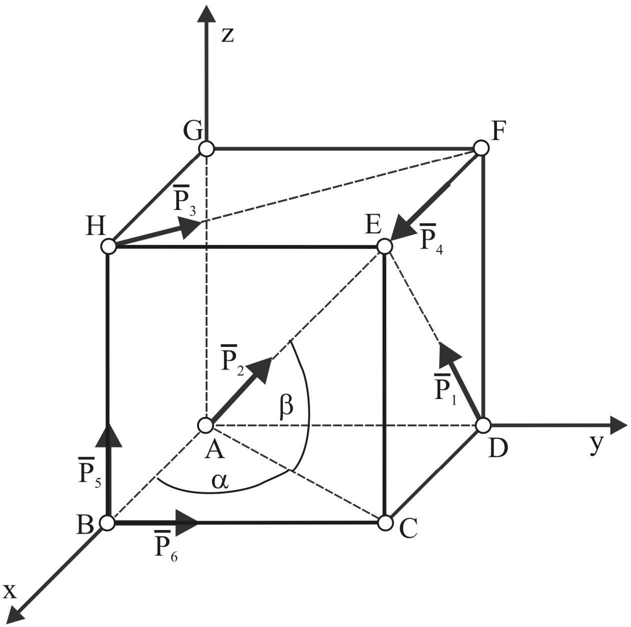
I. WEKTOR SUMY UKŁADU SIŁ

Zadanie I.1. W narożach sześcianu zaczepiono układ sił. Określić wektor sumy tego układu.
Dane:

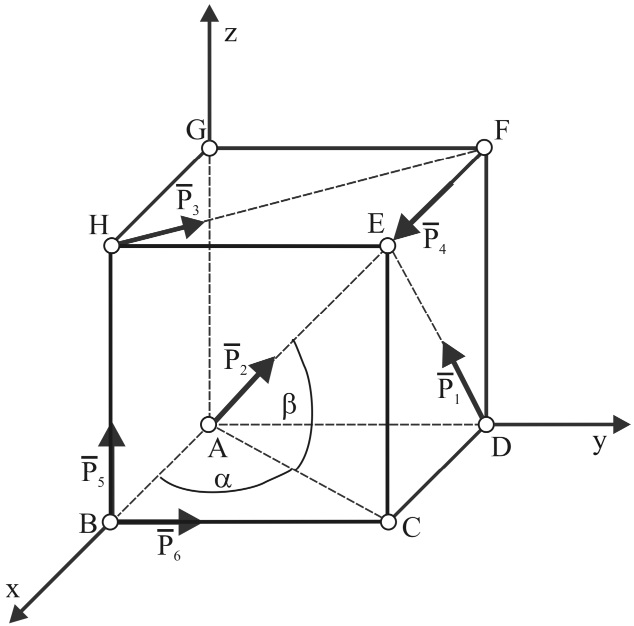
$$\left.\begin{aligned} &P_1 = 2\sqrt{2}P \\ &P_2 = \sqrt{3}P \\ &P_3 = \sqrt{2}P \\ &P_4 = P_5 = P_6 = 2P \end{aligned}\right\} [N]$$

sześcian o boku a [m]



Rys. I.1. Układ sił

Przyjmujemy układ odniesienia xyz (prostokątny prawoskrętny) o początku w punkcie A.



Rys. I.1. Układ sił

Z geometrii układu określamy:

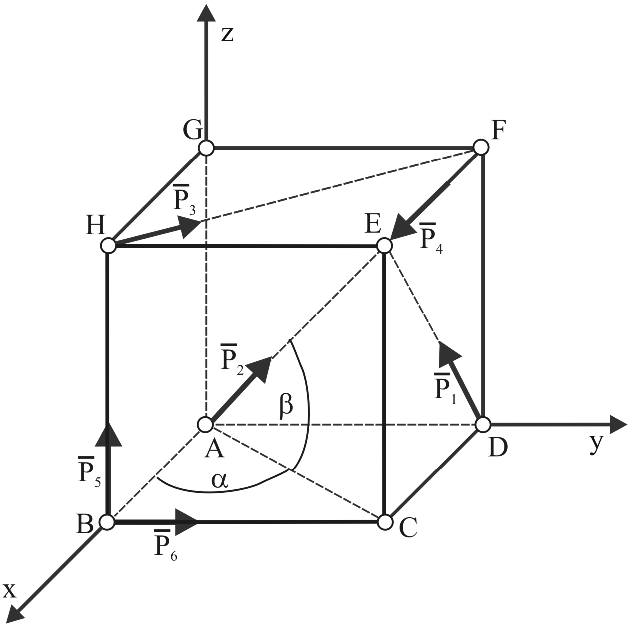
$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{3};\quad \cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \tag{I.1}$$

Wektor sumy układu w postaci analitycznej zapisujemy jako:

$$\overline{S}=S_x\,\overline{i}+S_y\,\overline{j}+S_z\overline{k} \tag{I.2}$$

Wartość wektora sumy to:

$$S=\sqrt{S_x^2+S_y^2+S_z^2} \tag{I.3}$$



Rys. I.1. Układ sił

W analizowanym przykładzie rzuty wektora sumy na osie układu odniesienia to:

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} = P_1\cos\alpha + P_2\cos\beta\cos\alpha - P_3\sin\alpha + P_4 = 4P\left[N\right]$$

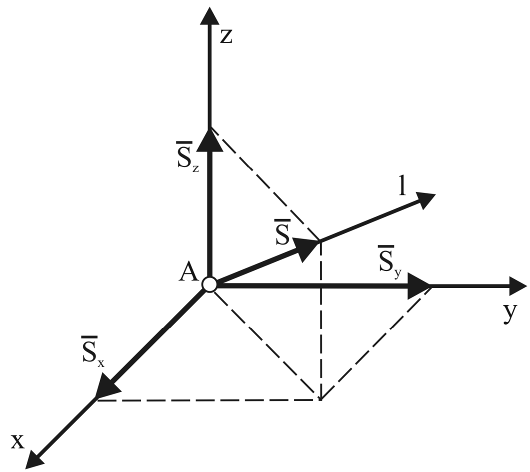
$$S_y = \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = P_2\cos\beta\sin\alpha + P_3\cos\alpha + P_6 = 4P\left[N\right] \qquad \text{(I.4)}$$

$$S_z = \sum_{i=1}^{n} P_{iz} = P_1\sin\alpha + P_2\sin\beta + P_5 = 5P\left[N\right]$$

Następnie określamy wartość wektora sumy czyli wstawiamy rzuty do zależności (I.3) i otrzymujemy:

$$S=\sqrt{(4P)^2+(4P)^2+(5P)^2}=\sqrt{16P^2+16P^2+25P^2}=\sqrt{57}P\,[N] \tag{I.5}$$

Na poniższym rysunku pokazano wektor sumy układu sił.



Rys. I.2. Wektor sumy układu sił

Kąty jakie wektor sumy tworzy z poszczególnymi osiami to:

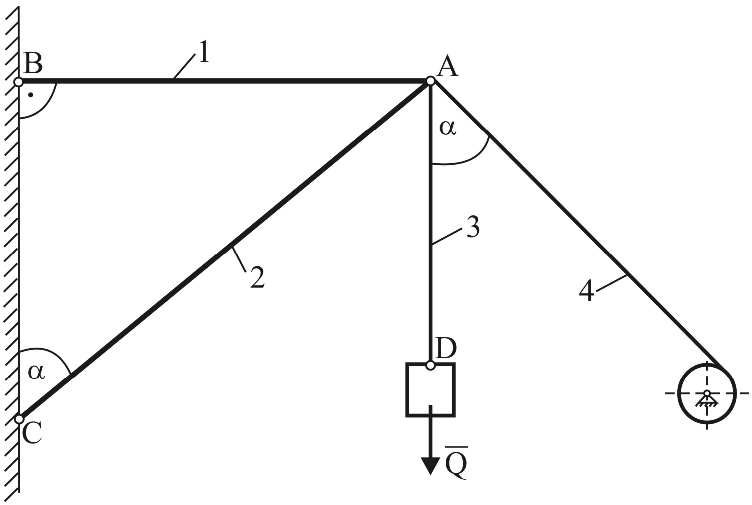
$$\begin{aligned}\cos(x\,\hat{,}\,\overline{S})&=\frac{S_x}{S}\\ \cos(y\,\hat{,}\,\overline{S})&=\frac{S_y}{S}\\ \cos(z\,\hat{,}\,\overline{S})&=\frac{S_z}{S}\end{aligned} \tag{I.6}$$

Należy nadmienić, ze wektor sumy jest niezmiennikiem układu i można go zaczepić w dowolnym punkcie.

II. RÓWNOWAGA PŁASKIEGO ZBIEŻNEGO UKŁADU SIŁ

Zadanie II.1. W odniesieniu do układu płaskiego pokazanego na rysunku podać analityczne równania równowagi statycznej, następnie rozwiązać te równania i określić siły reakcji więzów.

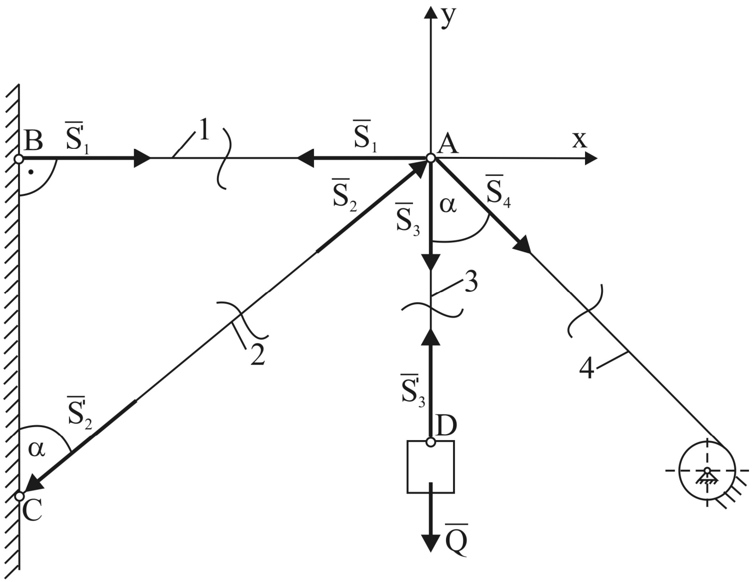
Dane:
Q [N], α [rad], 1, 2-pręty, 3,4-liny.



Rys. II.1. Układ mechaniczny

Na punkt A działa układ sił biernych S_1, S_2, S_3, S_4 będący płaskim zbieżnym układem sił. Siły te będą w równowadze jeżeli wektor siły wypadkowej tego układu będzie zerem, czyli

$$\overline{W}=\overline{S}_1+\overline{S}_2+\overline{S}_3+\overline{S}_4=0 \tag{II.1}$$



Rys. II.2. Płaski zbieżny układ sił

Rozwiązanie analityczne zadania polega na napisaniu analitycznych równań równowagi statycznej płaskiego zbieżnego układu sił, czyli

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix}=-S_1+S_2\sin\alpha+S_4\sin\alpha=0 \tag{II.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy}=S_2\cos\alpha-S_3-S_4\cos\alpha=0 \tag{II.3}$$

Możemy również napisać równanie związane z ciałem zawieszonym na linie, czyli

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy} = S_3' - Q = 0 \quad \rightarrow \quad S_3' = Q \tag{II.4}$$

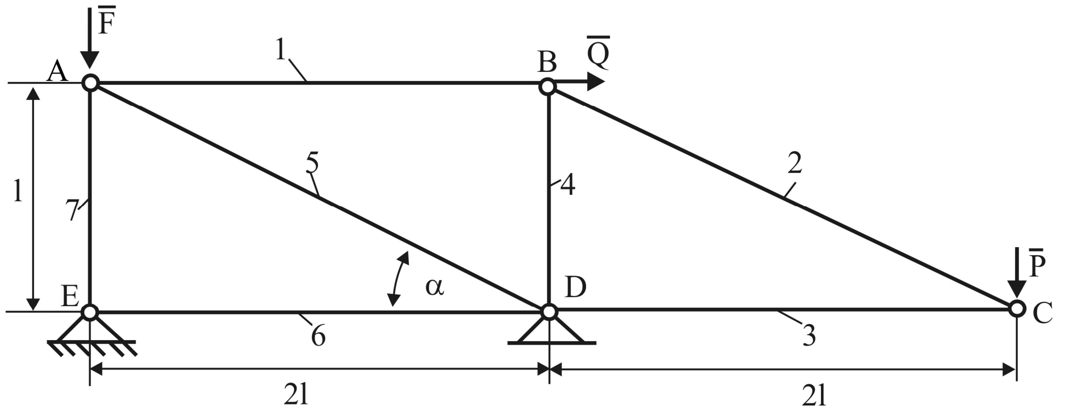
Z równowagi liny wynika: $S_3' = S_3$.

Dostajemy układ dwóch równań algebraicznych (równania II.2 i II.3) o trzech niewiadomych. Takie układy nazywamy układami statycznie nierozwiązalnymi (przesztywnionymi lub hiperstatycznymi).

Równowaga węzłów kratownicy, napięcie prętów

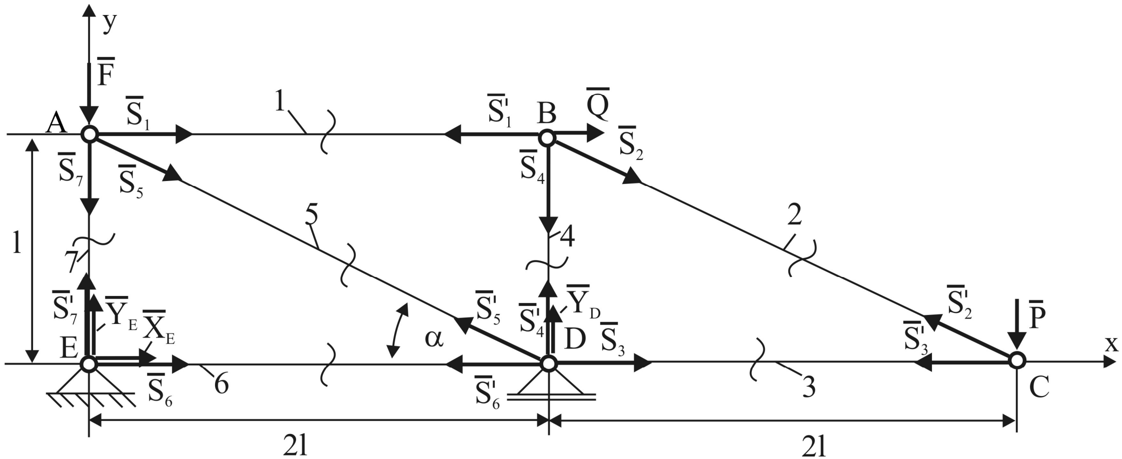
Zadanie II.2. odniesieniu do układu płaskiego pokazanego na rysunku (kratownicy płaskiej) podać analityczne równania równowagi statycznej poszczególnych węzłów oraz podać jak duże siły przenoszą pręty.

Dane:
F[N], Q [N], P[N], α [rad], l[m], 1÷7-pręty.



Rys. II.4. Kratownica płaska

Rozwiązując kratownicę idealną czyli taką, w której siły czynne zaczepione są w węzłach, szukamy równowagi poszczególnych węzłów. Wprowadzamy siły reakcji poszczególnych prętów oraz podpór.



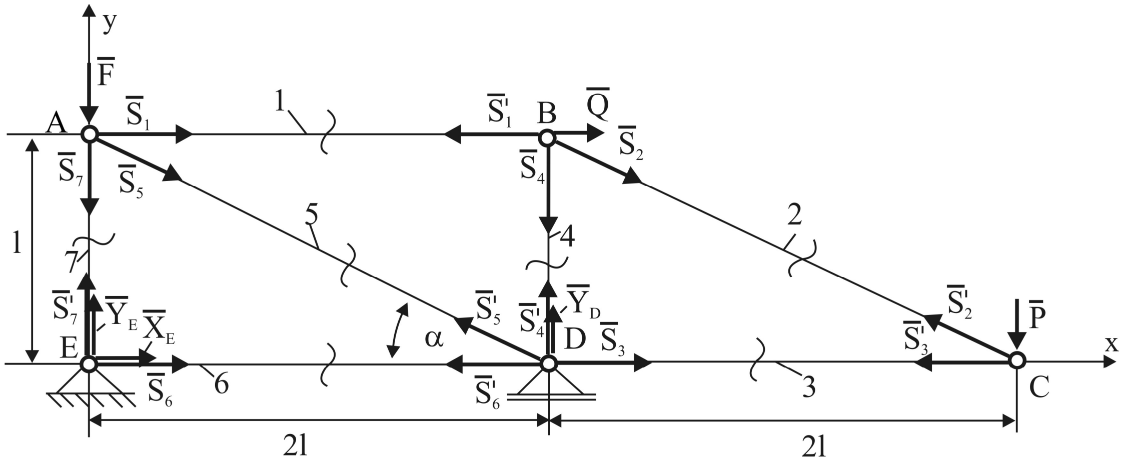
Rys. II.5. Kratownica płaska z wprowadzonymi siłami reakcji więzów

Równowaga węzła A

Na węzeł ten działa siła czynna $\overline{F}$ oraz siły reakcji prętów $\overline{S}_1, \overline{S}_5, \overline{S}_7$. Ponieważ węzeł obciąża płaski zbieżny układ sił, więc równania równowagi węzła A zapiszemy w postaci:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = S_1 + S_5 \cos\alpha = 0 \tag{II.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy} = -F - S_7 - S_5 \sin\alpha = 0 \tag{II.6}$$



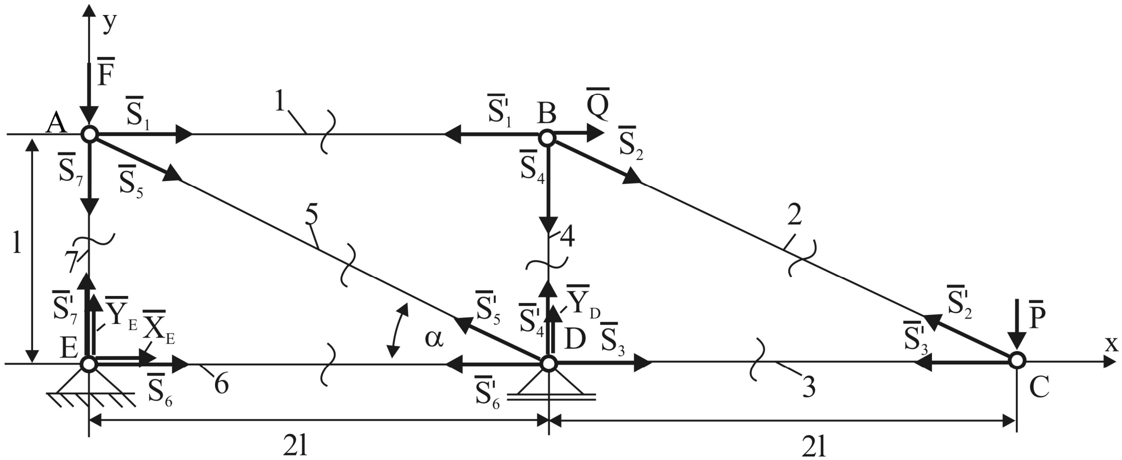
Rys. II.5. Kratownica płaska z wprowadzonymi siłami reakcji więzów

Równowaga węzła B

Na węzeł ten działa siła Q oraz siły reakcji prętów $\overline{S}_1', \overline{S}_2, \overline{S}_4$. Ponieważ węzeł obciąża płaski zbieżny układ sił, więc równania równowagi węzła B są następujące:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = Q - S_1' + S_2 \cos\alpha = 0 \tag{II.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy} = -S_4 - S_2 \sin\alpha = 0 \tag{II.8}$$



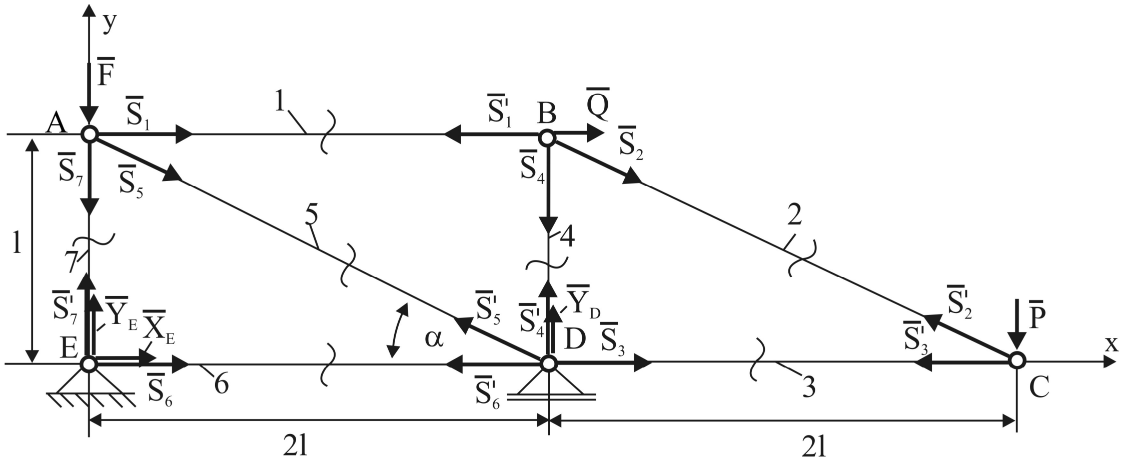
Rys. II.5. Kratownica płaska z wprowadzonymi siłami reakcji więzów

Równowaga węzła C

Na węzeł ten działa siła P oraz siły reakcji prętów $\overline{S_2'}$, $\overline{S_3'}$ stąd równania równowagi węzła C zapiszemy w postaci:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = -S_3' - S_2' \cos\alpha = 0 \tag{II.9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy} = -P + S_2' \sin\alpha = 0 \tag{II.10}$$



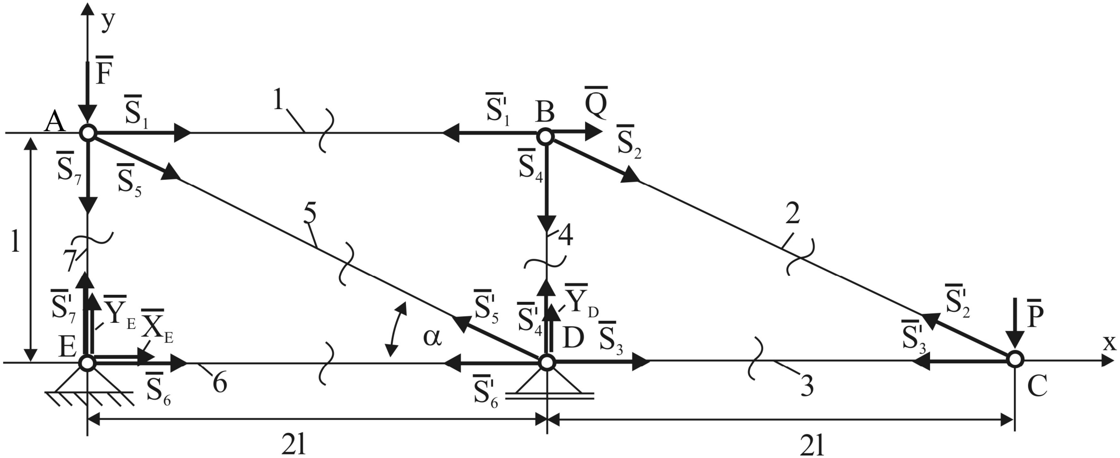
Rys. II.5. Kratownica płaska z wprowadzonymi siłami reakcji więzów

Równowaga węzła D

Na węzeł ten działają siły reakcji prętów $\overline{S}_3, \overline{S}_4', \overline{S}_5', \overline{S}_6'$ oraz reakcja podpory przesuwnej $\overline{Y}_D$ stąd równania równowagi węzła D zapiszemy w postaci:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = S_3 - S_6' - S_5' \cos\alpha = 0 \tag{II.11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy} = S_4' + Y_D + S_5' \sin\alpha = 0 \tag{II.12}$$



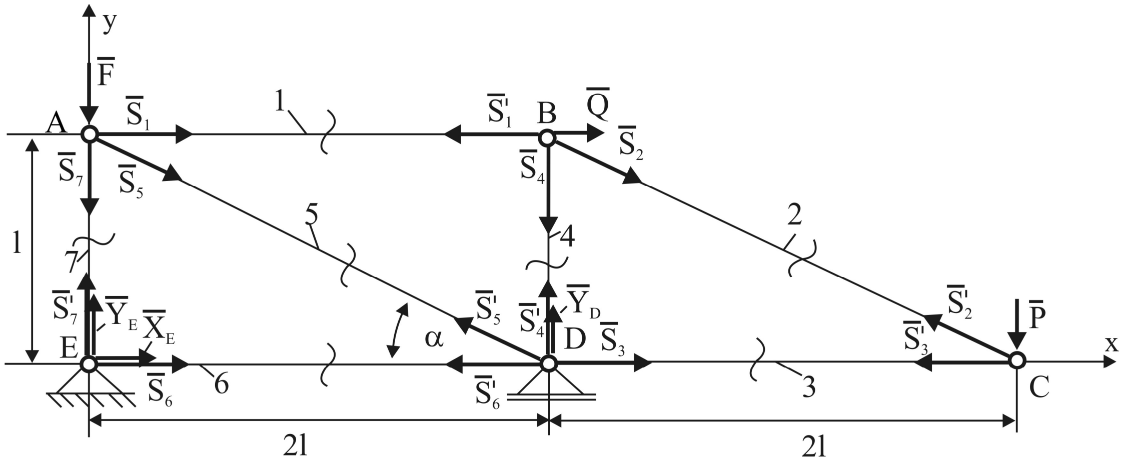
Rys. II.5. Kratownica płaska z wprowadzonymi siłami reakcji więzów

Równowaga węzła E

Na węzeł ten działają siły reakcji prętów $\overline{S}_6, \overline{S}'_7$ oraz reakcje podpory stałej $\overline{X}_E, \overline{Y}_E$ stąd równania równowagi węzła E zapiszemy w postaci:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = X_E + S_6 = 0 \tag{II.13}$$

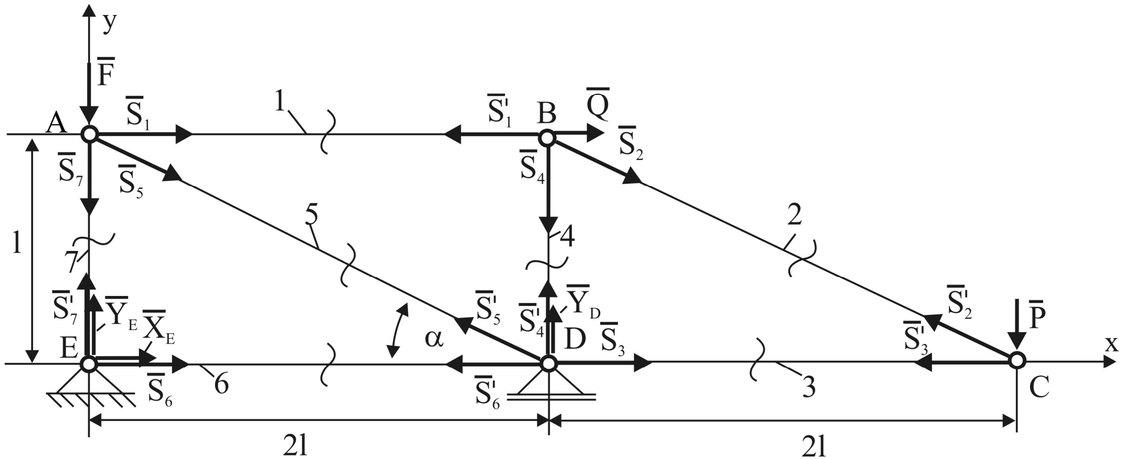
$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy} = Y_E + S_7^{'} = 0 \tag{II.14}$$



Rys. II.5. Kratownica płaska z wprowadzonymi siłami reakcji więzów

Z równowagi poszczególnych prętów wynika, że

$$\begin{cases} S_1 = S_1' \\ S_2 = S_2' \\ S_3 = S_3' \\ S_4 = S_4' \\ S_5 = S_5' \\ S_6 = S_6' \\ S_7 = S_7' \end{cases} \qquad \text{(II.15)}$$



Rys. II.5. Kratownica płaska z wprowadzonymi siłami reakcji więzów

Otrzymujemy układ 17 równań o 17 niewiadomych, układ jest statycznie rozwiązywalny. Z równań określamy wartości sił $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_1', S_2', S_3', S_4', S_5', S_6', S_7', X_E, Y_E, Y_D$. Jeżeli z rozwiązań równań równowagi statycznej wartość szukanej siły jest dodatnia tzn. że jej zwrot na rysunku jest poprawny, jeżeli wartość jest ujemna to wówczas zwrot tej siły jest przeciwny niż przyjęty na rysunku.