# Kinematyka ruchu płaskiego

Przykład 2

# Kinematyka ruchu płaskiego
## przykład 2

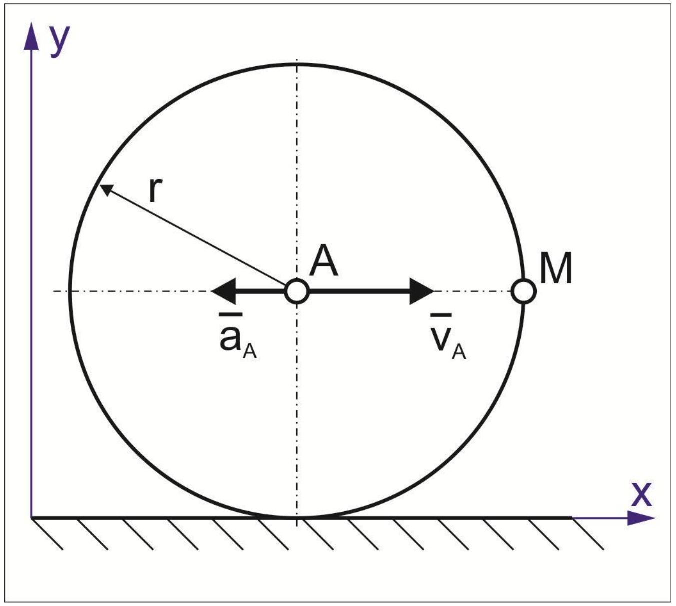
Krążek o promieniu r [m] toczący się bez poślizgu po nieruchomej poziomej równi w czasie ruchu pozostaje w płaszczyźnie xy. Prędkość i przyspieszenie punktu A są znane. Określić prędkość i przyspieszenie punktu M.

Dane:

$v_A$ [m/s],

$a_A$ [m/s],

r [m],

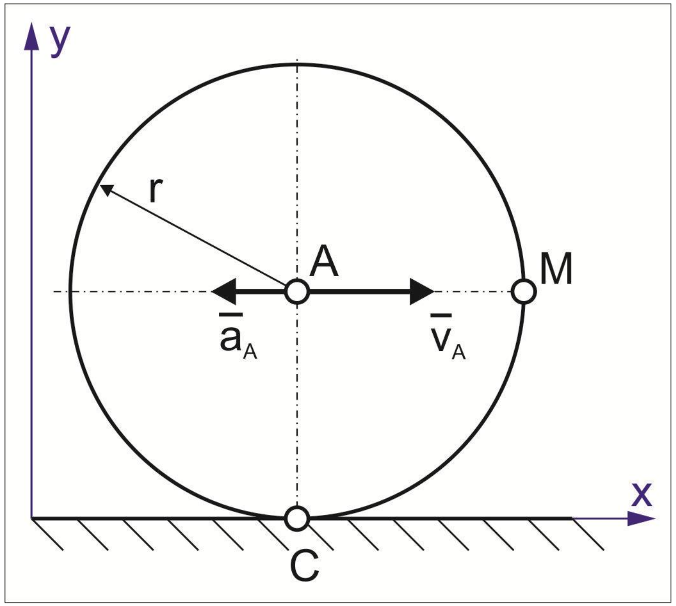


# Kinematyka ruchu płaskiego

## przykład 2

Krążek 1 styka się z równią 2 w punkcie C nazywanym punktem styczności. Jeśli punkt C przypiszemy nieruchomemu podłożu, to jego prędkość musi być równa zero. W przypadku współpracy bez poślizgu, prędkości punktów styczności muszą być takie same, zatem jeśli punkt C przypiszemy krążkowi, to jego prędkość także musi być równa zero:

$$\bar{v}_C^{(1)} = \bar{v}_C^{(2)} = \bar{v}_C = 0 \qquad (1)$$



# Kinematyka ruchu płaskiego
## przykład 2

Prędkość punktu A można zapisać równaniem:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_C + \bar{v}_{AC} \qquad (2)$$

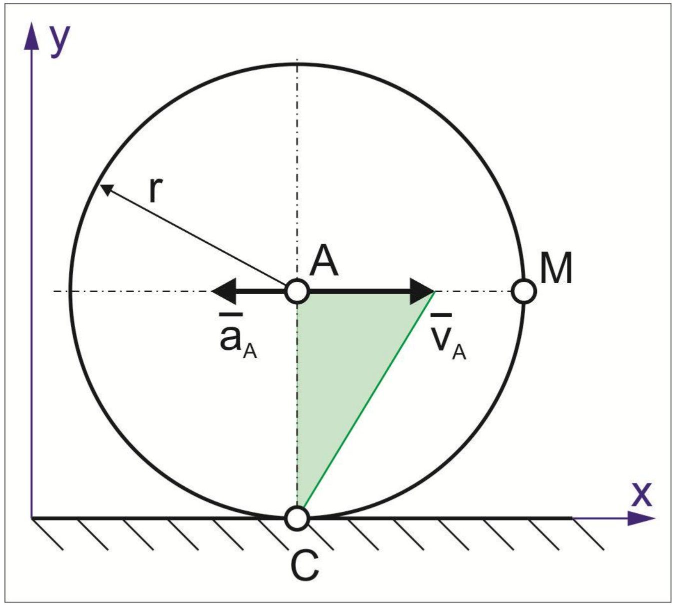
w którym

$$\bar{v}_{AC} = \bar{\omega} \times \overline{CA} \qquad (3)$$

gdzie $\bar{\omega}$ to prędkość kątowa krążka. Uwzględniając równania (1) i (3) w równania (2), zapisujemy

$$\bar{v}_A = \bar{\omega} \times \overline{CA} \qquad (4)$$

Na rysunku pokazano rozkład prędkości punktów leżących na promieniu krążka.



# Kinematyka ruchu płaskiego
## przykład 2

Wartość prędkości punktu A w funkcji prędkości kątowej krążka to

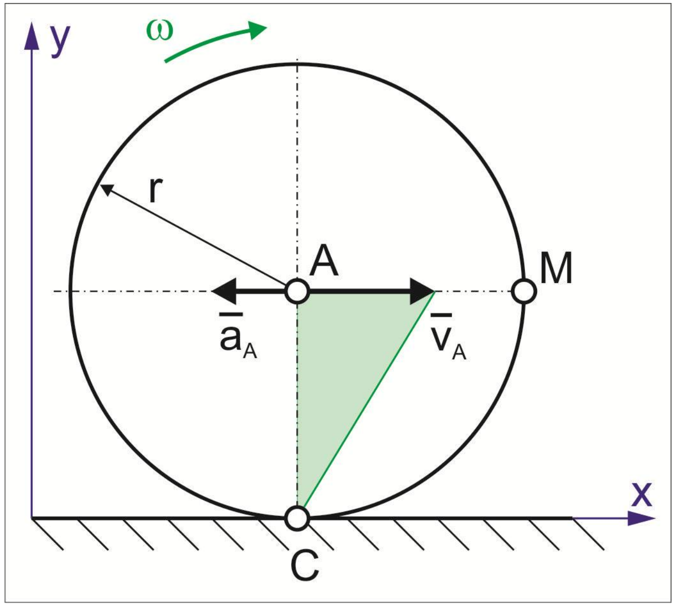
$$v_A = \omega r \qquad (5)$$

Z równania (5) określamy prędkość kątową krążka jako

$$\omega = \frac{v_A}{r} \qquad (6)$$

Z rozkładu prędkości wynika, że krążek podczas toczenia obraca się w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

Równanie (5) stanowi warunek toczenia krążka bez poślizgu.



# Kinematyka ruchu płaskiego
## przykład 2

Prędkość punktu M można zapisać równaniem:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA} \qquad (7)$$

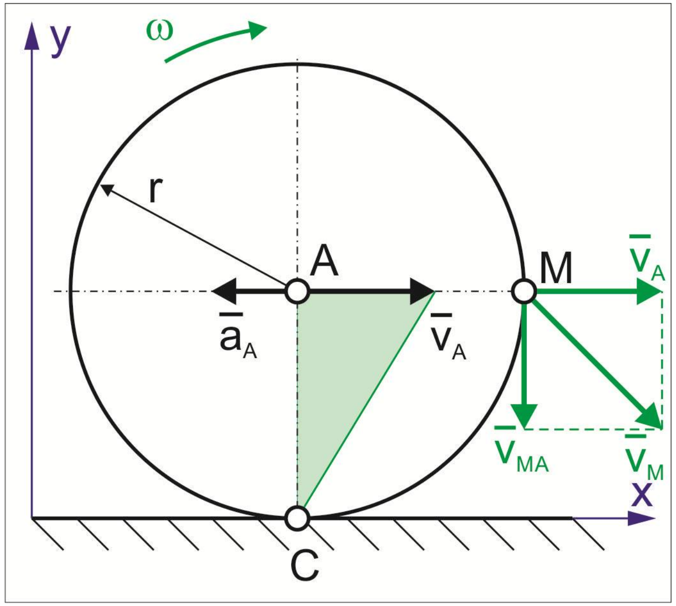
w którym

$$\bar{v}_{MA} = \bar{\omega} \times \overline{AM} \qquad (8)$$

a co do wartości

$$v_{MA} = \omega r \qquad (9)$$

Na rysunku pokazano rozkład wektorów z równania (7).

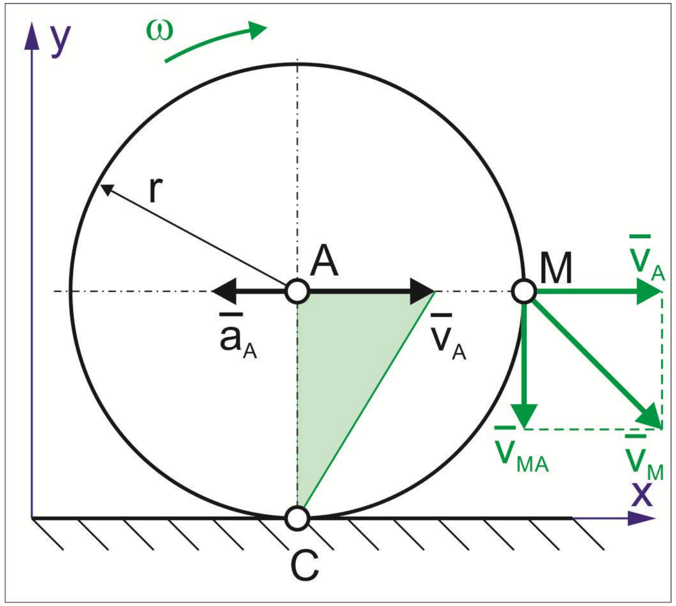


# Kinematyka ruchu płaskiego
## przykład 2

Wektor $\bar{v}_A$ przenosimy do punktu M i dodajemy wektor $\bar{v}_{MA}$ prostopadły do odcinka $\overline{\mathrm{AM}}$. Zwrot wektora $\bar{v}_{MA}$ wynika z kierunku obrotu krążka.

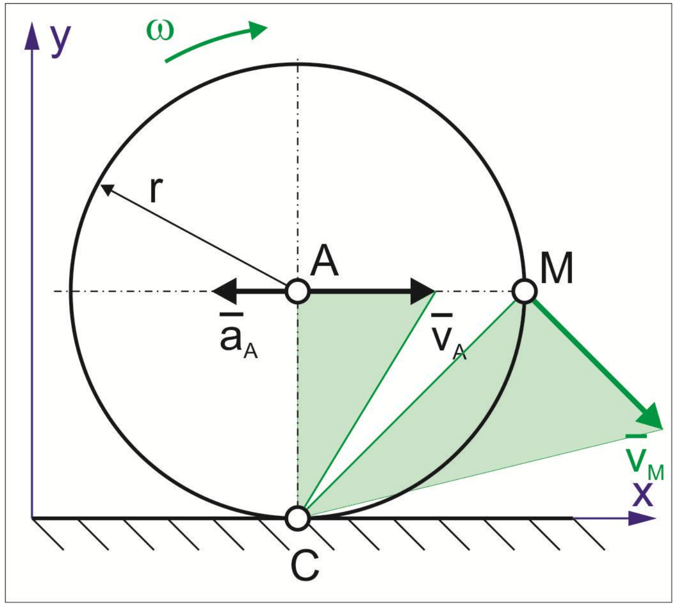
Wektory $\bar{v}_A$ i $\bar{v}_{MA}$ są w tym przypadku prostopadłe, więc wartość prędkości punktu M obliczamy z równania

$$v_M = \sqrt{v_A^2 + v_{MA}^2} = \omega r\sqrt{2} \quad (10)$$



# Kinematyka ruchu płaskiego
## przykład 2

Wektor prędkości punktu M można również wyznaczyć korzystając z metody chwilowego środka prędkości. W tym celu punkt M łączymy z punktem C i wykreślamy wektor $\bar{v}_M$ na kierunku prostopadłym do $\overline{\mathrm{CM}}$. Zwrot wektora $\bar{v}_M$ wynika z kierunku obrotu krążka.




Wartość prędkości punktu M obliczamy z równania

$$v_M = \omega CM = \omega r\sqrt{2} \qquad (11)$$

# Kinematyka ruchu płaskiego

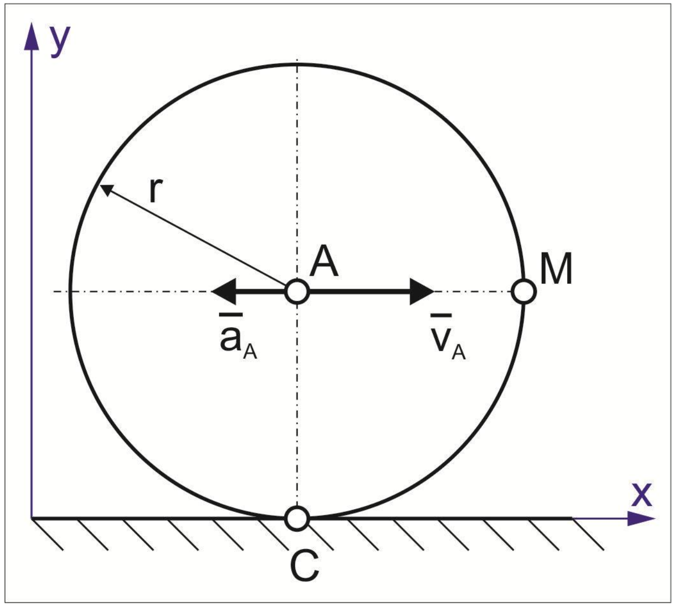
## przykład 2

W związku z tym, że punkty A i M należą do jednej bryły będącej w ruchu płaskim, wektor przyspieszenia punktu M określa wzór

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA} \qquad (12)$$

Przyspieszenie względne $\bar{a}_{MA}$ ma składowa normalną i styczną

$$\bar{a}_{MA} = \bar{a}_{MAn} + \bar{a}_{MA\tau} \qquad (13)$$



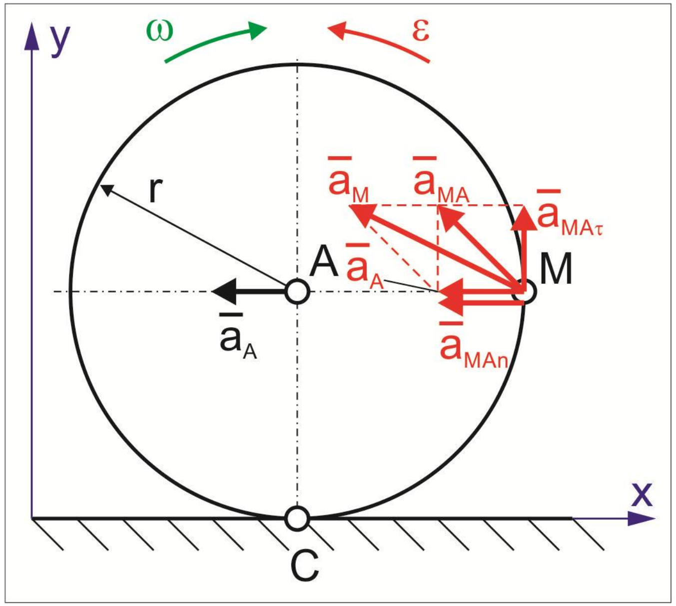
# Kinematyka ruchu płaskiego
## przykład 2

Zatem równanie (12) zapiszemy jako

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MAn} + \bar{a}_{MA\tau} \qquad (14)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \parallel x & \parallel \overline{AM} & \perp \overline{AM} \end{array}$$

W związku z tym wektor $\bar{a}_A$ przenosimy do punktu M i dodajemy wektor $\bar{a}_{MAn}$ równoległy do odcinka $\overline{\mathrm{AM}}$ o zwrocie od punktu M do punktu A. Ponadto dodajemy wektor $\bar{a}_{MA\tau}$ prostopadły do odcinka $\overline{\mathrm{AM}}$. Zwrot wektora $\bar{a}_{MA\tau}$ wynika ze zwrotu przyspieszenia kątowego krążka $\varepsilon$, a ten z kolei zależy od zwrotu przyspieszenia $\bar{a}_A$.



# Kinematyka ruchu płaskiego

## przykład 2

Jeśli prędkość kątowa krążka jest dana równaniem (6), to przyspieszenie kątowe określimy jako

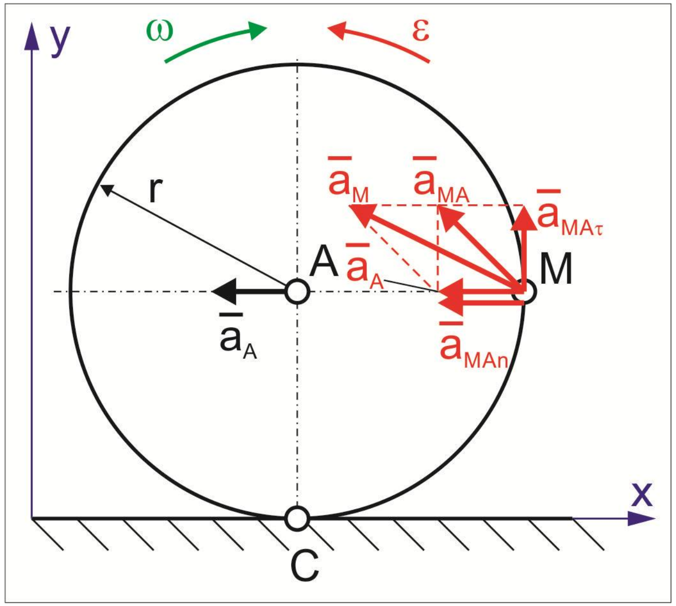
$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{\dot{v}_A}{r} = \frac{a_{A\tau}}{r} = \frac{a_A}{r} \qquad (15)$$

Przyspieszenie $a_{MA\tau}$ ma wartość

$$a_{MA\tau} = \varepsilon AM = \varepsilon r = a_A \qquad (16)$$

Przyspieszenie $a_{MAn}$ ma wartość

$$a_{MAn} = \omega^2 AM = \omega^2 r = \frac{v_A^2}{r} \qquad (17)$$



# Kinematyka ruchu płaskiego

## przykład 2

W celu wyznaczenia wartości przyspieszenia punktu M najpierw rzutujemy równanie (14) na osie układu odniesienia. Rzut równania (14) na oś x:

$$a_{Mx} = -a_A - a_{MAn} \qquad (18)$$

Rzut równania (14) na oś x:

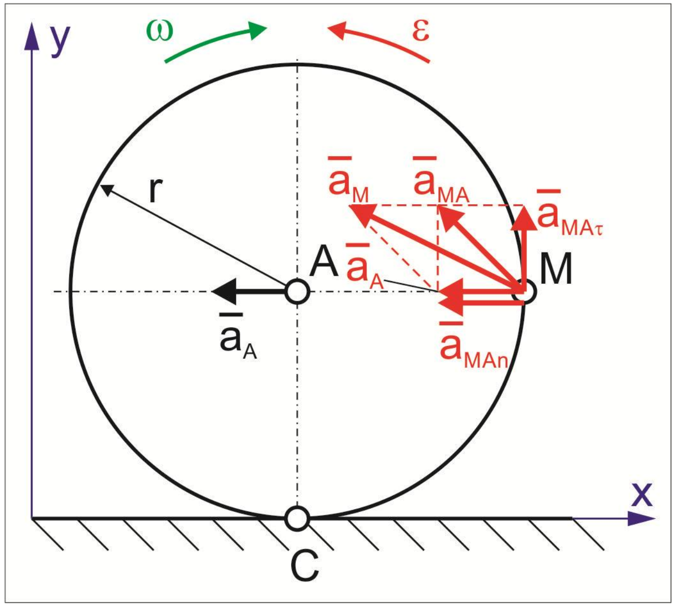
$$a_{My} = a_{MA\tau} \qquad (19)$$

Uwzględniając równania (16) i (17) zapiszemy

$$a_{Mx} = -a_A - \frac{v_A^2}{r} \qquad (20)$$

$$a_{My} = a_A \qquad (21)$$

Składowa $a_{Mx}$ ma zwrot przeciwny do zwrotu osi x. Składowa $a_{My}$ ma zwrot zgodny ze zwrotem osi y.



# Kinematyka ruchu płaskiego

## przykład 2

Wartość przyspieszenia punktu M to

$$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = \sqrt{2a_A^2 + 2a_A \frac{v_A^2}{r} + \frac{v_A^4}{r^2}} \qquad (22)$$