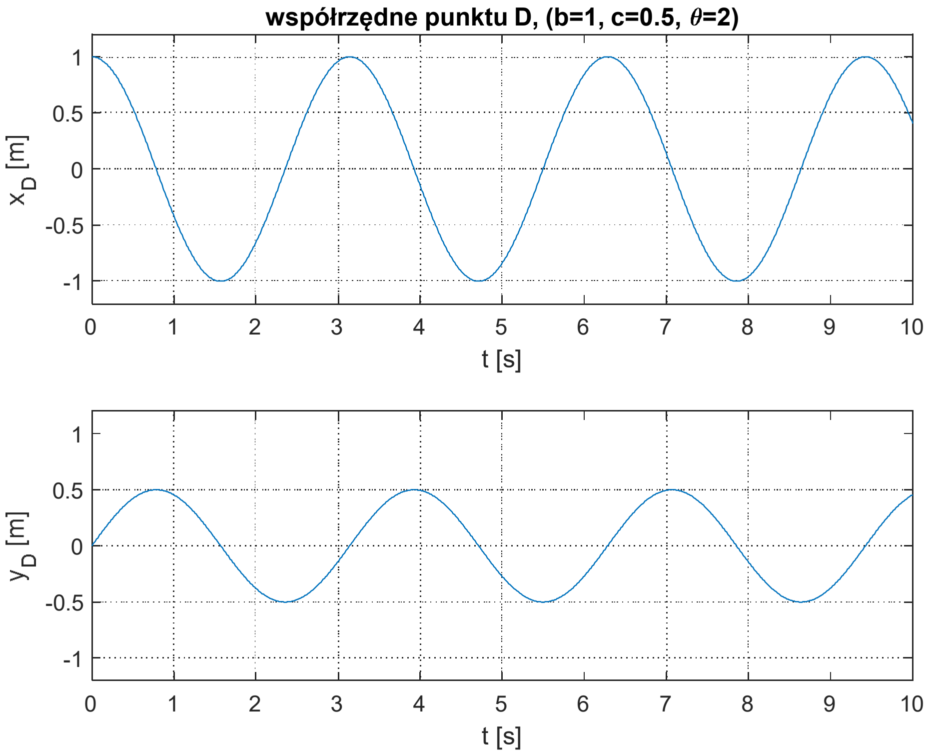
Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza
Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa
Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki
Opracował: dr inż. Piotr Gierlak

Dane są parametryczne równania ruchu punktu D

$x_D = b\cos(\theta t)$

$y_D = c\sin(\theta t)$

b [m], c [m], θ [rad/s] to wartości stałe



Określić równanie toru ruchu, wektor prędkości, równanie drogi, wektor przyspieszenia, przyspieszenie styczne i normalne oraz promień krzywizny toru punktu D.

a) równanie toru ruchu

ruch odbywa się w płaszczyźnie xy zgodnie z równaniami

$$x_D = b\cos(\theta t) \tag{1}$$

$$y_D = c\sin(\theta t) \tag{2}$$

Równanie toru ruchu to takie równanie, które podaje związek pomiędzy współrzędnymi i w którym czas nie występuje w postaci jawnej. Aby je uzyskać w rozważanym przypadku należy podzielić równanie (1) przez b a równanie (2) przez c i podnieść otrzymane równania do kwadratu stronami:

$$\left(\frac{x_D}{b}\right)^2 = \cos^2(\theta t) \tag{3}$$

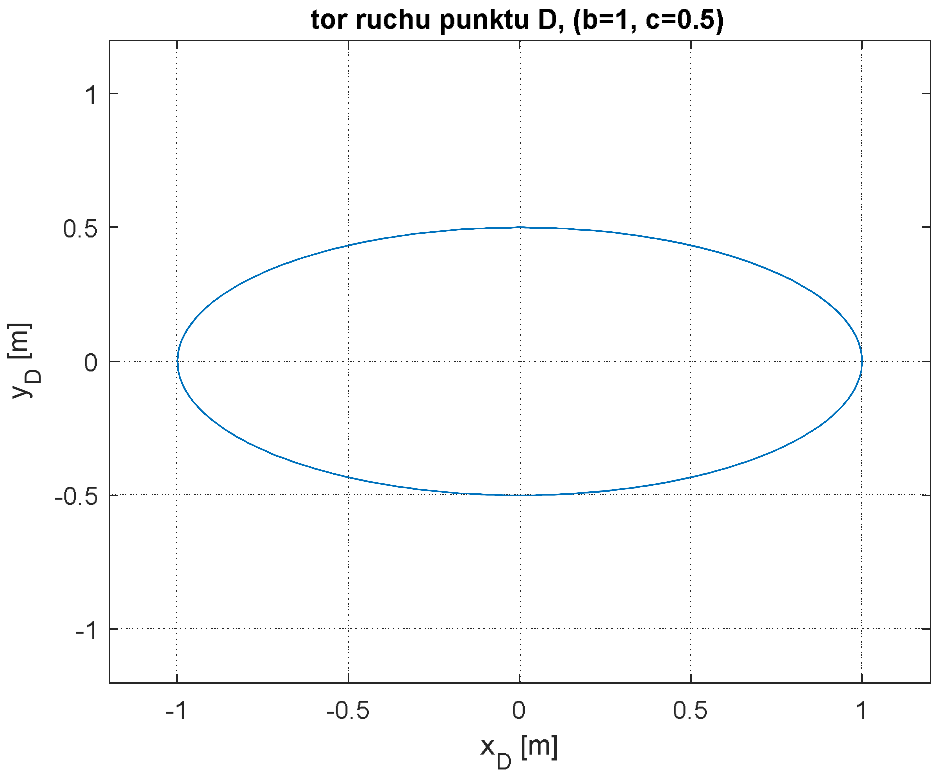
$$\left(\frac{y_D}{c}\right)^2 = \sin^2(\theta t) \tag{4}$$

Dodając stronami równania (3) i (4) otrzymuje się

$$\left(\frac{x_D}{b}\right)^2 + \left(\frac{y_D}{c}\right)^2 = \sin^2(\theta t) + \cos^2(\theta t) \tag{5}$$

gdzie $\sin^2(\theta t) + \cos^2(\theta t) = 1$. Ostatecznie równanie toru punktu D to równanie elipsy

$$\left(\frac{x_D}{b}\right)^2+\left(\frac{y_D}{c}\right)^2-1=0 \qquad (6)$$



b) wektor prędkości punktu D

Wektor prędkości punktu D zapisujemy w postaci analitycznej

$$\overline{v}_D = v_{Dx}\,\overline{i} + v_{Dy}\,\overline{j} \tag{7}$$

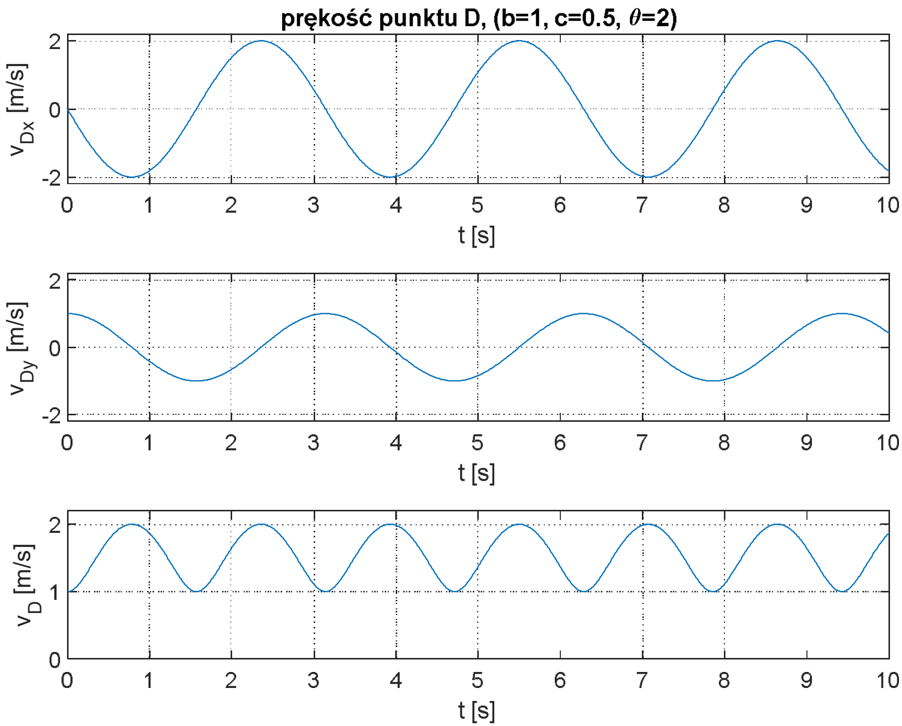
Rzuty wektora prędkości na odpowiednie osie wynoszą

$$v_{Dx} = \dot{x}_D = -b\theta\sin(\theta t)\ [\mathrm{m/s}] \tag{8}$$

$$v_{Dy} = \dot{y}_D = c\theta\cos(\theta t)\ [\mathrm{m/s}] \tag{9}$$

Wartość prędkości punktu D określona jest zależnością

$$v_D = \sqrt{(v_{Dx})^2 + (v_{Dy})^2} = \sqrt{b^2\theta^2\sin^2(\theta t) + c^2\theta^2\cos^2(\theta t)} = \theta\sqrt{b^2\sin^2(\theta t) + c^2\cos^2(\theta t)}\ [\mathrm{m/s}] \tag{10}$$

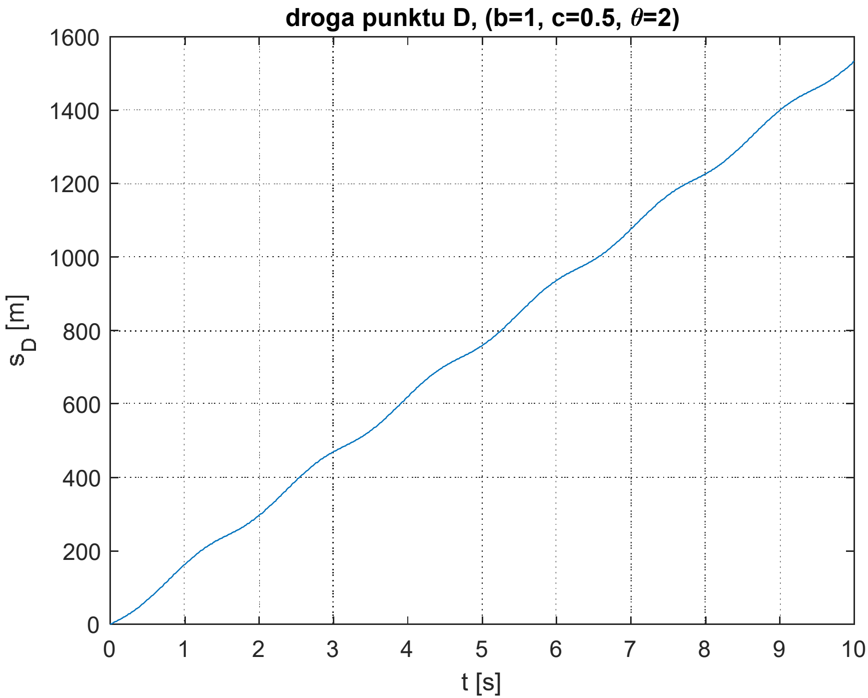

prękość punktu D, (b=1, c=0.5, θ=2)
v_Dx [m/s]
v_Dy [m/s]
v_D [m/s]
t [s]

c) równanie drogi punktu D

równanie drogi wynika z równania

$$s_D = \int_0^t v_D dt = \theta \int_0^t \sqrt{b^2 \sin^2(\theta t) + c^2 \cos^2(\theta t)} dt \tag{11}$$

i jest ono trudne do wyznaczenia na drodze obliczeń analitycznych.



b) wektor przyspieszenia punktu D

Wektor przyspieszenia punktu D zapisujemy w postaci analitycznej

$$\overline{a}_D = a_{Dx}\overline{i} + a_{Dy}\overline{j} \tag{12}$$

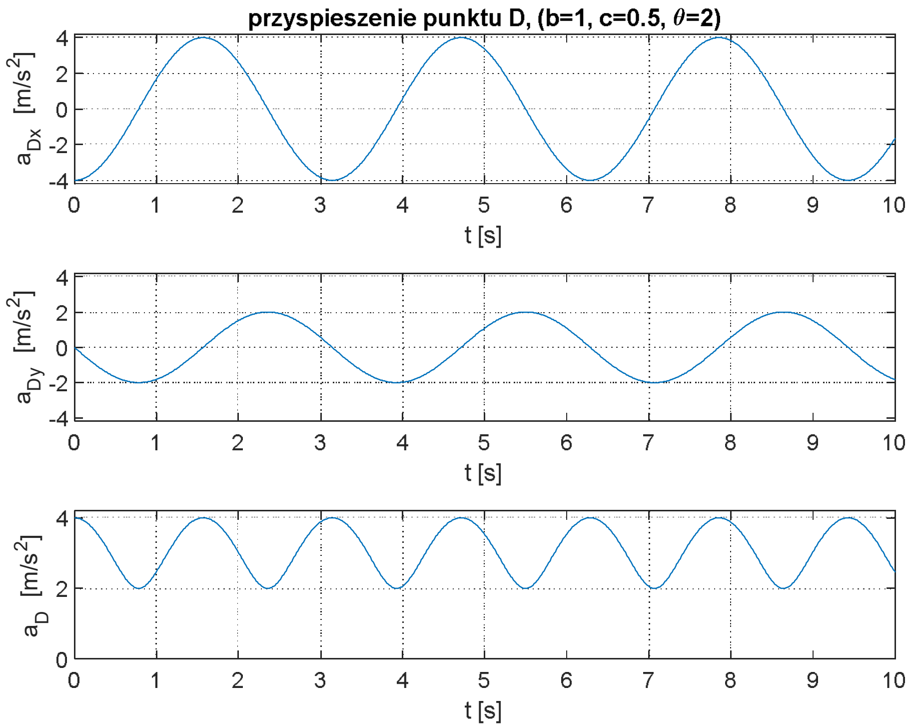
Rzuty wektora przyspieszenia na odpowiednie osie wynoszą

$$a_{Dx} = \dot{v}_{Dx} = \ddot{x}_D = -b\theta^2 \cos(\theta t)\,[m/s^2] \tag{13}$$

$$a_{Dy} = \dot{v}_{Dy} = \ddot{y}_D = -c\theta^2 \sin(\theta t)\,[m/s^2] \tag{14}$$

Wartość przyspieszenia punktu D określona jest zależnością

$$a_D = \sqrt{(a_{Dx})^2 + (a_{Dy})^2} = \sqrt{b^2\theta^4\cos^2(\theta t) + c^2\theta^4\sin^2(\theta t)} = \theta^2\sqrt{b^2\cos^2(\theta t) + c^2\sin^2(\theta t)}\,[m/s^2] \tag{15}$$


przyspieszenie punktu D, (b=1, c=0.5, θ=2)
a_Dx [m/s^2]
a_Dy [m/s^2]
a_D [m/s^2]
t [s]
t [s]
t [s]
4
2
0
-2
-4
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

b) wektor przyspieszenia stycznego i normalnego punktu D, promień krzywizny toru

Wektor przyspieszenia punktu D można zapisać jako sumę geometryczną przyspieszenia stycznego i normalnego, czyli

$$\overline{a}_D=\overline{a}_{D\tau}+\overline{a}_{Dn} \tag{16}$$

a jego wartość to

$$a_D=\sqrt{\left(a_{D\tau}\right)^2+\left(a_{Dn}\right)^2} \tag{17}$$

Wartość przyspieszenia stycznego to

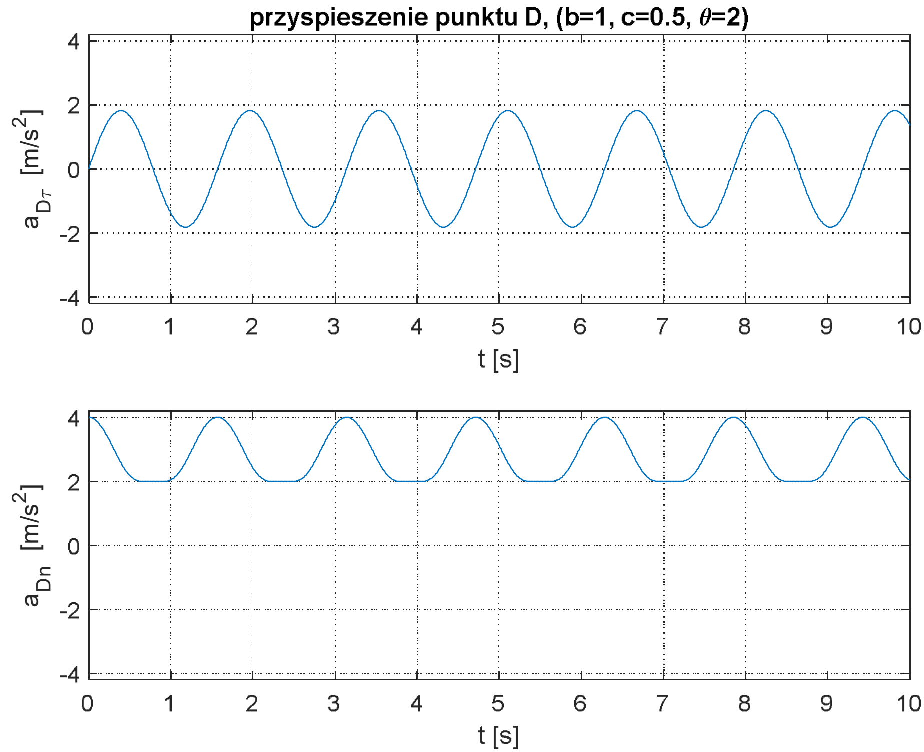
$$a_{D\tau}=\dot{v}_D=\theta\frac{2b^2\sin(\theta t)\cos(\theta t)-2c^2\cos(\theta t)\sin(\theta t)}{2\sqrt{b^2\sin^2(\theta t)+c^2\cos^2(\theta t)}}\theta=\theta^2\frac{\left(b^2-c^2\right)\sin(\theta t)\cos(\theta t)}{\sqrt{b^2\sin^2(\theta t)+c^2\cos^2(\theta t)}}\,[m/s^2] \tag{18}$$

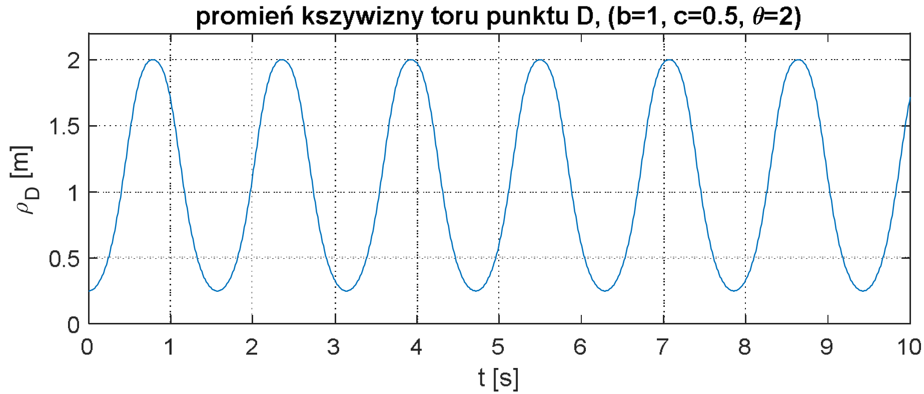
Wartość przyspieszenia normalnego określimy ze wzoru (17) jako:

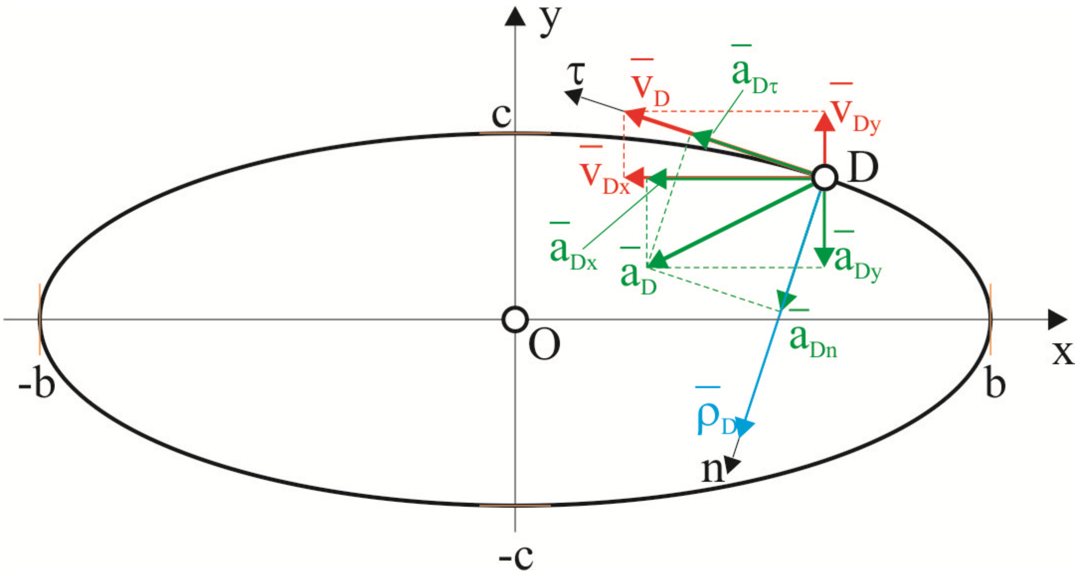
$$a_{Dn}=\sqrt{\left(a_D\right)^2-\left(a_{D\tau}\right)^2}=\theta^2\sqrt{b^2\cos^2(\theta t)+c^2\sin^2(\theta t)-\frac{\left(b^2-c^2\right)^2\sin^2(\theta t)\cos^2(\theta t)}{b^2\sin^2(\theta t)+c^2\cos^2(\theta t)}}\,[m/s^2] \tag{19}$$

Promień krzywizny toru określimy z zależności

$$\rho=\frac{v_D^2}{a_{Dn}}\,[m] \tag{20}$$


przyspieszenie punktu D, (b=1, c=0.5, θ=2)
$a_{D\tau}$ [m/s^2]
t [s]
a_{Dn} [m/s^2]
t [s]


promień kszywizny toru punktu D, (b=1, c=0.5, θ=2)
ρD [m]
0
0.5
1
1.5
2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
t [s]


y
τ
$\bar{v}_D$
$\bar{a}_{D\tau}$
$\bar{v}_{Dy}$
c
D
$\bar{v}_{Dx}$
$\bar{a}_{Dx}$
$\bar{a}_D$
$\bar{a}_{Dy}$
$\bar{a}_{Dn}$
O
x
-b
b
$\bar{\rho}_D$
n
-c