składowej harmonicznej do modułu maksymalnego błędu** $|\Delta U_{h,\max}|$

$$K_{tl}=\frac{U_{h,m}}{|\Delta U_{h,\max}|}\qquad K_{tl,dB}=20\lg\left[\frac{U_{h,m}}{|\Delta U_{h,\max}|}\right]$$

2. Tłumienie (eliminacja) składowych harmonicznych w trakcie ich uśredniania

Podstawowe zagadnienia cyfrowego uśredniania sygnałów :

- **Wyznaczanie minimalnej liczby Nmin uśrednianych próbek sygnału niezbędnych dla teoretycznie całkowitej eliminacji składowych harmonicznych; oraz**
- **Wyznaczanie okresu Td (częstotliwości fd) próbkowania.**
- **Wyznaczanie sposobu uśredniania**

2. Tłumienie (eliminacja) składowych harmonicznych w trakcie ich uśredniania

Wartość średnia próbek sygnału harmonicznego

$$u_h(t) = U_{h,m}\cos(2\pi ft + \varphi)$$

o amplitudzie $U_{h,m}$, częstotliwości $f = \frac{\omega}{2\pi}$

przy okresie próbkowania wynosi

$$T_d = T/N$$

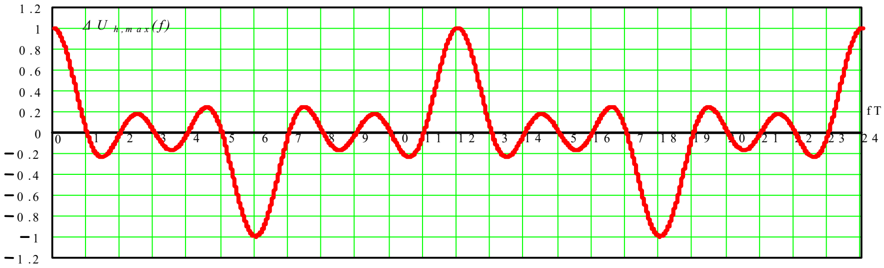
$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_h(t_i) = \Delta U_h(f) = \frac{U_{h,m}}{N}\sum_{i=1}^{N} cos(2\pi fT_d \cdot i + \varphi) = U_{h,m}\, cos\left(\pi fT\frac{(N-1)}{N} + \varphi\right)\frac{\frac{sin(\pi fT)}{N}}{sin\left(\frac{\pi fT}{N}\right)}.$$

Wyrażenie do obliczenia współczynnika tłumienia składowych harmonicznych podczas uśredniania sygnału

Wartość maksymalna błędu

$$\left|\cos\left(\pi f T\frac{(N-1)}{N}+\varphi\right)\right|_{max}=1$$

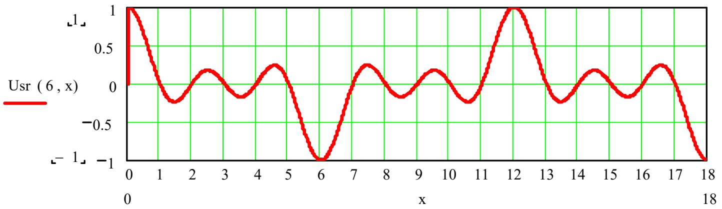
$$\Delta U_{h,max}=U_{h,m}\frac{\frac{1}{N}sin(\pi fTN)}{sin(\pi fT_d)}=U_{h,m}\frac{\frac{sin(\pi fT)}{N}}{sin\left(\frac{\pi fT}{N}\right)}.$$



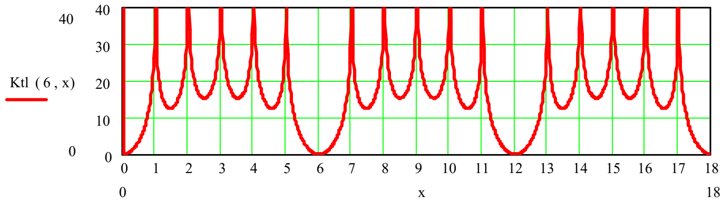
Zależność maksymalnej wartości błędu składowych harmonicznych przy uśrednianiu N=6 próbek sygnału wciągu jego okresu T

Wyrażenie do obliczenia współczynnika tłumienia składowych harmonicznych podczas uśredniania sygnału

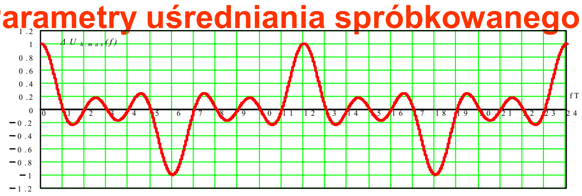
Wartość maksymalna błędu



Współczynnik tłumienia x=fT



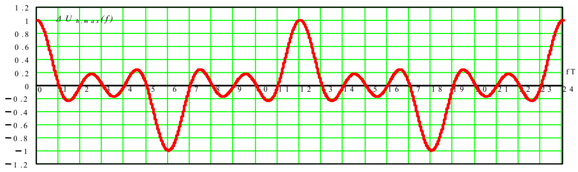
3. Parametry uśredniania spróbkowanego sygnału



Przy częstotliwości próbkowania $f_d=N\cdot f_1$ w ciągu jednego okresu T są uśredniane N próbek sygnału, w wyniku czego będą eliminowany wpływ (stłumiony) wszystkich harmonicznych z numerami

od k=1 do k=N-1.

3. Parametry uśredniania spróbkowanego sygnału



Innymi słowami, dla eliminowania wpływu (tłumienia) składowych harmonicznych do k-ej włącznie (przy $f_k=k\cdot f_1$) liczba uśrednianych próbek (pobranych w jednym okresie sygnału) powinna być o jeden większą

$$N_{min}=k+1$$

zamiast N=2k jak to wynika z twierdzenia Kotelnikowa Schannona.
Minimalna częstotliwość próbkowania powinna równać się

$$f_{d,min}=f_1\cdot N_{min}=f_1\cdot(k+1)=f_k+f_1.$$

to znaczy, że ona powinna być tylko o (k+1) razy zamiast $2\cdot k$ razy większą od częstotliwości podstawowej składowej.

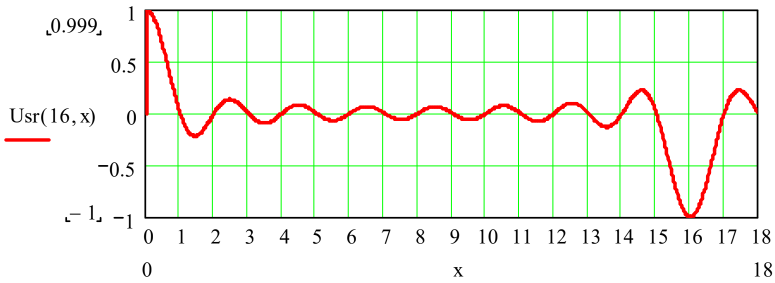
Przykład 1

Wyznaczyć minimalną liczbę próbek oraz częstotliwość próbkowania sygnału z warunku zapewnienia tłumienia wszystkich składowych harmonicznych od 1-ej do 15-tej, stosując uśrednianie próbek.

Rozwiązanie. Ponieważ numer maksymalnej składowej harmonicznej równa się k=15, wtedy minimalna liczba próbek wynosi

$$N_{min}=k+1=15+1=16.$$

Częstotliwość próbkowania powinna być o 16 razy większą od częstotliwości podstawowej składowej zamiast $2\cdot15=30$ razy.



Przykładowo, jeżeli f_1=2 kHz oraz k=15 maksymalna częstotliwość $f_k=15\cdot2$ kHz=30 kHz. Częstotliwość próbkowania powinna równać się $f_d=f_k+f_1$=32 kHz, zamiast $2\cdot30$ kHz=60 kHz

Poziom tumienia

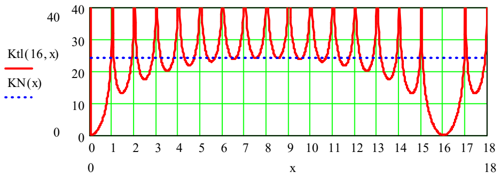
Maksymalny poziom obwiedni współczynnika tłumienia ma miejsce na częstotliwości równej połowie częstotliwości próbkowania

$f=f_{d,min}/2$

i ten poziom równa się liczbie próbek N (maksymalny błąd $\Delta_{u,m}=U_m/N$):

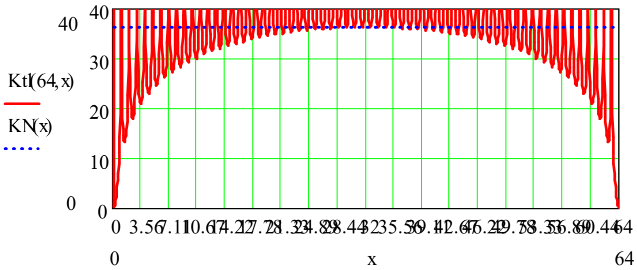
$K_{tl}=N$ lub $20lg(N)$ w decybeli.

Przykładowo, przy $N=16$ **$K_{tl,db}=20lg(16)=24$ dB**



Poziom tumienia

Przy $N=64$ **$K_{tl,db}=20lg(64)=36$ dB**



4. Cyfrowe uśrednianie z wykorzystaniem prostych funkcji wagowych

W rzeczywistości okres sygnału oraz częstotliwości składowych harmonicznych mogą się zmieniać lub ich wartości mogą odbiegać od wartości nominalnych.

W takich przypadkach w wyniku uśredniania składowe harmoniczne nie będą stłumione (eliminowane) całkowicie, a pozostanie błąd uśredniania, wartość którego zależy od stopnia odchylenia okresu (częstotliwości) od nominalnej wartości i jego można obliczyć według wzoru

$$\Delta U_{h,\max} = U_{h,m} \frac{\frac{1}{N}\sin(\pi f T)}{\sin\left(\pi f \frac{T}{N}\right)}.$$

4. Cyfrowe uśrednianie z wykorzystaniem prostych funkcji wagowych

Do małych względnych odchyleń okresu $|\delta_T|$ (dla odchyleń częstotliwości $\delta_f \approx -\delta_T$) będziemy zaliczać taki, dla których są spełniane warunki:

$$|\delta_T| = \left|\frac{\Delta T}{T_n}\right| \approx |\delta_f| = \left|\frac{\Delta f}{f_{1,n}}\right| << 1$$

Założymy, że trwałość rzeczywista okresu sygnału różni się od nominalnej o : $T = T_n(1+\delta_T)$

Ponieważ względne odchylenia okresu i częstotliwości posiadają różne znaki , to przy nominalnej częstotliwości $f_{1,n} = 1/T_n$ podstawowej składowej jej wartość rzeczywista różni na się na :

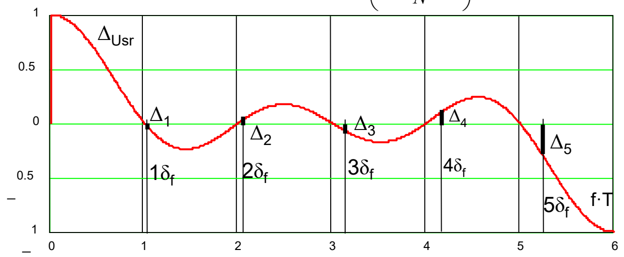
$$f_1 = \frac{1}{T_{1,n}(1+\delta_T)} \cong f_{1,n}(1-\delta_T) = f_{1,n}(1+\delta_f)$$

w takim razie częstotliwości *k*-tej składowej harmonicznej sygnału równają się $f_k = kf_1 = kf_{1,n}(1+\delta_f)$

4. Cyfrowe uśrednianie z wykorzystaniem prostych funkcji wagowych

Wtedy przy $f_{1,n}T_n =$ oraz $\sin\left(\pi k f_{1,n} T_n \left(1+\delta_f\right)\right) = \sin\left(\pi k + \pi k \delta_T\right) = \left(-1\right)^k \sin\left(\pi k \delta_f\right)$
wartość maksymalna błędu uśredniania wynosi

$$\Delta U_{h,\max} = U_{h,m} \frac{\left(-1\right)^k \frac{1}{N} \sin\left(\pi k \delta_f\right)}{\sin\left(\frac{\pi k\left(1+\delta_f\right)}{N}\right)}$$



Przy δ_f=+5% wartości błędu stanowią:

Δ_1=-0.05; Δ_2=0.058; Δ_3=-0.076; Δ_4=0.121; Δ_5=-0.308

4. Cyfrowe uśrednianie z wykorzystaniem prostych funkcji wagowych

Jeżeli, $\pi k \delta_f << 1$ co ma miejsce dla małych k (pierwsze składowe harmoniczne), oraz

$$\sin\left(\frac{\pi k\left(1+\delta_f\right)}{N}\right) \approx \frac{\pi k}{N}$$

przy k<<N maksymalna wartość błędu równa się

$$\left|\Delta U_{h,\max}\right| = U_{h,m}\left|\delta_f\right|$$

Przy tym wartość błędu uśredniania pierwszych składowych harmonicznych jest proporcjonalna do względnego odchylenia częstotliwości (okresu).

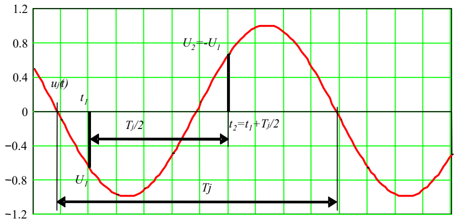
4. Cyfrowe uśrednianie z wykorzystaniem prostych funkcji wagowych

W celu zwiększenia tłumienia składowych harmonicznych przy małych odchyleniach częstotliwości można wykorzystać tak zwane powtórne uśrednianie, w najbardziej uproszczonej postaci polegające w uśrednianiu dwóch szeregów próbek sygnału, przesuniętych w czasie na pół okresu

$$\tau = T_j/2$$

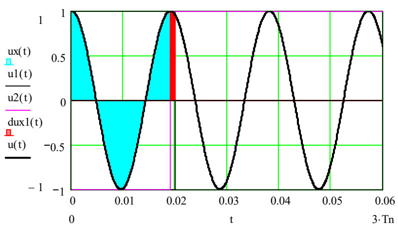
j-tej składowej harmonicznej, ponieważ wartości tej harmonicznej przez pół okresu zmienia swój znak na przeciwny:

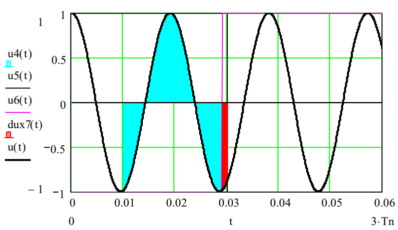
$$U_j(t+T_j/2) = -U_j(t) \qquad \tau_{p,1} = \frac{1}{2f_1} = \frac{T_1}{2} = \frac{T}{2} = \frac{N}{2}T_d$$



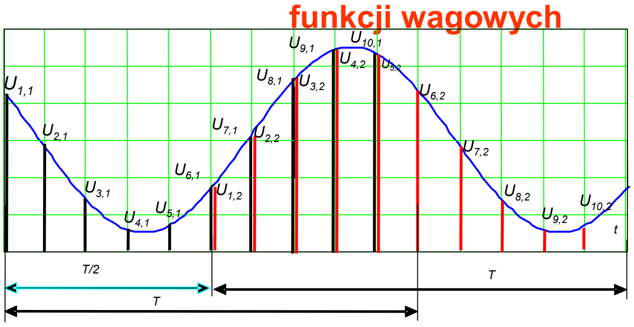
4. Cyfrowe uśrednianie z wykorzystaniem prostych funkcji wagowych

Wartości średnie składowej harmonicznej wyznaczonych z przesuwem początku o pół okresu różnią się znakiem, dlatego wartość średnia tych wartości średnich





4. Cyfrowe uśrednianie z wykorzystaniem prostych funkcji wagowych

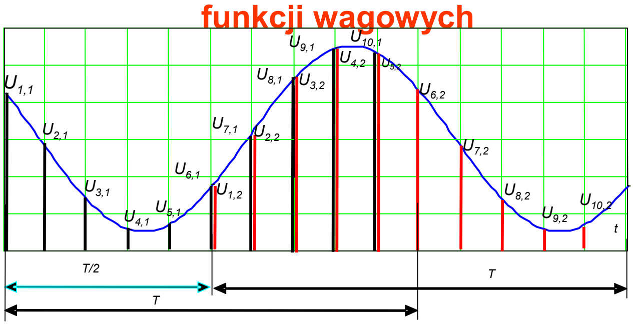


$$\tau_{p,1} = \frac{1}{2f_1} = \frac{T_1}{2} = \frac{T}{2} = \frac{N}{2}T_d$$

$$\tau_{p,1} = \frac{10}{2}T_d = 5T_d$$

$$U_{1-2,sr} = \frac{1}{2}\left[\frac{U_{1,1}+U_{2,1}+U_{3,1}+U_{4,1}+U_{5,1}+U_{6,1}+U_{7,1}+U_{8,1}+U_{9,1}+U_{10,1}}{10} + \frac{U_{1,2}+U_{2,2}+U_{3,2}+U_{4,2}+U_{5,2}+U_{6,2}+U_{7,2}+U_{8,2}+U_{9,2}+U_{10,2}}{10}\right] =$$

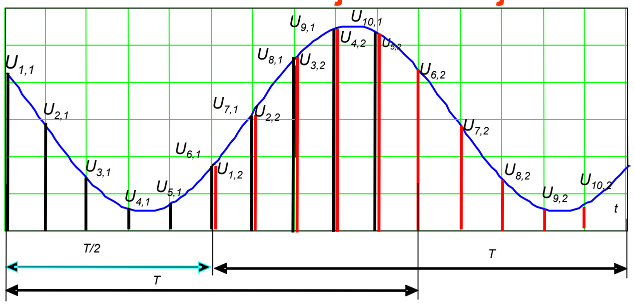
4. Cyfrowe uśrednianie z wykorzystaniem prostych funkcji wagowych



$$U_{1-2,sr} = \frac{1}{2}\left[\frac{U_{1,1}+U_{2,1}+U_{3,1}+U_{4,1}+U_{5,1}+U_{6,1}+U_{7,1}+U_{8,1}+U_{9,1}+U_{10,1}}{10} + \frac{U_{1,2}+U_{2,2}+U_{3,2}+U_{4,2}+U_{5,2}+U_{6,2}+U_{7,2}+U_{8,2}+U_{9,2}+U_{10,2}}{10}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{U_1+U_2+U_3+U_4+U_5+U_6+U_7+U_8+U_9+U_{10}}{10} + \frac{U_6+U_7+U_8+U_9+U_{10}+U_{11}+U_{12}+U_{13}+U_{14}+U_{15}}{10}\right] =$$

Dodatkowe tłumienie 1-ej składowej harmonicznej



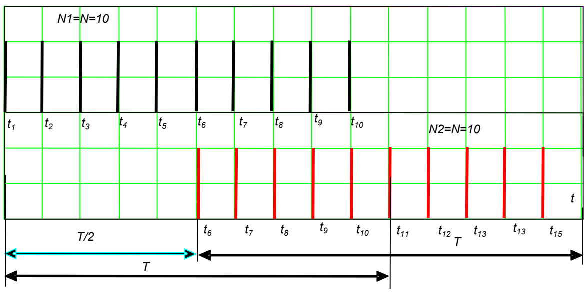
$$U_{1-2,sr} = \frac{1}{2}\left[\frac{U_{1,1}+U_{2,1}+U_{3,1}+U_{4,1}+U_{5,1}+U_{6,1}+U_{7,1}+U_{8,1}+U_{9,1}+U_{10,1}}{10} + \frac{U_{1,2}+U_{2,2}+U_{3,2}+U_{4,2}+U_{5,2}+U_{6,2}+U_{7,2}+U_{8,2}+U_{9,2}+U_{10,2}}{10}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{U_1+U_2+U_3+U_4+U_5+U_6+U_7+U_8+U_9+U_{10}}{10} + \frac{U_6+U_7+U_8+U_9+U_{10}+U_{11}+U_{12}+U_{13}+U_{14}+U_{15}}{10}\right] =$$

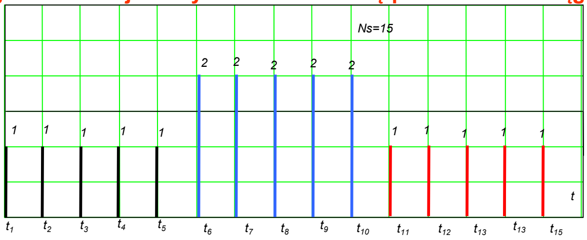
$$= \frac{U_1+U_2+U_3+U_4+U_5+2\left(U_6+U_7+U_8+U_9+U_{10}\right)+U_{11}+U_{12}+U_{13}+U_{14}+U_{15}}{20}.$$

Konstruowanie funkcji wagowej 1-2-1

Wartości współczynników przy uśrednianiu próbek sygnału

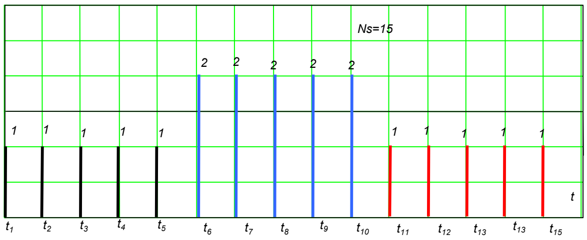


funkcja wagowa: 1-2-1 jako wynik nakładania się próbek dwóch ciągów



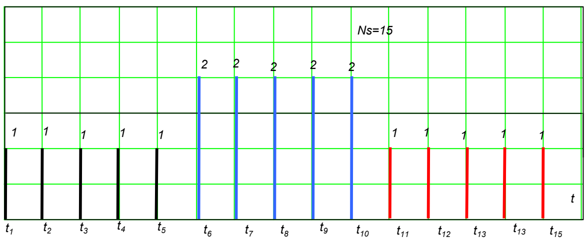
Funkcja wagowa: 1-2-1 dla dodatkowego tłumienia 1-ej składowej harmonicznej

Wartości współczynników przy uśrednianiu próbek sygnału



funkcja wagowa: 1-2-1 jako wynik nakładania się próbek dwóch ciągów, Zapewnia dodatkowe tłumienie 1-ej składowej harmonicznej

Funkcja wagowa: 1-2-1 dla dodatkowego tłumienia 1-ej składowej harmonicznej

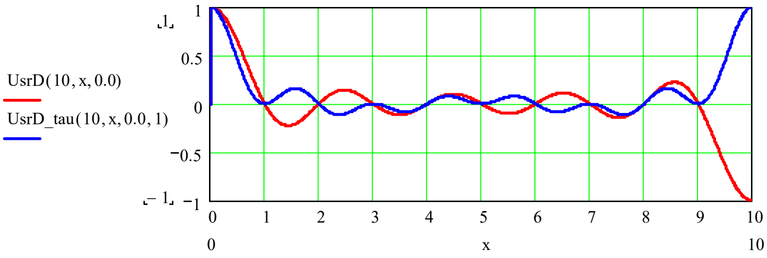


Zależność błędów przy zwykłym oraz wagowym (dodatkowe tłumienie 1-ej harmonicznej) uśrednianiu (N=10)

$$\Delta U_{h,\max} = U_{h,m} \frac{\frac{1}{N}\sin(\pi f T)}{\sin\left(\pi f \frac{T}{N}\right)} \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{fT}{1}\right).$$

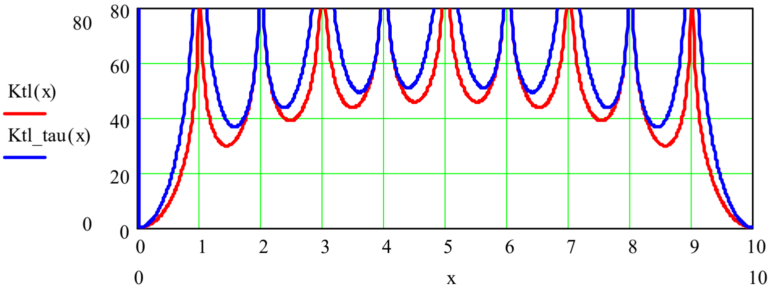
Funkcja wagowa: 1-2-1 dla dodatkowego tłumienia 1-ej składowej harmonicznej

Zależność błędów przy zwykłym oraz wagowym (dodatkowe tłumienie 1-ej harmonicznej) uśrednianiu (N=10)



Funkcja wagowa: 1-2-1 dla dodatkowego tłumienia 1-ej składowej harmonicznej

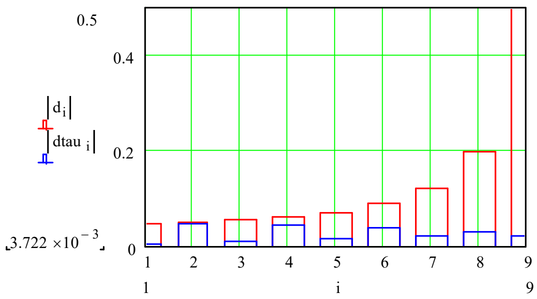
Zależność współczynnika tłumienia przy zwykłym oraz wagowym (z dodatkowym tłumieniem 1-j składowej harmonicznej) uśrednianiu (N=10, Ns=15).



Oprócz 1-je dodatkowa są tłumione 3, 5, 7 oraz 9-ta składowe harmoniczne. Tzn. nieparzyste odnośnie 1-ej składowe.

Funkcja wagowa: 1-2-1 dla dodatkowego tłumienia 1-ej składowej harmonicznej

Wartości błędów przy zwykłym oraz wagowym (dodatkowe tłumienie 1-ej harmonicznej) uśrednianiu (N=10, Ns=15, δf=5%)



4.2. Konstruowanie funkcji wagowej do tłumienia 2-ej składowej harmonicznej

Dla dodatkowego tłumienia 2-ej (j=2) składowej harmonicznej o częstotliwości $f_j=f_2$ (okresie $T_2=T/2$) minimalna wartość interwału czasowego przesunięcia dwóch szeregów próbek powinna równać się połowie okresu tej składowej harmonicznej

$$\tau_{p,2} = \frac{1}{2f_2} = \frac{T_2}{2} = \frac{T}{2\cdot 2} = \frac{N}{4}T_d$$

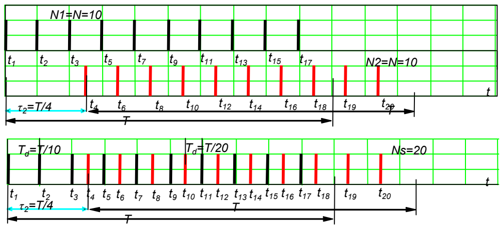
Przy N=10 $\tau_{p,2} = \frac{10}{4}T_d = 2,5T_d$

Tj. mamy liczbę ułamkową orresu próbkowania, która wymaga zwiększenia częstotliwości próbkowania – w danym przypadku o 2 razy.

4.2. Konstruowanie funkcji wagowej do dodatkowego tłumienia 2-ej składowej harmonicznej

Przy N=10

-2,5 okresu
-Próbkowania
=T/4



Dlatego żeby zrealizować uśrednianie należałoby zwiększyć częstotliwość próbkowania przetwornika A/C 2 razy!

Lepszym rozwiązaniem jest niewielkie zwiększenie liczby próbek uśredniana podstawowego tak, żeby przesunięcie dwóch szeregów próbek było krotnym całkowitej liczbie okresów próbkowania:

W tym przypadku (dla N=10) minimalna wartość ma być równą N=12.

Wtedy opóźnienie $\tau_{p,2} = \frac{12}{4} T_d = 3T_d$

4.2. Konstruowanie funkcji wagowej do dodatkowego tłumienia i-ej składowej harmonicznej

Otóż dla **dodatkowego tłumienia i-ej składowej harmonicznej**

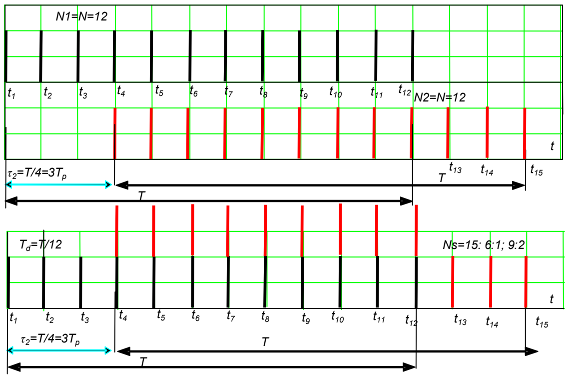
Liczba próbek ma być N=2*i*k (k liczba całkowita):

i=1 (pierwszej) N=2*k, to jest 2, 4, 6, 8 ,10,12, 14, 16 18, 20, 22, 24 itp.

i=2 (drugiej): N=4*k, to jest 4, 8 , 12, 16, 20, 24 itp.

i=3 (trzeciej): N=6*k, to jest 6, 12, 18, 24 itp..

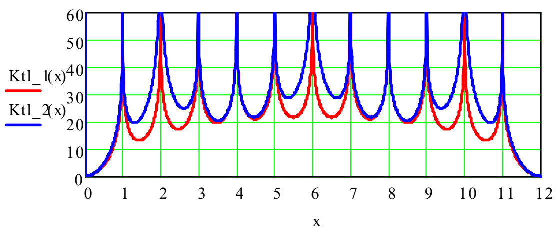
4.2. Konstruowanie funkcji wagowej do tłumienia 2-ej składowej harmonicznej



Zależność błędów przy wagowym (dodatkowe tłumienie 2-ej harmonicznej) uśrednianiu (N=12, Ns=15)

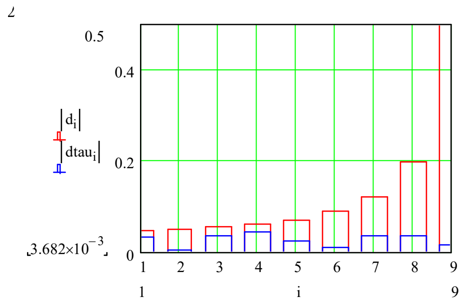
$$\Delta U_{h,\max} = U_{h,m} \frac{\frac{1}{N}\sin(\pi f T)}{\sin\left(\pi f \frac{T}{N}\right)} \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{fT}{2}\right).$$

4.2. Zależność współczynnika tłumienia przy wagowym (dodatkowe tłumienie 2-j harmonicznej) uśrednianiu (N=12, Ns=15)



Oprócz 2-je dodatkowo są tłumiona 6 i 10 składowe harmoniczne. Tzn. nieparzyste (3-cia, 5-ta) odnośnie 2-ej składowe.

4.2. Zależność błędów przy zwykłym oraz wagowym (dodatkowe tłumienie 2-ej harmonicznej) uśrednianiu (N=12, Ns=25)



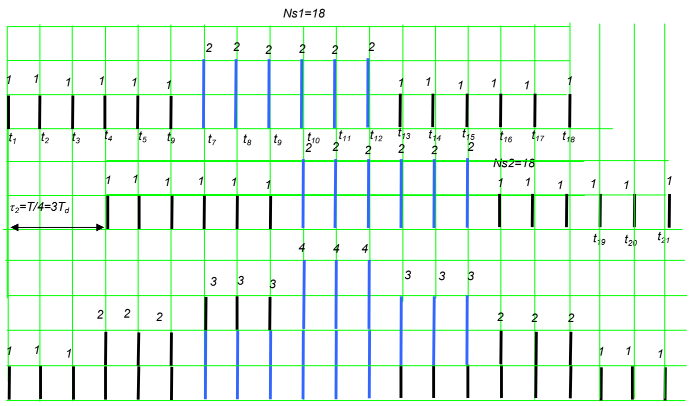
5.3. Konstruowanie funkcji wagowej do dodatkowego tłumienia 1-ej oraz 2-ej (jednocześnie) składowych harmonicznych

Dla dodatkowego tłumienia jednocześnie 1-ej (j=1) (N=10) oraz 2-ej (j=2) składowych harmonicznych należy zrealizować dwie kopie funkcji wagowej, zapewniającej dodatkowe tłumienie 1-ej harmonicznej , z wartość interwału czasowego przesunięcia tych kopii o $T_2/2=T/4$

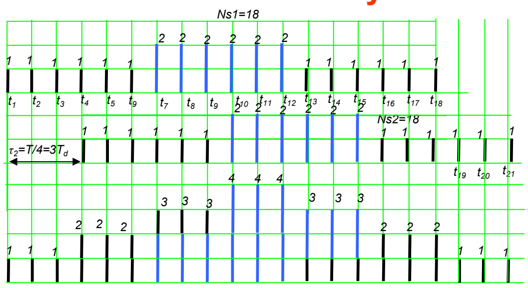
Dlatego w celu zapewnienia całkowitej liczby okresów przesunięcia liczba próbek uśredniania podstawowego ma być krotną 4, to jest w tym przypadku N=12.

$$\tau_{p,2} = \frac{10}{4} T_d = 2{,}5 T_d = \frac{T}{4}$$

4.3. Konstruowanie funkcji wagowej do dodatkowego tłumienia 1-ej oraz 2-ej (jednocześnie) składowych harmonicznych

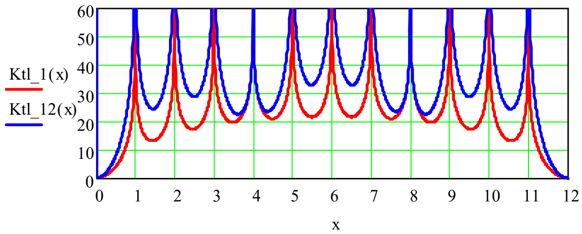


4.3. Konstruowanie funkcji wagowej do dodatkowego tłumienia 1-ej oraz 2-ej (jednocześnie) składowych harmonicznych



$$A12(x) := \frac{\frac{1}{N}\cdot\sin(\pi\cdot x)}{\sin\left(\pi\cdot\frac{x}{N}\right)}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot x\right)$$

4.3. Zależność współczynnika tłumienia przy zwykłym oraz wagowym (dodatkowe tłumienie 1-ej oraz 2-j harmonicznej) uśrednianiu (N=12, Ns=21)



Oprócz 1-je dodatkowa są tłumione 3, 5, 7 oraz 9-ta i 11-ta składowe harmoniczne. Tzn. nieparzyste odnośnie 1-ej składowe.

A także oprócz 2-je dodatkowo są tłumiona 6 i 10 składowe harmoniczne. Tzn. nieparzysta (3-cia) odnośnie 2-ej składowe.

Nie tłumione dodatkowo tylko 4 oraz 8 składowe.

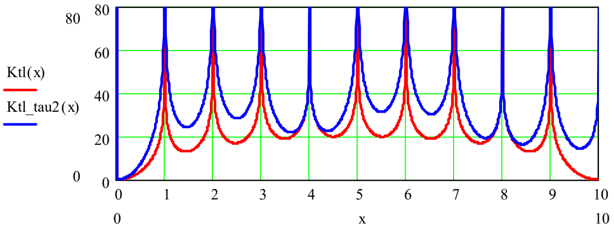
5. Tłumienie składowych harmonicznych szerokim paśmie częstotliwościowym

Każdy cyfrowy miernik parametrów sygnałów powinien zapewniać pomiary w szerokim paśmie częstotliwości. Na przykład od 20 Hz do 10 kHz, lub nawet do 100 kHz i wyżej.

Jeżeli częstotliwość składowych harmonicznych nie jest stałą i może się zmieniać w szerokim paśmie częstotliwości, wtedy wykorzystanie rozpatrywanych wyżej prostych funkcji wagowych nie jest wystarczająco skutecznym.

6. Tłumienie składowych harmonicznych szerokim paśmie częstotliwościowym. Funkcja wagowa (okno) Dolpha-Czebyszewa

Przykładowo w razie funkcji wagowej zapewniające dodatkowe tłumienie pierwszej (+3,5,..) oraz drugiej (+6,10,..) składowych harmonicznych przy częstotliwości po środku pomiędzy tymi i następnymi harmonicznymi tłumienie jest bardzo niskie: około 24, 28, 23, 24 decybeli (w przybliżeniu 20-30 razy) – rys. niżej.



5. Tłumienie składowych harmonicznych szerokim paśmie częstotliwościowym

Dla tłumienia składowych harmonicznych o częstotliwościach w szerokim zakresie – co ma miejsce przy cyfrowych pomiarach parametrów sygnałów (wartości średnia wyprostowana, skuteczna, moc czynna oraz bierna itp.) należy wykorzystać specjalne funkcje wagowe (okna).

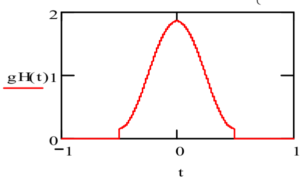
Niektóre z takich funkcji zostały omawiony w temacie dotyczącym wagowego uśredniania podczas pomiaru częstotliwości.

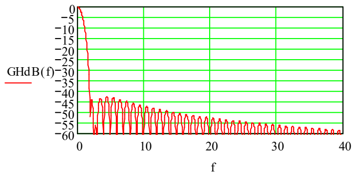
Z pośród takich funkcji należy wyróżnić funkcje trygonometryczne, np. Hamminag, Blackmana, Blackmana –Harrisa.

5. Tłumienie składowych harmonicznych szerokim paśmie częstotliwościowym

Funkcja (okno) Hamminga jest jedną z najprostszych, unormowana względem powierzchni opisywana jest wzorem:

$$g_H(t)=\frac{1}{T}\begin{cases}1+\frac{0.46}{0.54}\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right), & 0\le\frac{|t|}{T}\le\frac{1}{2},\\ 0, & \text{inaczej}\end{cases}$$





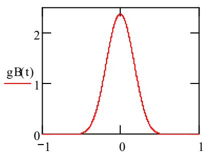
Ta funkcja zapewnia tłumienie składowych harmonicznych na poziomie ponad 42 dB (ponad około 100 razy). W wielu przypadkach takie tłumienie może być wystarczającym.

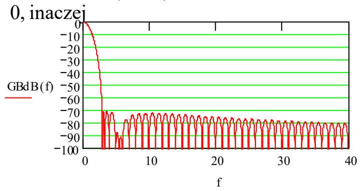
Szerokość głównego listka charakterystyki widmowej *v*0=2, tj. dla tłumienia składowych harmonicznych począwszy od dolnej częstotliwości f_d pasma tłumienia potrzebnie minimalnie 2 okresy tej harmonicznej.

5. Tłumienie składowych harmonicznych szerokim paśmie częstotliwościowym

Unormowaną względnie powierzchni funkcja wagowa Blackmana opisywana jest zależnością:

$$g_B(t)=\frac{1}{T}\begin{cases}1+1.1756\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)+0.18772\cos\left(4\pi\frac{t}{T}\right), & 0\le\frac{|t|}{T}\le\frac{1}{2},\\ 0, & \text{inaczej}\end{cases}$$





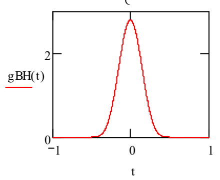
Ta funkcja zapewnia tłumienie składowych harmonicznych na poziomie ponad 70 dB (ponad około 316 razy).

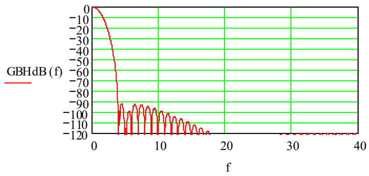
Szerokość głównego listka charakterystyki widmowej *v*0=3, tj. dla tłumienia składowych harmonicznych począwszy od dolnej częstotliwości f_d pasma tłumienia potrzebnie minimalnie 3 okresy tej harmonicznej.

5. Tłumienie składowych harmonicznych szerokim paśmie częstotliwościowym

Funkcja wagowa Blackmana-Harrisa. Istnieje kilka wariantów takich funkcji. Jedna z nich, cztery składnikowa funkcja opisywana jest unormowaną zależnością:

$$g_{BH}(t)=\frac{1}{T}\begin{cases}1+1.36109\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right)+0.39381\cos\left(4\pi\frac{t}{T}\right)+0.03256\cos\left(6\pi\frac{t}{T}\right), & 0\le\frac{|t|}{T}\le\frac{1}{2},\\ 0, \text{ inaczej} & \end{cases}$$





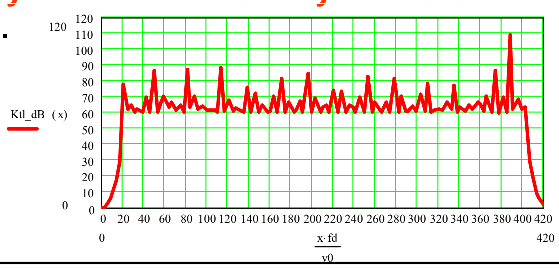
Ta funkcja zapewnia tłumienie składowych harmonicznych na poziomie ponad 90 dB (ponad 3160 razy).

Szerokość głównego listka charakterystyki widmowej *v*0=4, tj. dla tłumienia składowych harmonicznych począwszy od dolnej częstotliwości f_d pasma tłumienia potrzebnie minimalnie 4 okresy tej harmonicznej.

5. Tłumienie składowych harmonicznych szerokim paśmie częstotliwościowym

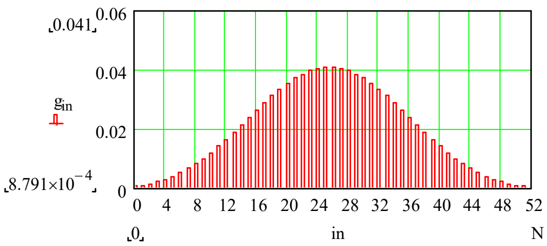
Pod względem trwałości uśredniania cyfrowego przy zapewnieniu zadanego poziomu tłumienia wszystkich harmonicznych najlepszy efekt daje zastosowanie funkcji wagowej (okna) Dolpha- Czebyszewa.

Jest to "najlepsza" funkcja wagowa (okno) ponieważ zapewnia zadany poziom tłumienia Ktl zakłóceń w zadanym skończonym zakresie częstotliwości od dolnej fd do górnej fg. przy minimalnie możliwym czasie uśredniania Tus.



5.1 Funkcja wagowa (okno) Dolpha-Czebyszewa

•Charakterystyczny widok FW Dolpha-Czebyszewa jest pokazana na rysunku niżej

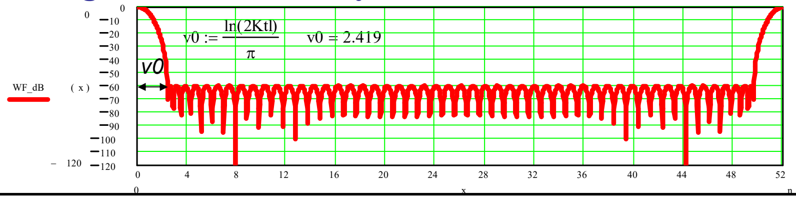


5.1. Funkcja wagowa (okno) Dolpha-Czebyszewa

•W dziedzinie częstotliwości FW Dolpha-Czebyszewa minimalizuje szerokość listka głównego widma przy założeniu określonej długości okna oraz przy ograniczeniu dopuszczalnej wysokości maksymalnego listka bocznego widma .

$$v_0 \cong \frac{\ln(2K_{tl})}{\pi}$$

Przykładowo na rys. niżej pokazano moduł widma FW Dolpha-Czebyszewa zapewniającej stały minimalny poziom tłumienia 60 dB (1 tysiąc razy) w paśmie częstotliwości od 20 Hz do 400 Hz wartość szerokości głównego listka równa się:



5.2. Projektowanie FW Dolpha–Czebyszewa

Z punktu widzenia realizacji praktycznej uśredniania wagowego

zadanymi parametrami są:

1) **poziom tłumienia Ktl oraz**
2) **pasmo częstotliwości od fd do fg;**

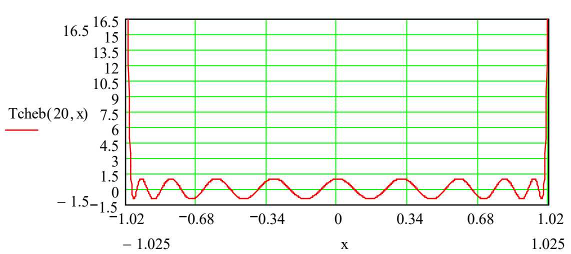
a poszukiwanymi parametrami są:

1) **Rząd FW n;**
2) **liczba N (długość) współczynników FW;**
3) **wartości współczynników *wi* (*i=1,2,…,N*),**
4) **częstotliwość próbkowania fs oraz**
5) **czas uśredniania Tus.**

5.2. Projektowanie FW Dolpha–Czebyszewa

Charakterystyka widmowa funkcji wagowej Dolpha-Czebyszewa o N współczynnikach g_i jest konstruowana na podstawie wielomiana Czebyszewa rzędu *n=N-1*:

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \cdot \arccos(x)), & dla \quad |x| \le 1 \\ \cosh(n \cdot \operatorname{arccos h}(x)), & dla \quad |x| > 1 \end{cases}$$



2. Projektowanie optymalnej FW Dolpha–Czebyszewa

Wartości współczynników tej FW można obliczyć wg wzoru

$$g_i = \frac{x_0^2}{2K_{tl}} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(-1)^j n(n-j-1)!x_0^{-2j}}{j!(n-j-i+1)!(i-j-1)!}$$

Gdzie: $$x_0 = \cosh\left(\frac{\operatorname{arccos h}(K_{tl})}{n}\right)$$

parametr, który jest powiązany z szerokością głównego listka widma zależnością:

$$\nu_0 = \frac{n \cdot \arccos(1/x_0)}{\pi} = \frac{n \cdot \arccos\left(\dfrac{1}{\cosh\left(\dfrac{\operatorname{arccos h}(K_{tl})}{n}\right)}\right)}{\pi} \cong \frac{\ln(2K_{tl})}{\pi}$$

5.2. Projektowanie FW Dolpha–Czebyszewa

Częstotliwość próbkowania sygnału równa się:

fs=fd+fg=fd (D+1)

gdzie

D=fg/fd

jest względnym zakresem częstotliwości

Rząd WF wyznacza się wg. wzoru:

$$n = (D+1)\nu_0 = \frac{\operatorname{arccos h}(K_{tl})}{\operatorname{arccos h}\left(\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{D+1}\right)}\right)}$$

5.2. Projektowanie FW Dolpha–Czebyszewa

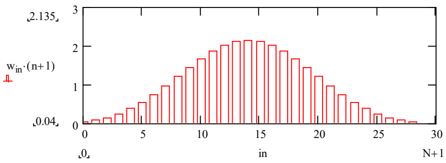
Liczba próbek FW Dolpha-Czebyszewa równa się:

N=n+1

Wartości próbek obliczane są wykorzystując odwrotne przekształcenie Fouriera wielomianu Czebyszowa

$$w_{in} = \frac{1}{N}\left[1 + \frac{2}{K_{tl}}\sum_{k=1}^{M} T_{N-1}\left(x_0 \cos\frac{\pi k}{N}\right)\cos\frac{2\pi k(m-M)}{N}\right]$$

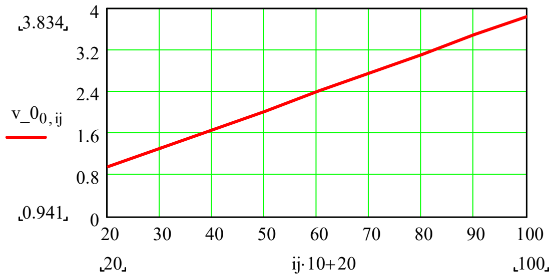
$$M = \frac{N-1}{2} \qquad 0 \le m \le 2M = N-1$$



5.2. Projektowanie FW Dolpha–Czebyszewa

Zależność względnego czasu uśredniania od wartości współczynnika tłumienia

$$v\_0 := 0.221 + Kdb \cdot 0.0366$$

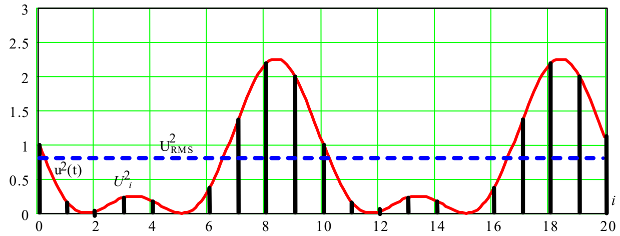


Przy Ktl=50 dB v0=2,054 Tus=v0/fd=41ms

5.3.Cyfrowy pomiar wartości skutecznej z uśrednianiem wagowym

Wartość skuteczna sygnału

$$U_{TrueRMS} = U = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} U_i^2 w_i}$$



5.3.Cyfrowy pomiar wartości skutecznej z uśrednianiem wagowym

W sygnale pomiarowym jest:

1) Tylko jedna składowa harmoniczna o częstotliwości f1w paśmie od f_{dx} do f_{gx} :

Przy obliczaniu kwadratu wartości próbek powstaje druga składowa harmoniczna

Sygnał kwadrowany będzie się mieścić w paśmie

od $f_d=2f_{dx}$ do $f_g=2f_{gx}$.

2) Stała składowa U0+ podstawowa składowa harmoniczna o częstotliwości f_1 + k składowych wyższych (kf_1) w paśmie od f_{dx} do fg: $kf_1<f_{gx}$.

$$u(t) = U0 + Um_1\cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + Um_1\cos(2\pi 2 f_1 t + \varphi_2) + \ldots + Um_1\cos(2\pi k f_1 t + \varphi_k)$$

Sygnał kwadrowany będzie się mieścić w paśmie

od $f_d=f_{dx}$ do $f_g = 2f_{gx}$.

5.3. Cyfrowy pomiar mocy czynnej z uśrednianiem wagowym

$$P = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} U_i \cdot I_i \cdot w_i$$

- **W razie cyfrowego pomiaru mocy parametry częstotliwościowe analogiczne jak dla pomiaru wartości skutecznej**

6. Wnioski

1 Dla eliminowania wpływu (tłumienia) składowych harmonicznych od 1-ej do k-ej włącznie liczba uśrednianych próbek (pobranych w jednym okresie sygnału) powinna być o jeden większą Nmin=N=k+1,

2. Częstotliwość próbkowania $fp=(k+1)\cdot f_1=Nf_1$,
Minimalny czas przetwarzania Tp=T.

3. Dla dodatkowego tłumienia j-ej składowej harmonicznej należy zrealizować dwie kopie zwykłego uśredniania z wartością interwału czasowego przesunięcia tych kopii o Tj/2=T/2j, Minimalny czas przetwarzania Tp=T+T/2j.

6. Wnioski

4. Dla dodatkowego tłumienia jednocześnie j1-ej oraz j2-ej składowych harmonicznych należy zrealizować dwie kopie funkcji wagowej, zapewniającej dodatkowe tłumienie j1-ej harmonicznej , z wartością interwału czasowego przesunięcia tych kopii o Tj2/2=T/2j2. Minimalny czas przetwarzania Tp=T+T/2j1+T/2j2.

5. Tłumienie składowych harmonicznych w szerokim paśmie może być zapewniono poprzez wykorzystania specjalnych funkcji wagowych (okien)

6. Z pośród różnych funkcji wagowych “najlepszą” funkcją wagową jest funkcja Dolpha-Chebysheva ponieważ zapewnia zadany poziom tłumienia Ktl zakłóceń w zadanym skończonym zakresie częstotliwości od dolnej fd do górnej fg. przy minimalnie możliwym czasie uśredniania Tus