Kinematyka ruchu płaskiego

Przykład 1

Kinematyka ruchu płaskiego

przykład 1

Określić prędkość i przyspieszenie bryły 2 i 3 (punktu B).

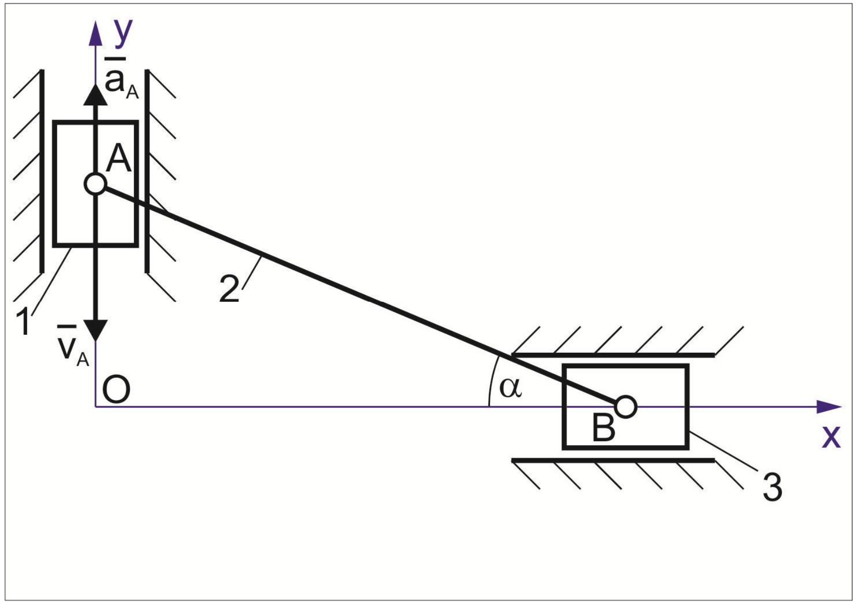
Dane:

v_A [m/s],

a_A [m/s],

$|AB| = l$,

α [rad],



1 - bryła jest w ruchu postępowym,

2 - bryła jest w ruchu płaskim,

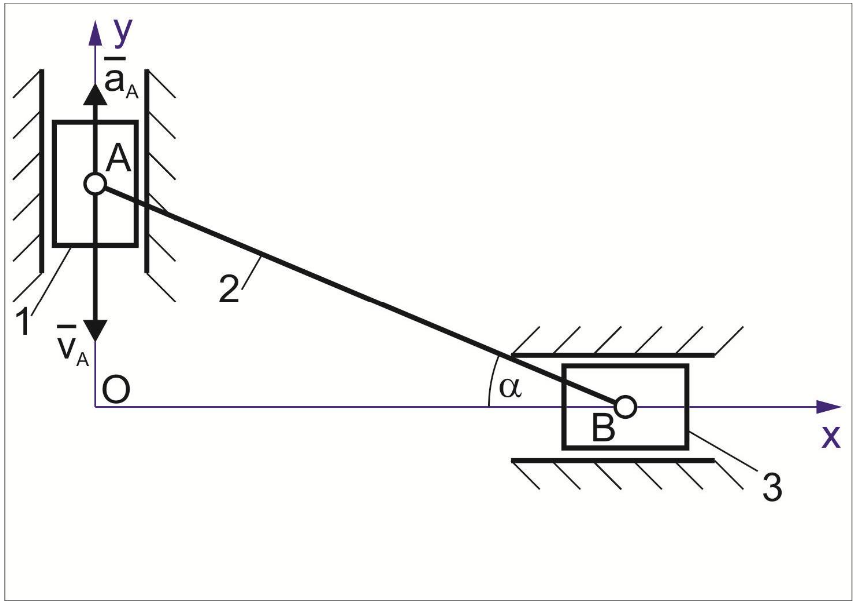
3 - bryła jest w ruchu postępowym,

Kinematyka ruchu płaskiego

przykład 1

Prędkość punktu B – (pierwszy sposób)

Najpierw zauważamy, że punkt A należy zarówno do bryły 1 jak i bryły 2 ($\bar{v}_A^{(1)} = \bar{v}_A^{(2)}$). Z kolei punkt B należy zarówno do bryły 2 jak i bryły 3 $\bar{v}_B^{(2)} = \bar{v}_B^{(3)}$). Kierunek wektora prędkości punktu A wynika z więzów narzuconych na bryłę 1, a kierunek wektora prędkości punktu B wynika z więzów narzuconych na bryłę 3.



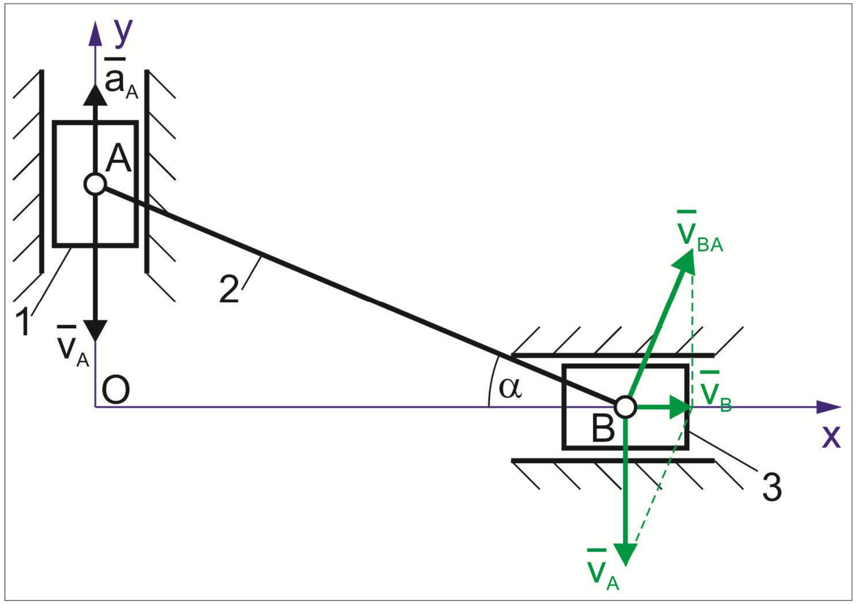
W związku z tym, że punkty A i B należą do jednej bryły będącej w ruchu płaskim, wektor prędkości punktu B określa wzór

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} \qquad (1)$$

Kinematyka ruchu płaskiego
przykład 1

Prędkość punktu B – (pierwszy sposób)

W związku z tym wektor $\bar{v}_A$ przenosimy do punktu B i dodajemy wektor $\bar{v}_{BA}$ prostopadły do odcinka $\overline{\mathrm{AB}}$. Zwrot wektora $\bar{v}_{BA}$ musi być taki, aby wektor prędkości $\bar{v}_B$ miał kierunek możliwy ze względu na więzy narzucone na bryłę 3.



Kierunki, zwroty i punkty zaczepienia wektorów zostały pokazane na rysunku. W celu wyznaczenia wartości poszczególnych prędkości zrzutujemy równanie wektorowe (1) na osie układu odniesienia.

Kinematyka ruchu płaskiego
przykład 1

Prędkość punktu B – (pierwszy sposób)

Rzut równania (1) na oś x:

$v_{Bx} = v_{BA} sin\alpha$ (2)

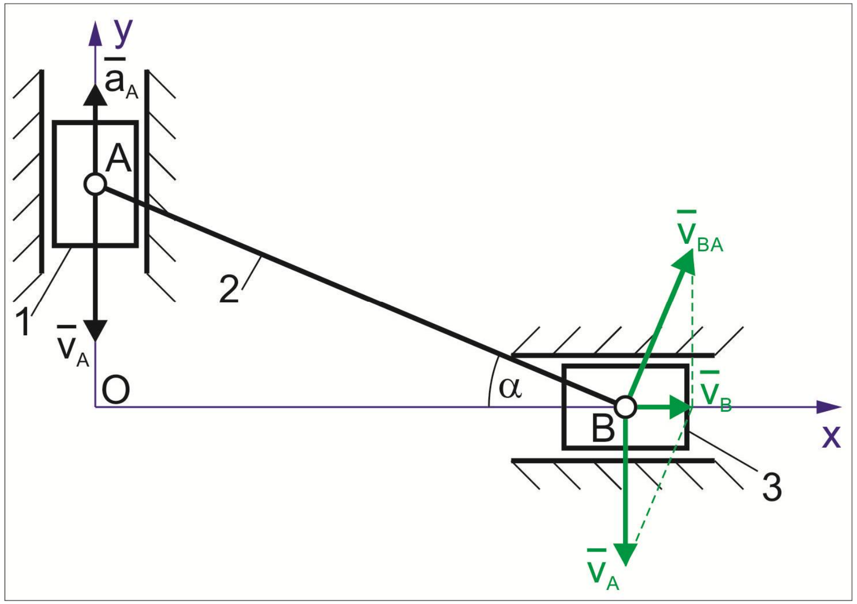
Rzut równania (1) na oś y:

$v_{By} = -v_A + v_{BA} cos\alpha$ (3)

Z faktu, że punkt B porusza się jedynie wzdłuż osi x wynika, że $v_{By} = 0$ oraz $v_B = v_{Bx}$, czyli zapiszemy

$v_B = v_{BA} sin\alpha$ (4)

$0 = -v_A + v_{BA} cos\alpha$ (5)



Kinematyka ruchu płaskiego
przykład 1

Prędkość punktu B – (pierwszy sposób)

Z równania (5) wynika, że

$$v_{BA} = \frac{v_A}{cos\alpha} \qquad (6)$$

co po podstawieniu do równania (4) daje

$$v_B = v_A tg\alpha \qquad (7)$$

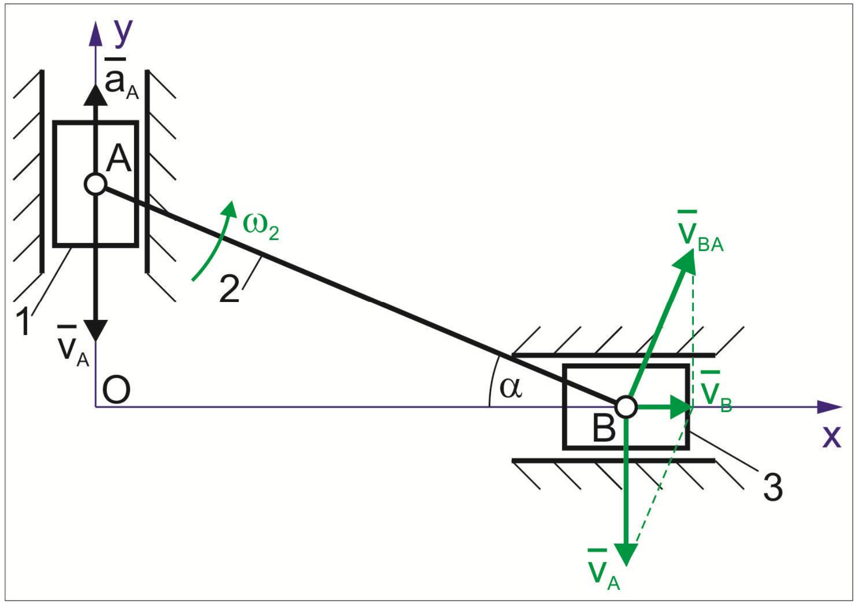
Wiadomo, że

$$\bar{v}_{BA} = \bar{\omega}_2 \times \overline{AB} \qquad (8)$$

$$v_{BA} = \omega_2 l \qquad (9)$$

Z równań (9) i (6) wyznaczamy prędkość kątową bryły 2:

$$\omega_2 = \frac{v_{BA}}{l} = \frac{v_A}{lcos\alpha} \qquad (10)$$

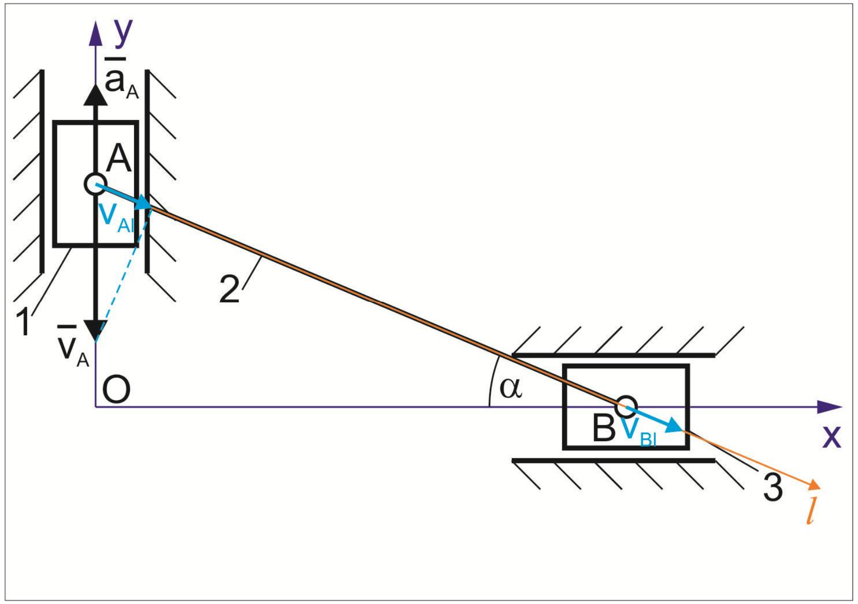


Kinematyka ruchu płaskiego
przykład 1

Prędkość punktu B – (drugi sposób)

Wiemy już , że prędkość punktu B określa równanie (1)

$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$



Wiemy również, że punkty A i B należą do jednej bryły będącej w ruchu płaskim, zatem możemy skorzystać z twierdzenia o rzutach prędkości. Wprowadzamy oś l i rzutujemy na nią równanie (1) otrzymując

$$v_{Bl} = v_{Al} \qquad (11)$$

Kinematyka ruchu płaskiego

przykład 1

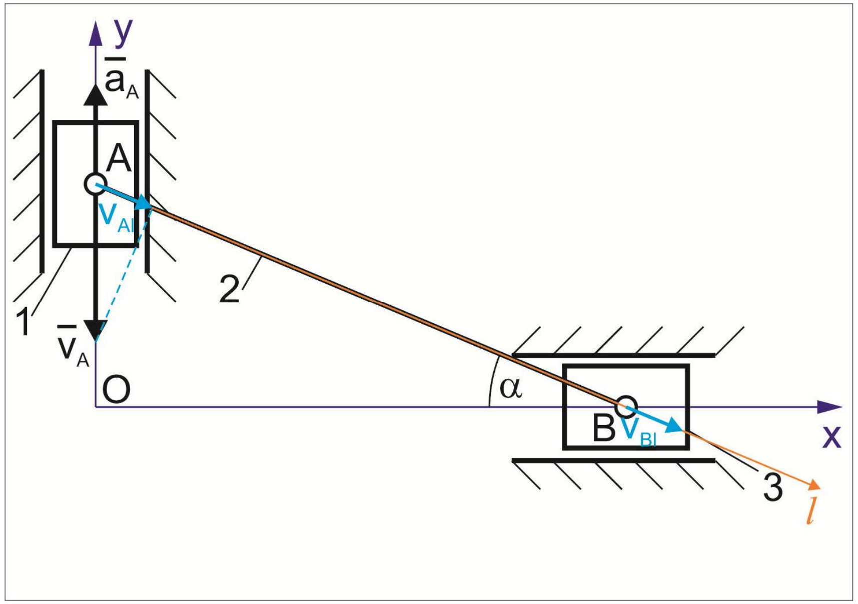
Prędkość punktu B – (drugi sposób)

Rzut prędkości punkt A na oś l wynosi

$$v_{Al} = v_A sin\alpha \qquad (12)$$

Kierunek wektora prędkości punktu B wynika z więzów narzuconych na bryłę 3 i pokrywa się on z osią x. Nie znamy wartości prędkości punktu B, ale kierunek wektora $\bar{v}_B$ jest znany. Zatem wartość rzutu zapiszemy

$$v_{Bl} = v_B cos\alpha \qquad (13)$$



Kinematyka ruchu płaskiego
przykład 1

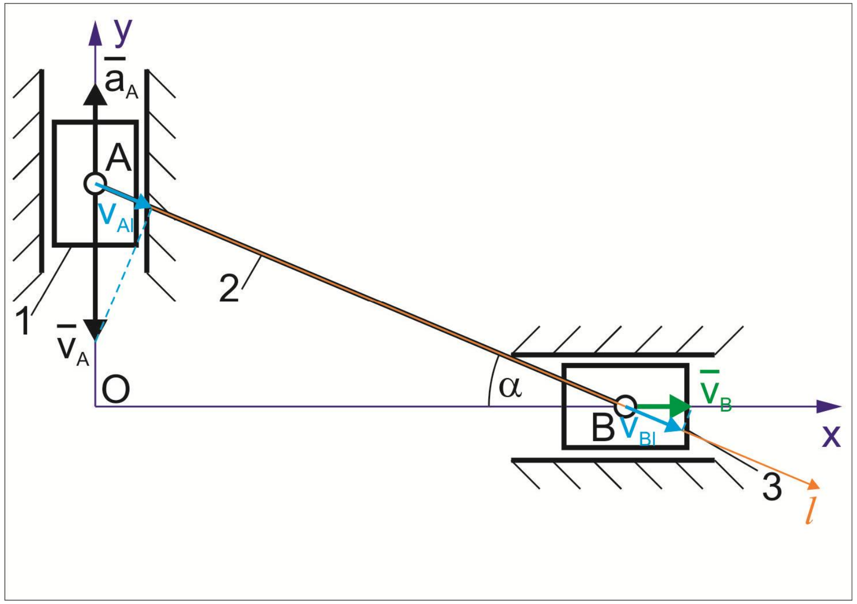
Prędkość punktu B – (drugi sposób)

Wykorzystując równania (11) – (13) zapisujemy

$$v_B cos\alpha = v_A sin\alpha \qquad (14)$$

i następnie wyznaczamy wartość prędkości punktu B

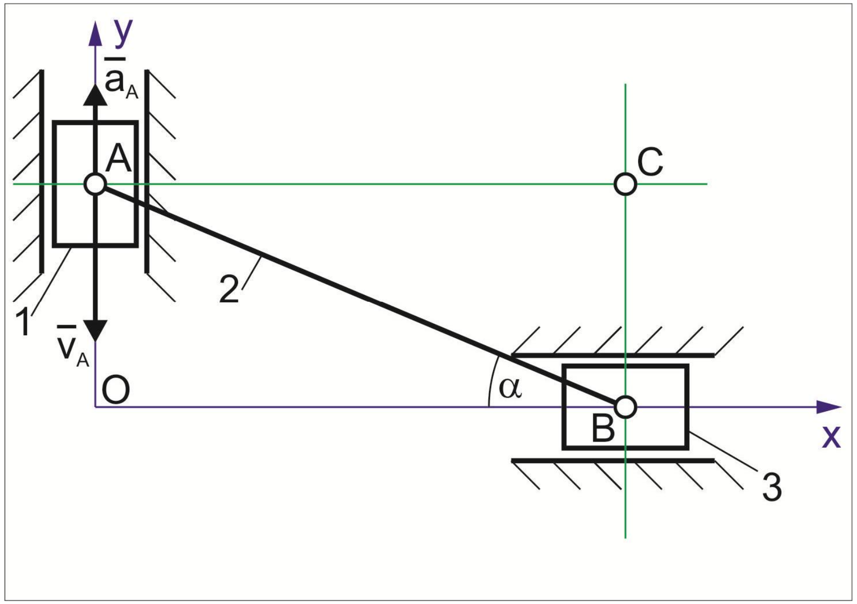
$$v_B = v_A tg\alpha \qquad (15)$$



Kinematyka ruchu płaskiego
przykład 1

Prędkość punktu B – (trzeci sposób)

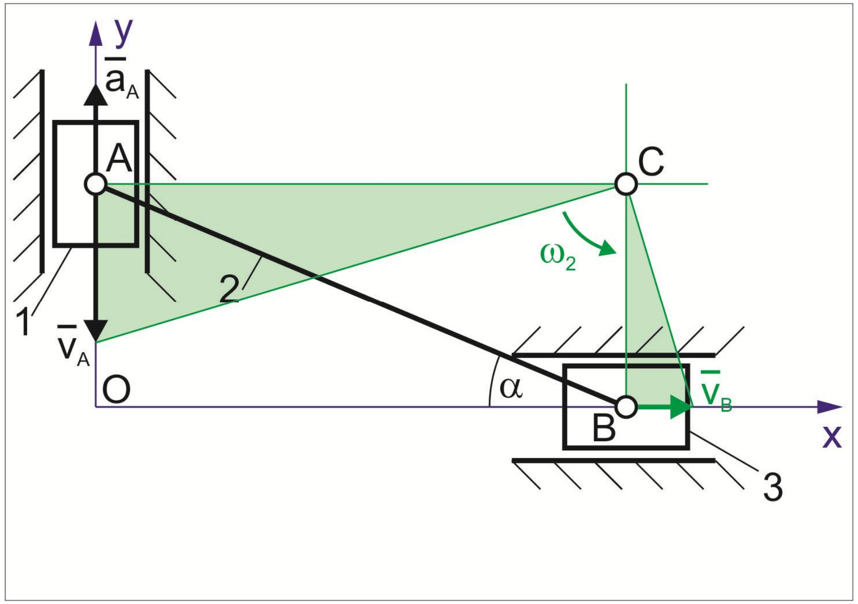
Wiemy już, że punkty A i B należą do jednej bryły będącej w ruchu płaskim, zatem możemy skorzystać z metody chwilowego środka prędkości. Znamy kierunki wektorów prędkości punktów A i B. Wektor prędkości punktu A jest równoległy do osi y, a wektor prędkości punktu B jest równoległy do osi x. Prostopadle do kierunków tych wektorów przez punkty A i B prowadzimy proste. W punkcie przecięcia prostych (punkt C) znajduje się chwilowy środek prędkości (nazywany również chwilowym środkiem obrotu).



Kinematyka ruchu płaskiego
przykład 1

Prędkość punktu B – (trzeci sposób)

Na rysunku pokazano rozkłady prędkości punktów leżących na odcinkach $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$. Z rozkładu prędkości wynika, że bryła 2 obraca się wokół punktu C w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara (patrz prędkość kątowa ω_2).



Jeżeli punkt A przypiszemy bryle 2, to wartość prędkości tego punktu zapiszemy

$$v_A = v_A^{(2)} = \omega_2 CA = \omega_2 l cos\alpha \quad (16)$$

Prędkość kątowa bryły 2 wynosi

$$\omega_2 = \frac{v_A}{l cos\alpha} \quad (17)$$

Kinematyka ruchu płaskiego

przykład 1

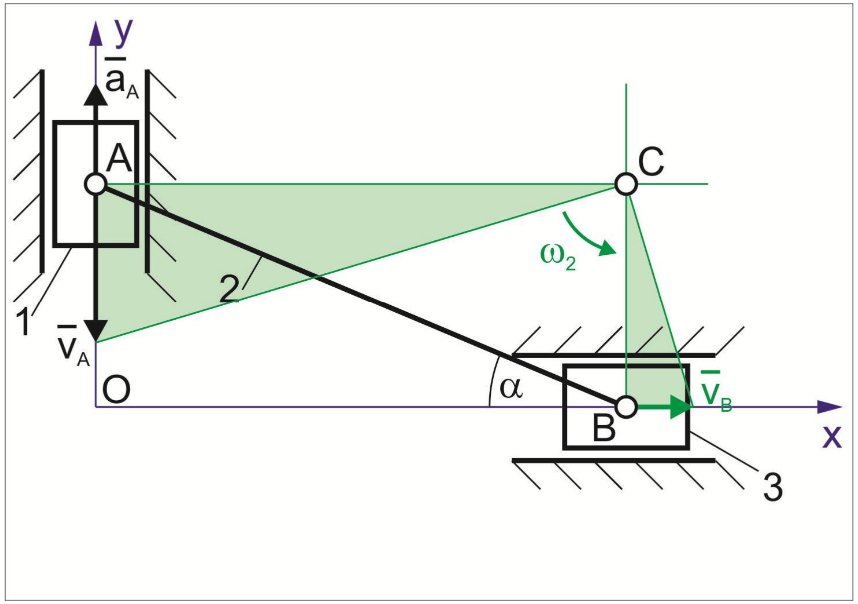
Prędkość punktu B – (trzeci sposób)

Jeżeli punkt B przypiszemy bryle 2, to wartość prędkości tego punktu zapiszemy

$$v_B = v_B^{(2)} = \omega_2 CB = \omega_2 l sin\alpha \quad (18)$$

Uwzględniając równanie (16) zapisujemy

$$v_B = \frac{v_A}{l cos\alpha} l sin\alpha = v_A tg\alpha \quad (19)$$



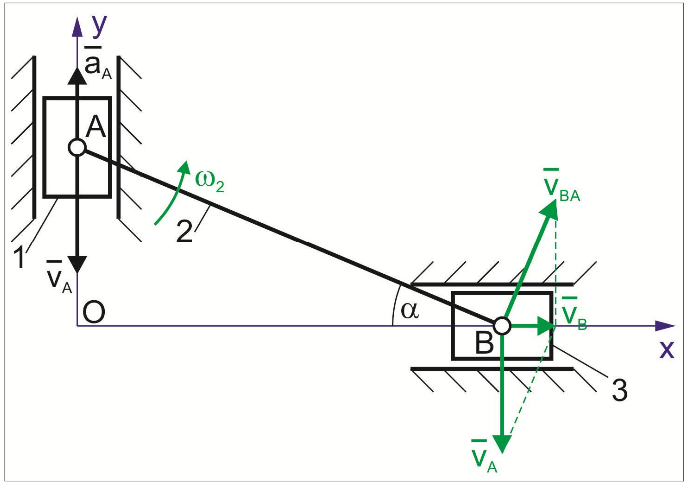
Kinematyka ruchu płaskiego
przykład 1

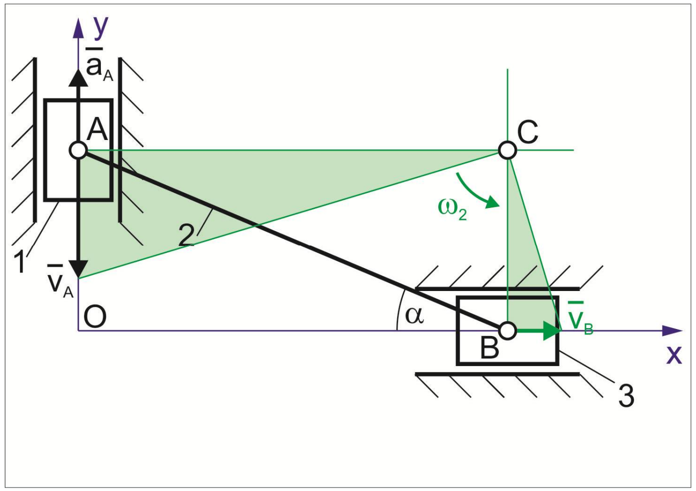
Komentarz

W przykładzie rozwiązanym pierwszym sposobem prędkość kątowa zaznaczona jest w taki sposób, że widzimy iż bryła 2 obraca się względem punktu A.

W przykładzie rozwiązanym trzecim sposobem prędkość kątowa zaznaczona jest w taki sposób, że widzimy iż bryła 2 obraca się względem punktu C.

W rzeczywistości jest to ta sama prędkość kątowa (patrz twierdzenie o równości prędkości kątowych - skrypt) bez względu na to czy rozważamy obrót bryły 2 względem chwilowego środka prędkości czy obrót bryły 2 w ruchu względnym wokół punktu A.





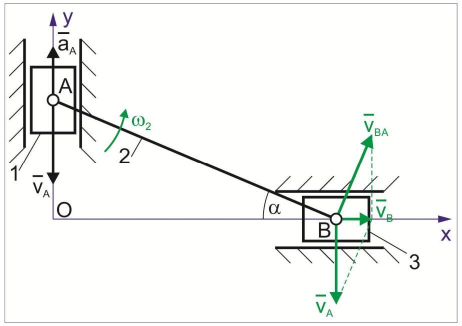
Kinematyka ruchu płaskiego
przykład 1

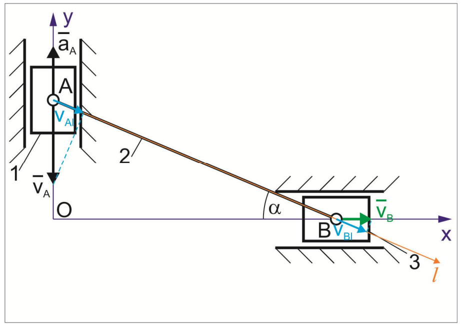
Komentarz

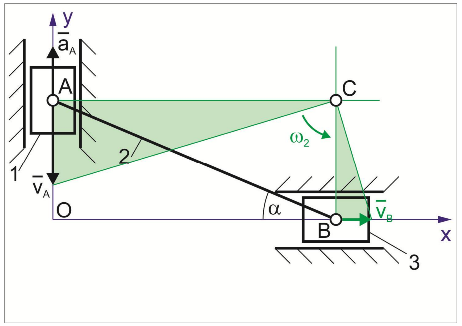
Wszystkimi trzema metodami uzyskano tę samą wartość prędkości punktu B

$$v_B = v_A tg\alpha$$

Natomiast jeśli chodzi o wartość prędkości kątowej, to drugim sposobem nie da się jej wyznaczyć, ponieważ przy rzutowaniu wektorów na oś l traci się informację o prędkości względnej v_{BA}, która jest powiązana z prędkością kątową ω_2.





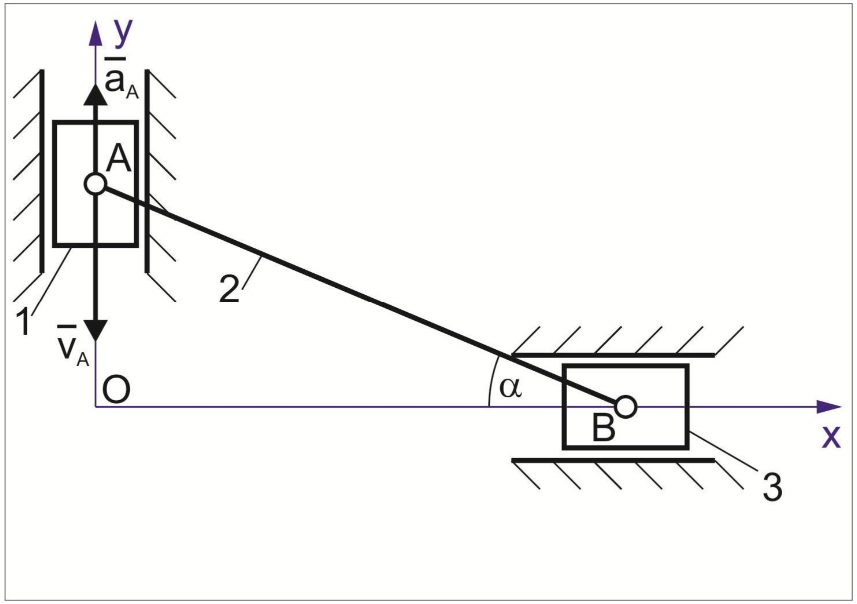


Kinematyka ruchu płaskiego

przykład 1

Przyspieszenie punktu B

Najpierw zauważamy, że punkt A należy zarówno do bryły 1 jak i bryły 2 więc $\bar{a}_A^{(1)} = \bar{a}_A^{(2)}$. Z kolei punkt B należy zarówno do bryły 2 jak i bryły 3 więc $\bar{a}_B^{(2)} = \bar{a}_B^{(3)}$. Kierunek wektora przyspieszenia punktu A wynika z więzów narzuconych na bryłę 1, a kierunek wektora przyspieszenia punktu B wynika z więzów narzuconych na bryłę 3.



Kinematyka ruchu płaskiego
przykład 1

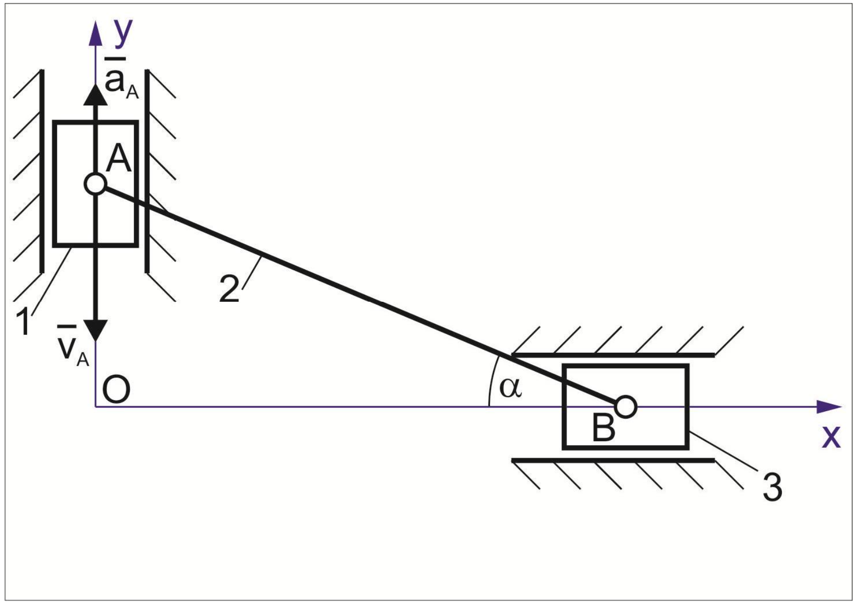
Przyspieszenie punktu B

W związku z tym, że punkty A i B należą do jednej bryły będącej w ruchu płaskim, wektor przyspieszenia punktu B określa wzór

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} \qquad (20)$$

Przyspieszenie względne $\bar{a}_{BA}$ ma składowa normalną i styczną

$$\bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BAn} + \bar{a}_{BA\tau} \qquad (21)$$



Kinematyka ruchu płaskiego
przykład 1

Przyspieszenie punktu B

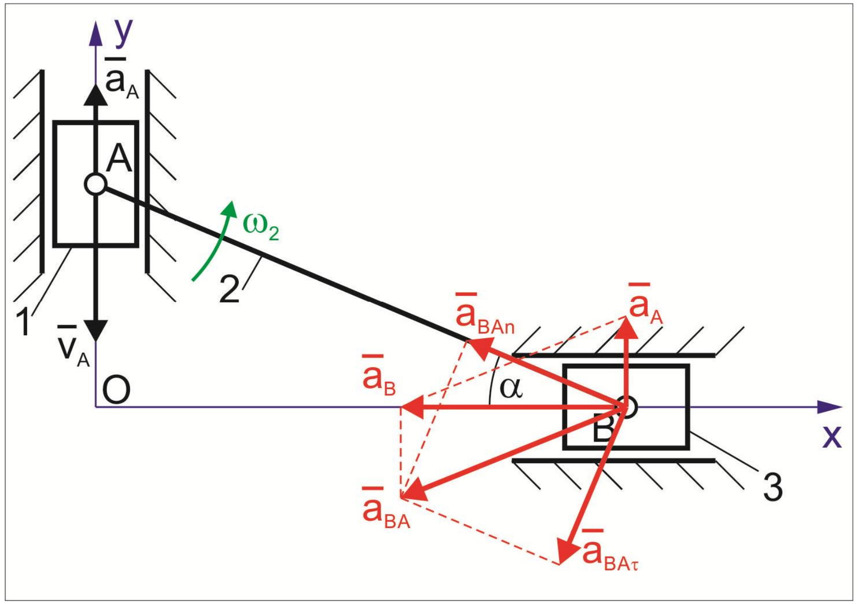
Zatem równanie (20) zapiszemy jako

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BAn} + \bar{a}_{BA\tau} \qquad (22)$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$\parallel x \quad \parallel y \quad \parallel \overline{AB} \quad \perp \overline{AB}$

W związku z tym wektor $\bar{a}_A$ przenosimy do punktu B i dodajemy wektor $\bar{a}_{BAn}$ równoległy do odcinka $\overline{\mathrm{AB}}$ o zwrocie od punktu B do punktu A. Ponadto dodajemy wektor $\bar{a}_{BA\tau}$ prostopadły do odcinka $\overline{\mathrm{AB}}$. Zwrot wektora $\bar{a}_{BA\tau}$ musi być taki, aby wektor przyspieszenia $\bar{a}_B$ miał kierunek możliwy ze względu na więzy narzucone na bryłę 3. Kierunki, zwroty i punkty zaczepienia wektorów zostały pokazane na rysunku.



Kinematyka ruchu płaskiego
przykład 1

Przyspieszenie punktu B

W celu wyznaczenia wartości poszczególnych przyspieszeń zrzutujemy równanie wektorowe (22) na osie układu odniesienia. Rzut równania (22) na oś x:

$$a_{Bx} = -a_{BAn}cos\alpha - a_{BA\tau}sin\alpha \qquad (23)$$

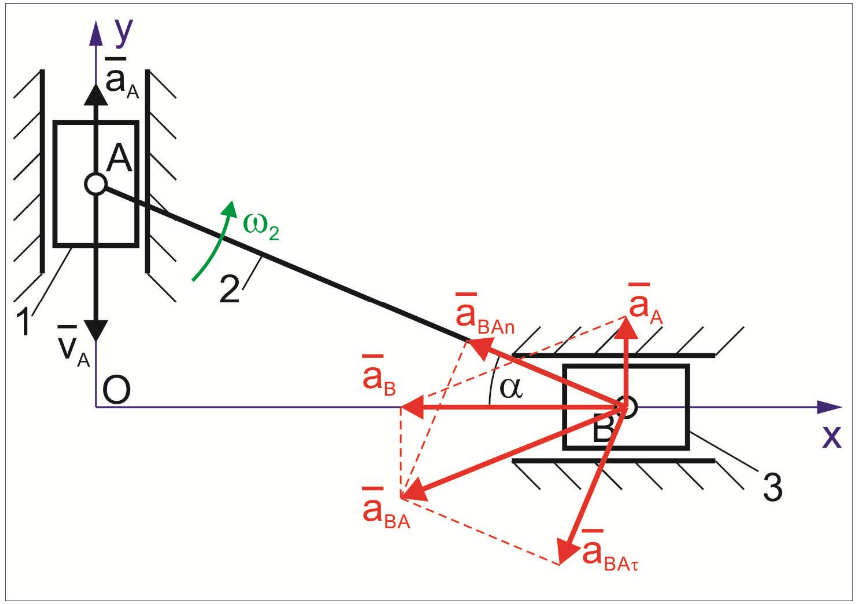
Rzut równania (22) na oś y:

$$a_{By} = a_A + a_{BAn}sin\alpha - a_{BA\tau}cos\alpha \qquad (24)$$

Z faktu, że punkt B porusza się jedynie wzdłuż osi x wynika, że $a_{By} = 0$ oraz $a_B = a_{Bx}$, czyli zapiszemy

$$a_B = -a_{BAn}cos\alpha - a_{BA\tau}sin\alpha \qquad (25)$$

$$0 = a_A + a_{BAn}sin\alpha - a_{BA\tau}cos\alpha \qquad (26)$$

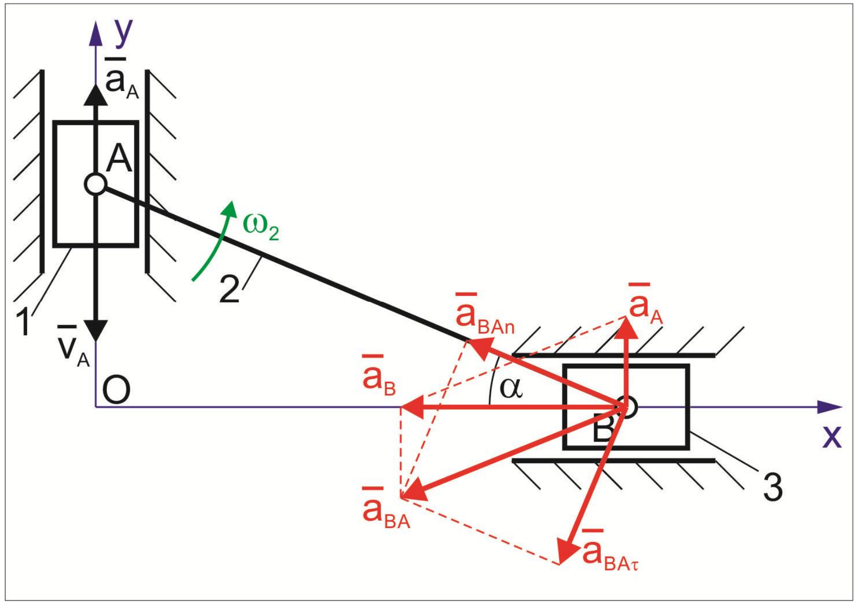


Kinematyka ruchu płaskiego
przykład 1

Przyspieszenie punktu B

Bryła 2 jest w ruchu względnym obrotowym wokół punktu A, zatem wartość przyspieszenia a_{BAn} zapisujemy jak dla ruchu obrotowego

$$a_{BAn} = \omega_2^2 AB = \omega_2^2 l = \left(\frac{v_A}{l cos\alpha}\right)^2 l = \frac{v_A^2}{l cos^2\alpha} \tag{27}$$



Równania (25) i (26) zapiszemy teraz jako

$$a_B = -\frac{v_A^2}{l cos\alpha} - a_{BA\tau} sin\alpha \tag{28}$$

$$0 = a_A + \frac{v_A^2}{l cos\alpha} tg\alpha - a_{BA\tau} cos\alpha \tag{29}$$

Widzimy, że w układzie równań (28) i (29) występują dwie niewiadome a_B i $a_{BA\tau}$.

Kinematyka ruchu płaskiego
przykład 1

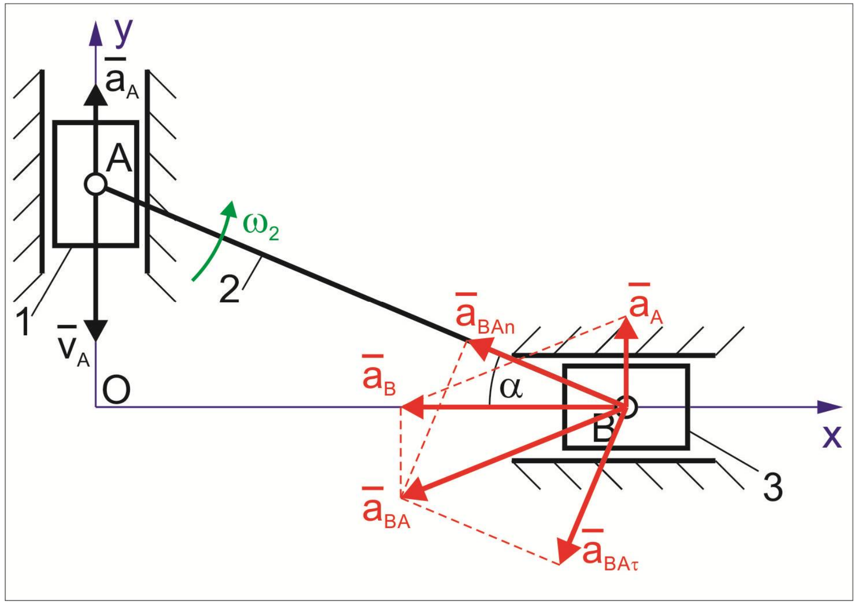
Przyspieszenie punktu B

Wartość przyspieszenia $a_{BA\tau}$ wyznaczamy z równania (29)

$$a_{BA\tau} = \frac{a_A}{cos\alpha} + \frac{v_A^2}{lcos^2\alpha} tg\alpha \qquad (30)$$

a następnie wartość przyspieszenia a_B wyznaczamy z równania (28)

$$a_B = -\frac{v_A^2}{lcos\alpha}(1 + tg^2\alpha) - a_A tg\alpha \qquad (31)$$



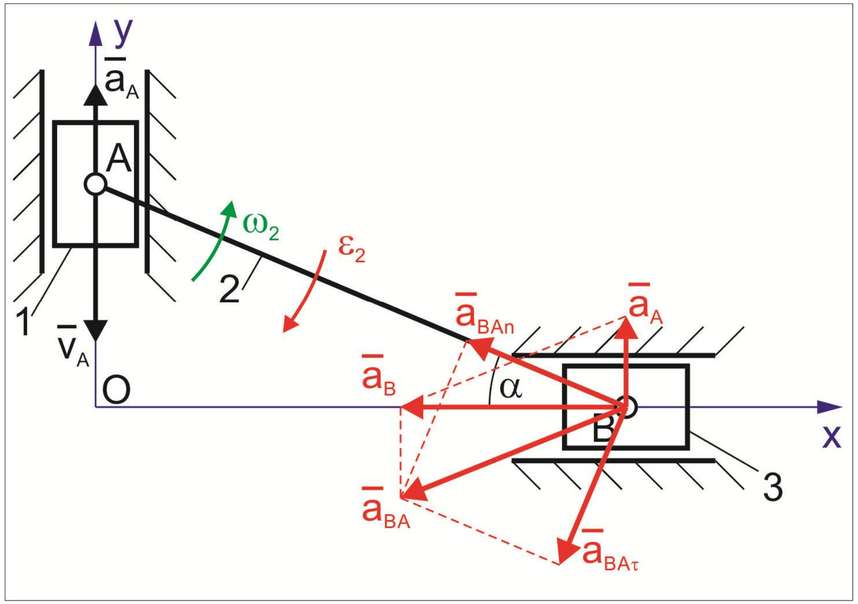
Kinematyka ruchu płaskiego

przykład 1

Przyspieszenie kątowe bryły 2

Wartość przyspieszenia $a_{BA\tau}$ możemy zapisać jak w dla ruchu obrotowego

$$a_{BA\tau} = \varepsilon_2 AB \quad (32)$$



Z równania (32) z uwzględnieniem równania (30) otrzymujemy wartość przyspieszenia kątowego bryły 2

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{BA\tau}}{AB} = \frac{a_{BA\tau}}{l} = \frac{a_A}{l cos\alpha} + \frac{v_A^2}{l^2 cos^2\alpha} tg\alpha \quad (33)$$