

Spis treści

1. Wprowadzenie	4
1.1. Słowo wyjaśnienia i zachęty dla studentów	6
2. Drgania mechaniczne	9
2.1. Informacje wstępne	9
2.2. Kinematyka drgań	17
2.1.1. Pojęcia podstawowe	17
2.1.2. Wektorowa interpretacja drgań	21
2.1.3. Składanie drgań harmoniczných	23
2.2. Rodzaje wymuszeń: harmoniczne, skokowe, udarowe	38
2.3. Podstawy modelowania układów drgających	44
3. Drgania układu o jednym stopniu swobody	51
3.1. Położenie równowagi statycznej	51
3.2. Drgania swobodne	58
3.3. Drgania tłumione	66
3.3.1. Równania ruchu	66
3.3.2. Tłumienie podkrytyczne	68
3.3.3. Tłumienie krytyczne	76
3.3.4. Tłumienie nadkrytyczne	79
3.4. Drgania wymuszone z tłumieniem wiskotycznym	83
3.4.1. Równania ruchu	83
4. Wibroizolacja	94

4.1. Wibroizolacja przy wymuszeniu harmonicznym.....	95
4.1.1. Wibroizolacja czynna	95
4.1.2. Wibroizolacja bierna	101
4.2. Wibroizolacja pasywna a aktywna.....	106
5. Drgania układu mechanicznego o dwóch stopniach swobody.....	116
5.1. Drgania wzdłużne	116
5.2. Drgania skrętne	134
6. Drgania samowzbudne	139
6.1. Drgania wywołane siłami tarcia suchego	142
6.2. Galopowanie przewodów elektrycznych.....	148
6.3. Przekroje niestateczne dynamicznie	152
6.4. Flatter skrzydła samolotu	160
7. Wybrane zagadnienia dynamiki maszyn wirnikowych	178
7.1. Prędkości krytyczne	178
7.2. Reakcje dynamiczne w łożyskach.....	186
7.3. Wyważenie statyczne	188
7.4. Wyważenie dynamiczne.....	193
7.5. Wyważenie odkształcalnych wirników	204
7.6. Wybrane zaawansowane zagadnienia	208
8. Drgania parametryczne	219
8.1. Drgania parametryczne wału	221
8.2. Drgania parametryczne łożyska tocznego	234
9. Drgania układu ciągłego.....	254

10. Podsumowanie – klasyfikacja drgań.....	259
--	-----

1. Wprowadzenie

Na rynku wydawniczym istnieje wiele pozycji dotyczących bardzo szerokiego zagadnienia jakim jest dynamika maszyn. Ze względu na ogromny zakres tematyczny przedmiotu, nie sposób w jednym opracowaniu zamieścić wszystkich istotnych treści.

Na dynamikę układów mechanicznych można bowiem patrzeć co najmniej w dwojaki sposób:

- można skupić się na opisie głównych zjawisk związanych z ruchem i jego przyczynami, pomijając całe bogactwo zjawisk towarzyszących, albo
- skoncentrować uwagę na zjawiskach z pozoru marginalnych, jak np. deformacje czy drgania układu, mających jednak zasadniczy wpływ na eksploatację, zużycie układu czy wytrzymałość zmęczeniową elementów.

W celu pełnego zrozumienia działania układów mechanicznych, ich poprawnego konstruowania, ale również diagnozowania czy serwisowania konieczna jest umiejętność opisu i analizy dynamiki układów mechanicznych zarówno na tym poziomie związanym z funkcją pełnioną przez układ jak i na poziomie zjawisk towarzyszących ruchowi.

Układy, którymi będziemy się zajmować, czyli mechanizmy i maszyny, składają się z ciał materialnych, czyli brył o dowolnym kształcie i masie. Często w celu uproszczenia będziemy zakładać, że ciała materialne nie deformują się, tzn. będziemy je traktować jako bryły sztywne. Wówczas naszym celem będzie opis ruchu układu w zakresie dotyczącym kinematyki i dynamiki.

W rzeczywistości wszystkie ciała materialne deformują się, czyli są odkształcalne. Deformacje niektórych elementów maszyn są na tyle duże, że nie można ich pomijać i wówczas należy przyjąć odpowiedni model ciała uwzględniający podatność. Będzie to prowadzić do bardziej złożonego, ale bardziej wiarygodnego opisu dynamiki układów. Rozwiązując zagadnienia tego typu będziemy korzystali z teorii drgań mechanicznych.

Z powodu szerokiej tematyki i różnorodności treści kształcenia wynikła potrzeba opracowania skryptu dla studentów kierunków mechatronika oraz lotnictwo Wydziału Budowy Maszyn i Lotnictwa Politechniki Rzeszowskiej. W zamierzeniu autora niniejszy skrypt ma uwzględniać specyfikę wymienionych kierunków, co ma pomóc studentom w lepszym przygotowaniu do pełnienia roli inżynierów wybranych specjalności.

Dlatego w skrypcie poza typową tematyką związaną z opisem dynamiki układów mechanicznych zamieszczono specyficzne treści związane z kierunkiem mechatronika oraz lotnictwo jak np.:

- kinematyka i dynamika przekładni obiegowych stosowanych zarówno w lotnictwie jak i w układach napędowych robotów,
- analiza drgań samowzbudnych na przykładzie flatteru skrzydła samolotu
- czy kinematyka i dynamika ramienia robota przemysłowego.

Zamiarem autora jest nie tylko przekazanie czytelnikom wiedzy na temat dynamiki układów mechanicznych ale również próba wyjaśnienia skomplikowanych niekiedy zjawisk na stosunkowo prostych przykładach znanych z codziennego życia oraz opowiadanie o dynamice maszyn w możliwie przystępny sposób.

1.1. Słowo wyjaśnienia i zachęty dla studentów

Przedmiot dynamika maszyn na Waszej Uczelni wyrósł z dwóch, kiedyś odrębnie nauczanych przedmiotów, tj. z:

- teorii maszyn i mechanizmów (TMM) oraz
- drgań mechanicznych.

TMM dotyczyła głównie analizy strukturalnej układów oraz opisu ich kinematyki i dynamiki. Znane z mechaniki ogólnej formalizmy matematyczne były odpowiednio stosowane do opisu konkretnych układów mechanicznych, jak np. mechanizmy:

- korbowo-wodzikowe,
- krzywkowe,
- zębate,
- czy jarzmowe.

Większość z układów analizowanych w ramach TMM występowała i nadal występuje w pojazdach samochodowych: w silniku, układzie przeniesienia napędu, układzie kierowniczym, zawieszeniu czy osprzęcie. Była to więc teoria bardzo pragmatyczna.

Z kolej drgania mechaniczne dotyczyły opisu dynamiki ruchów o charakterze oscylacyjnym wynikających ze sprężystych deformacji układów. Przykładami mogą tu być:

- drgania skrętne wałów w przekładniach,
- drgania pojazdów
- drgania obrabiarek.

Kilkadziesiąt lat temu te dwa przedmioty, obok mechaniki ogólnej, wytrzymałości materiałów czy podstaw konstrukcji maszyn, stanowiły rdzeń nauczania na studiach inżynierskich. Rozwój nauk z obszaru automatyzacji i sterowania oraz technologii informatycznych czy sztucznej inteligencji powodował stopniowe wprowadzanie nowych treści nauczania kosztem dotychczasowych.

Jest to zjawisko całkiem naturalne i pozytywne, mające jednak jeden ważny i niebezpieczny skutek. Mianowicie studenci coraz mniej czasu poświęcają na poznanie i zrozumienie układów mechanicznych, które jednak chcą projektować a później nimi sterować czy latać.

Ponadto tradycyjne przedmioty wymagają dobrego przygotowania matematycznego, są więc raczej trudne, a wręcz bywają postrzegane jako nudne (wykładowcy trudno na wykładzie ze swadą opowiadać o przyspieszeniach drugiego rzędu w układzie korbowo wodzikowym).

Na skutek takiego podejścia studenci często biorą w swoje ręce układy, których nie rozumieją albo rozumieją jedynie „z grubsza” i większość problemów starają się przezwyciężyć przez „**inteligentne**” aplikacje sterujące układami mechanicznymi albo działają wg zasady „**wciśnijmy przycisk i zobaczymy co się wydarzy**”.

Niestety wcześniej czy później stara dobra fizyka przypomina o swoim istnieniu. I wtedy w modelach konstruowanych samolotów urywają się skrzydła np. z powodu drgań samowzbudnych, w układach wirnikowych pojawiają się nieprzewidziane efekty giroskopowe, a dokładność ruchu sterowanych robotów jest żenująco niska np. z powodu nieprzewidzianych zjawisk tarcowych.

Oczywiście nie da się całkowicie wyeliminować niepowodzeń i są one naturalnym składnikiem działalności inżynierskiej. Ale wielu z nich można by uniknąć, gdyby miało się **podstawową wiedzę z zakresu dynamiki układów mechanicznych**. Temu celowi ma służyć niniejszy przedmiot, na którym będą omawiane układy specyficzne dla kierunku **mechatronika** i **lotnictwo**. Są to zresztą dziedziny przenikające się, ponieważ współczesne samoloty są przecież urządzeniami mechatronicznymi.

2. Drgania mechaniczne

2.1. Informacje wstępne

Drgania mechaniczne to wszelkiego rodzaju ruchy oscylacyjne zachodzące w układach mechanicznych. W technice przez drgania mechaniczne rozumiemy „małe” ruchy masy o charakterze oscylacyjnym wokół położenia równowagi statycznej. Mogą one mieć przyczyny naturalne lub być wywołane działalnością człowieka.

Do drgań o przyczynach naturalnych można zaliczyć:

- losowe wstrząsy sejsmiczne,
- uderzenia wiatru,
- uderzenia fal.

Drgania wywołane działalnością człowieka są związane z pracą wszelkiego rodzaju maszyn i urządzeń. Emitują one drgania mechaniczne o różnych amplitudach i częstościach, które mogą przenosić się na podłoże, fundamenty i konstrukcje powodując szkodliwe oddziaływanie na operatora (człowieka) czy konstrukcję (mikropęknięcie, pęknięcie lub zniszczenie). Typowymi przyczynami takich drgań mechanicznych są:

- ruch uliczny (tramwaje, samochody),
- wybuchy i eksplozje (odstrzały w kamieniołomach, wystrzały z broni palnej),
- maszyny stosowane w produkcji przemysłowej.

Podstawowymi parametrami służącymi do określenia ruchu drgającego są amplituda i częstotliwość drgań. Amplituda drgań jest podawana w jednostkach odpowiednich dla danej wielkości fizycznej, np. przemieszczenie podajemy w 1 [m], prędkość w 1 [m/s], itp. Częstotliwość drgań podajemy w jednostkach 1 [Hz]. Wiadomo, że: $\omega = \frac{2\pi}{T} \left[\frac{rad}{s} \right]$ to częstość drgań, T [s] to okres drgań, $f = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{s} \right]$ to częstotliwość drgań, czyli $\omega = 2\pi f$. Zatem częstość nie jest równa częstotliwości i nie wolno ich mylić.

W widmie drgań mechanicznych można wyróżnić:

- drgania o małej częstotliwości, od 0-200 [Hz],
- drgania o średniej częstotliwości, od 200-2000 [Hz],
- drgania o dużej częstotliwości, powyżej 2000 [Hz].

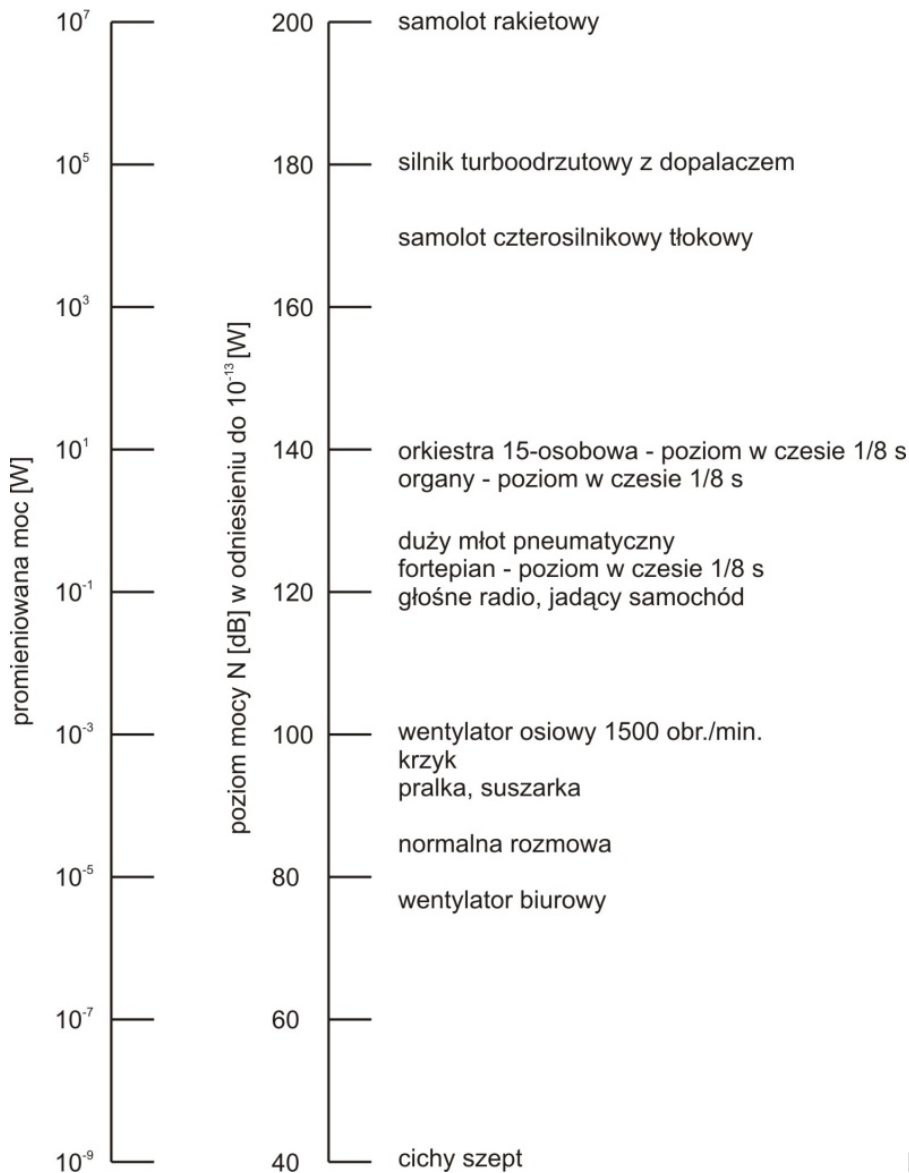
Drgania mechaniczne o częstotliwościach od 0 do kilkudziesięciu tysięcy [Hz] bywają szkodliwe zarówno dla ludzi jak również maszyn i urządzeń. Stwierdzenie, że drgania „bywają szkodliwe” sugeruje, że nie zawsze są szkodliwe. Tak w istocie jest, a niektóre korzystne zjawiska drganiowe zostaną omówione w innym miejscu.

Każde naruszenie równowagi w ośrodkach ciągłych takich jak gaz, ciecz czy ciało stałe jest przyczyną powstania ruchu oscylacyjnego (czyli drgań) cząsteczek ośrodka. Ten ruch drgający powoduje powstanie ruchu falowego w ośrodku, ruch falowy emituje dźwięki, stąd mówimy o falach akustycznych. Fale akustyczne mogą być o różnym charakterze (np. kuliste rozchodzące się w przestrzeni – czoło fali to powierzchnia kulista; gdy czoło fali jest płaszczyzną nazywamy ją falą płaską - może być to fala podłużna lub poprzeczna, nie wchodzimy tu w szczegóły ruchu falowego, tym zagadnieniem zajmuje się m.in. nauka zwana akustyką).

Obszar, w którym rozchodzą się fale akustyczne nazywamy polem akustycznym. Najczęściej mierzonymi wartościami pól akustycznych są: ciśnienie akustyczne, natężenie dźwięku lub moc akustyczna. Pomiar tych wielkości fizycznych, ze względu na dużą rozpiętość ich wartości, wyrażamy w skali logarytmicznej jako stosunek danej wartości do przyjętej tzw. wartości odniesienia. Tak określoną jednostką są tzw. decybele. Np. poziom mocy akustycznej to

$$L_N = 10 \lg \frac{N_a}{N_o} [dB], \quad (1)$$

gdzie N_a to zmierzona moc akustyczna, N_o to akustyczna moc odniesienia przyjęta jako $N_o = 10^{-3} [W]$. Na rys. 1 podano przykładowe moce akustyczne promieniowane przez różne źródła dźwięku. Moc akustyczna to ilość energii wysyłanej przez źródło dźwięku w jednostce czasu, np. cichy szepc to moc $10^{-9} [W]$, normalna rozmowa to moc $10^{-5} [W]$, startujący samolot odrzutowy to moc $10^7 [W]$.



Rys. 1.

Rozchodzące się fale akustyczne charakteryzują się również prędkością rozchodzenia (prędkość rozchodzenia się fali akustycznej w powietrzu to tzw. prędkość dźwięku - przy temperaturze 20°C wynosi 340 [m/s]).

Widmo hałasu mechanicznego emitowane przez układy drgające zależy w głównej mierze od wielkości prędkości oscylacji, a w przypadku gdy występuje uderzenie mechaniczne widmo hałasu zależy od wielkości przyspieszenia drgań. Tylko drgania o małej częstotliwości są nośnikami energii wibroakustycznej generowanego widma i te drgania są decydującymi w zagadnieniach wytrzymałości maszyn i urządzeń. Są one słabo tłumione i rozprzestrzeniają się na duże odległości. Istotnym problemem związanym z emisją hałasu są wszelkiego rodzaju przepływy w rurach, wyptywy z dysz ciecży czy gazu. To tzw. hałasy hydro- i aerodynamiczne.

Wszelkiego rodzaju hałas można identyfikować dokonując pomiarów tzw. widma hałasu. Widmo hałasu można podzielić na:

- infradźwięki, $0 < f < 16$ [Hz],
- dźwięki słyszalne (po prostu dźwięki), $16 < f < 20 \cdot 10^3$ [Hz],
- ultradźwięki, $20 \cdot 10^3 < f < 10^9$ [Hz],
- hiperdźwięki, $f > 10^9$ [Hz].

Źródłami drgań mechanicznych i fal akustycznych są:

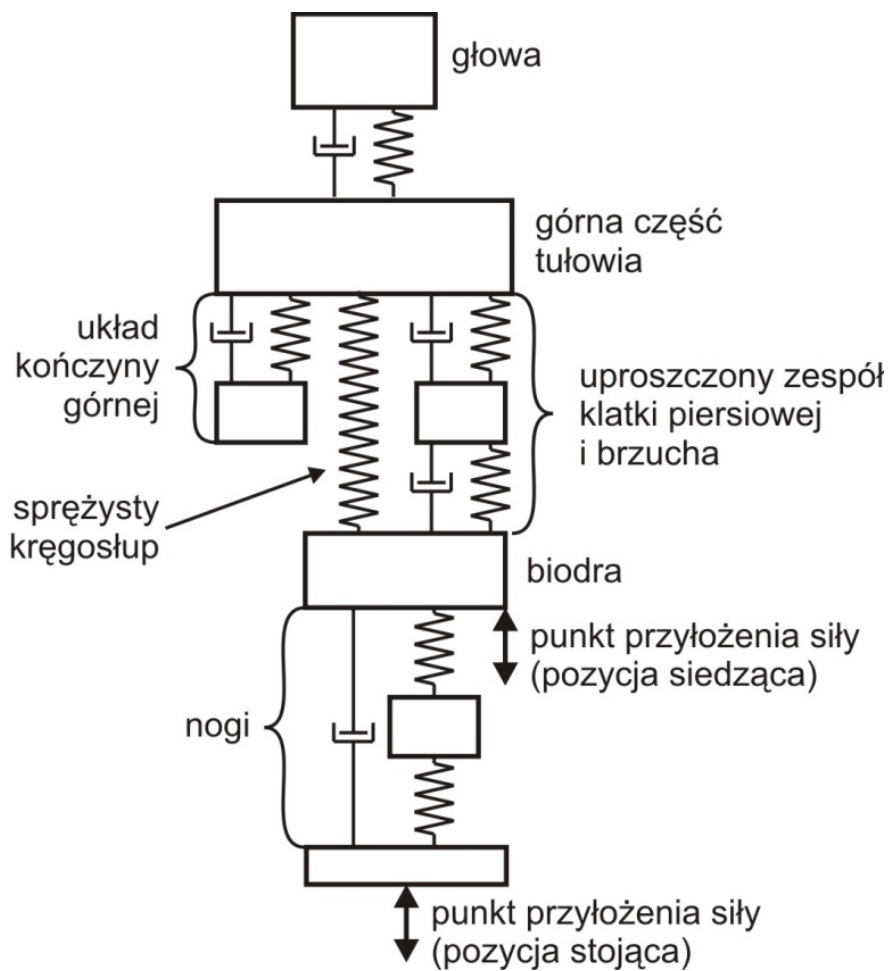
- układy techniczne, w których powstawanie drgań wynika z:
 - konstrukcji (to wszelkiego rodzaju mechanizmy),
 - przyczyn technologicznych (niedokładności wykonawcze i montażowe maszyn i urządzeń, niewyważenie elementów wirujących),
 - przyczyn eksploatacyjnych (zużycie elementów, luzy, niewłaściwe smary itp.).
- procesy aerodynamiczne czy hydrodynamiczne (wszelkiego rodzaju przepływy i wypływy),
- realizacja procesu technologicznego (np. budowa drogi czy praca obrabiarek w hali fabrycznej).

Jednym z problemów techniki jest zagadnienie wpływu drgań mechanicznych i hałasu na człowieka jako operatora oraz wpływ na środowisko naturalne. Tymi problemami zajmuje się dziedzina nauki zwana biomechaniką.

Wpływ drgań na człowieka można rozpatrywać wg:

- wartości parametrów opisujących drgania, czyli amplitudy przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń oraz częstotliwości,
- czasu ich występowania (czasu ekspozycji na drgania),
- miejsca przekazywania drgań na człowieka,
- pozycji odbioru (stojąca, siedząca, leżąca),
- indywidualnych cech fizjologicznych i psychologicznych człowieka jak: wiek, wzrost, płeć, stan zdrowia itp.

Rozpatrując reakcje organizmu człowieka na działanie drgań, ciało ludzkie można przedstawić w postaci modelu przedstawionego na rys. 2.



Rys. 2.

Badania doświadczalne pozwoliły określić dopuszczalne normy i normatywy dotyczące oddziaływania bezpiecznego drgań i hałasu na człowieka. Szkodliwy wpływ drgań na człowieka to zaburzenia w układach:

- krążenia,
- mięśniowym,
- nerwowym,
- kostno-stawowym.

W normach i normatywach uwzględnia się fakt, że drgania mogą być:

- nieodczuwalne,
- wyraźnie odczuwalne,
- bardzo silnie odczuwalne,
- trudne do zniesienia,
- nie do zniesienia.

Podsumowując negatywny wpływ drgań na otoczenie można stwierdzić, że drgania mechaniczne są nie tylko szkodliwe dla ludzi, ale mogą powodować uszkodzenia budynków, hal fabrycznych czy samych maszyn generujących drgania. Wpływają bardzo niekorzystnie na realizację procesów produkcyjnych. W ostatnim czasie analizuje się szczególnie niekorzystny wpływ drgań i hałasu komunikacyjnego na środowisko (stąd lotniska znajdują się daleko od zabudowy, przy drogach budowane są ekrany akustyczne). Rolą konstruktorów i eksploatorów układów mechanicznych jest budowa i użytkowanie takich układów, gdzie tzw. poziom drgań i towarzyszący im hałas są minimalne.

2.2. Kinematyka drgań

2.1.1. Pojęcia podstawowe

Jeśli droga jest okresową funkcją czasu, t ruch nazywa się ruchem okresowym, czyli powtarzającym się identycznie po czasie T nazywanym okresem ruchu. Do pełnego opisanie ruchu okresowego wystarczy więc opisanie ruchu w jednym okresie.

Jeśli ruch okresowy jest opisany równaniem $x = y(t)$, to przy pewnych założeniach¹ można tę funkcję okresową przedstawić w postaci szeregu trygonometrycznego Fouriera

$$\begin{aligned} y(t) &= A_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \dots \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \end{aligned} \tag{1}$$

lub w innej postaci

¹ Założmy, że funkcja y jest funkcją okresową o okresie T . Jeśli y spełnia następujące trzy warunki (zwane *warunkami Dirichleta*):

1. funkcja y jest bezwzględnie całkowna, tzn.:

$$\int_{-T/2}^{T/2} |y(x)| dx < \infty$$

2. funkcja y w przedziale jednego okresu ma skończoną liczbę maksimów lokalnych i minimów lokalnych,
 3. funkcja y w przedziale jednego okresu posiada skończoną liczbę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju,
- to y ma reprezentację w postaci szeregu Fouriera.

$$\begin{aligned}
 y(t) &= A_0 + A_1 \sin(\omega t + \gamma_1) + A_2 \sin(2\omega t + \gamma_2) + A_3 \sin(3\omega t + \gamma_3) + \dots \\
 &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \gamma_n)
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

gdzie $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\operatorname{tg}(\gamma_n) = \frac{a_n}{b_n}$. Funkcje $A_n \sin(n\omega t + \gamma_n)$ nazywa się funkcjami harmonicznymi n -tego rzędu. Innymi słowy funkcję okresową $y(t)$ można rozłożyć na składowe funkcje harmoniczne.

Ruch określony równaniem (dla uproszczenia wzięto pojedynczą funkcję harmoniczną)

$$x = A \sin(\omega t + \gamma) \tag{3}$$

nazywany jest ruchem lub drganiem harmonicznym, gdzie:

ω – częstość drgań

γ – faza ruchu (kąt przesunięcia fazowego)

A – amplituda drgań

Pomiędzy okresem ruchu harmonicznego a jego częstością zachodzi zależność:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{4}$$

Wielkość $1/T$ określającą liczbę okresów odbytych w jednostce czasu nazywa się częstotliwością f .

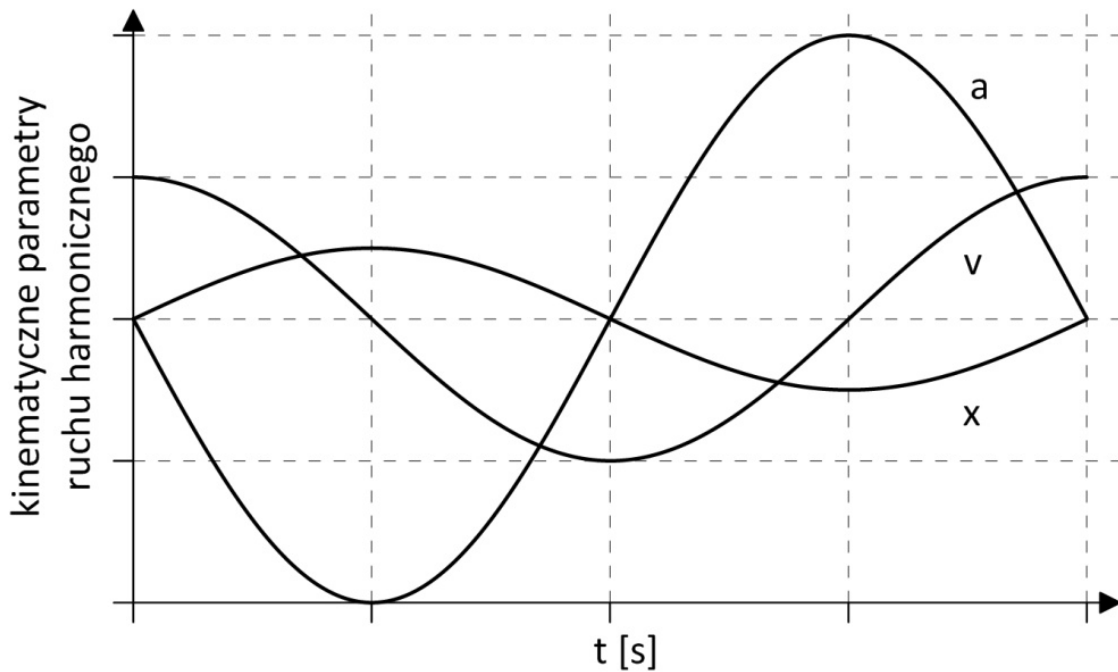
Pochodne drogi (3) względem czasu to prędkość

$$v = \dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \gamma) = A\omega \sin\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right) \quad (5)$$

oraz przyspieszenie

$$a = \ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \gamma) = A\omega^2 \sin(\omega t + \gamma + \pi) \quad (6)$$

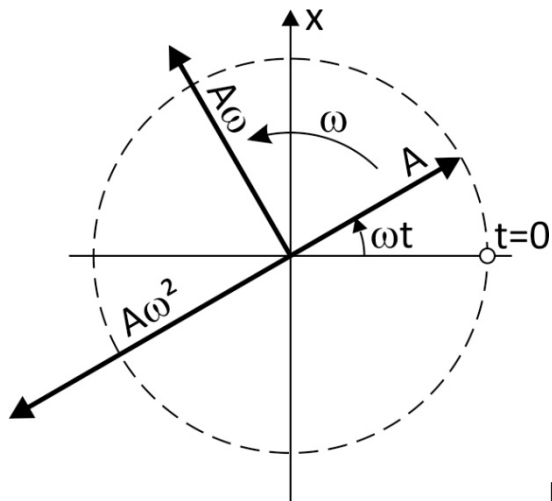
Z zestawienia wzorów (3), (5) i (6) wynika, że prędkość ruchu harmonicznego jest przesunięta w fazie o $\frac{\pi}{2}$ względem przemieszczenia, a przyspieszenie jest przesunięte o π , czyli jest w tzw. przeciw-fazie względem przemieszczenia. Na rys. 3 pokazano przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie w ruchu harmonicznym przy założeniu, że kąt przesunięcia fazowego $\gamma = 0$.



Rys. 3.

2.1.2. Wektorowa interpretacja drgań

Ruch drgający harmoniczny można przedstawić za pomocą wirującego wektora. Załóżmy, że wektor A obraca się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara ze stałą prędkością kątową ω .



Rys. 4

Jeśli rozpoczniemy odmierzać czas od chwili, kiedy wektor zajmuje położenie poziome, to jego rzut poziomy będzie równy $A\cos(\omega t)$, zaś rzut pionowy będzie równy $A\sin(\omega t)$. Każdy z rzutów możemy zastosować do opisu ruchu harmonicznego, lecz w dalszych rozważaniach będziemy posługiwać się rzutem pionowym, czyli na oś x , zapisując:

$$x = A\sin(\omega t)$$

(7)

Taka interpretacja była powodem wprowadzenia nazwy *częstość kołowa* lub *pulsacja* w odniesieniu do parametru ω . Obecnie często stosuje się po prostu nazwę *częstość*. Ponieważ wielkość ω jest prędkością kątową wektora, wyrażana jest w $[rad/s]$. Z wzoru (4) wynika, że $\omega = 2\pi f$, gdzie f nazywana częstością jest liczbą obrotów wektora A w ciągu sekundy.

Prędkość w ruchu opisanym równaniem (7) wynosi

$$\dot{x} = A\omega \cos(\omega t) \quad (8)$$

i może być rozumiana jako rzut pionowy wektora $A\omega$ obracającego się z tą samą prędkością ω co wektor A , lecz przesuniętego względem niego o 90° w kierunku ruchu. Przyspieszenie w tym ruchu wynosi

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t) \quad (9)$$

i może być rozumiane jako rzut pionowy wektora $A\omega^2$ obracającego się z tą samą prędkością ω co wektor A , lecz przesuniętego względem niego o 180° w kierunku ruchu, lub względem wektora $A\omega$ o 90° w kierunku ruchu.

Wzory (7)-(9) są przypadkiem wzorów (3), (5) i (6) dla zerowego przesunięcia fazowego. Gdyby rozpocząć odmierzenie czasu od chwili, kiedy wektor A zajmuje położenie inne niż poziome, wówczas w zależnościach (7)-(9) należałoby uwzględnić kąt przesunięcia fazowego.

2.1.3. Składanie drgań harmoniczych

Rozważmy sumę dwóch drgań harmoniczych o tej samej częstotliwości ω , ale różnych fazach, czyli

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \sin(\omega t + \gamma_1) + a_2 \sin(\omega t + \gamma_2) \quad (10)$$

gdzie $x_1 = a_1 \sin(\omega t + \gamma_1)$, $x_2 = a_2 \sin(\omega t + \gamma_2)$. Równanie (10) można zapisać

$$x = (a_1 \sin(\gamma_1) + a_2 \sin(\gamma_2)) \cos(\omega t) + (a_1 \cos(\gamma_1) + a_2 \cos(\gamma_2)) \sin(\omega t) \quad (11)$$

i dalej

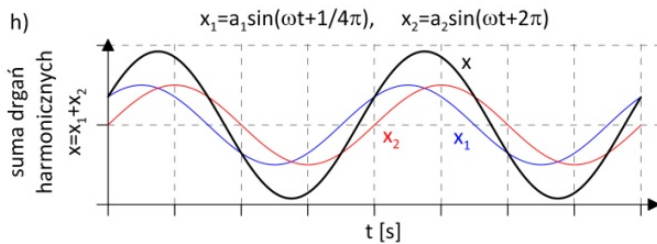
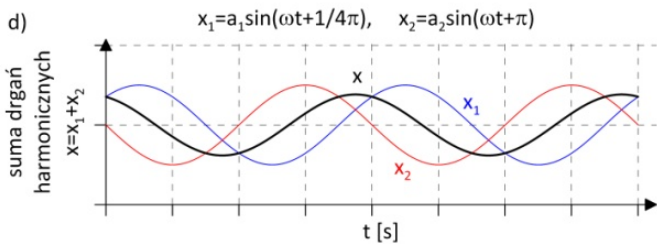
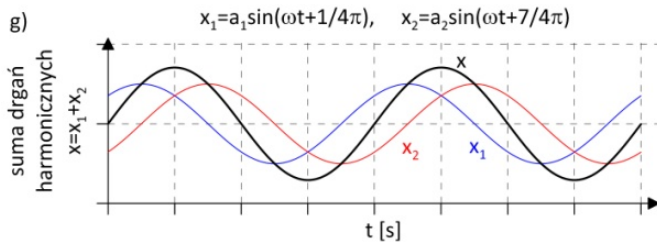
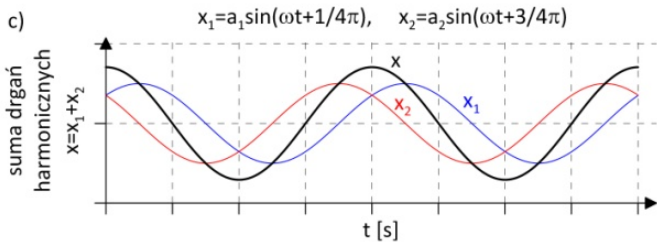
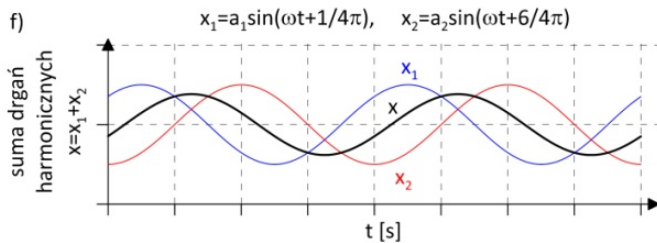
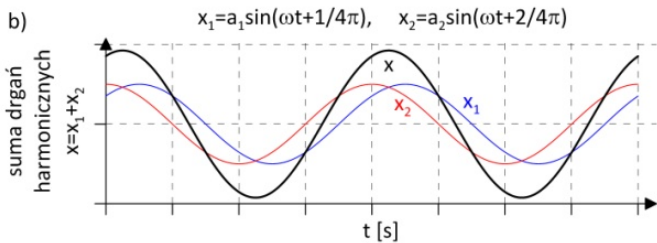
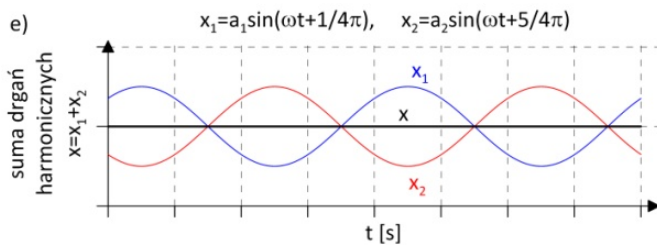
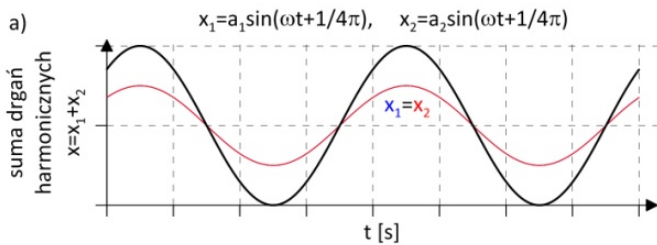
$$x = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad (12)$$

gdzie $a = a_1 \sin(\gamma_1) + a_2 \sin(\gamma_2)$ oraz $b = a_1 \cos(\gamma_1) + a_2 \cos(\gamma_2)$ mają stałe wartości. Ostatecznie można zapisać:

$$x = A \sin(\omega t + \gamma) \quad (13)$$

gdzie $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg}(\gamma) = \frac{a}{b}$. Wynika z tego, że suma dwóch drgań harmoniczych (10) o tej samej częstotliwości, także jest drganiem harmonicznym.

Na rys. 5 pokazano sumę dwóch drgań harmoniczych o tych samych amplitudach i częstotliwościach, ale różnych przesunięciach fazowych.



Gdyby do otrzymanego wyniku dodać kolejne drganie harmoniczne o tej samej częstotliwości, itd., to wynikiem byłoby również drganie harmoniczne. Można zatem uogólnić powyższe rozważania i powiedzieć, że suma n drgań harmonicznch o tej samej częstotliwości daje drganie harmoniczne o takiej samej częstotliwości, czyli

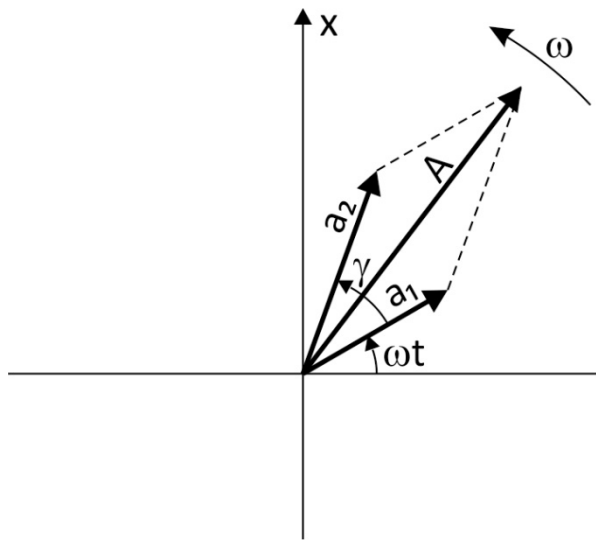
$$x = \sum_{i=1}^n a_i \sin(\omega t + \gamma_i) = A \sin(\omega t + \gamma) \quad (14)$$

gdzie

$$A = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i \sin(\gamma_i)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n a_i \cos(\gamma_i)\right)^2} \quad (15)$$

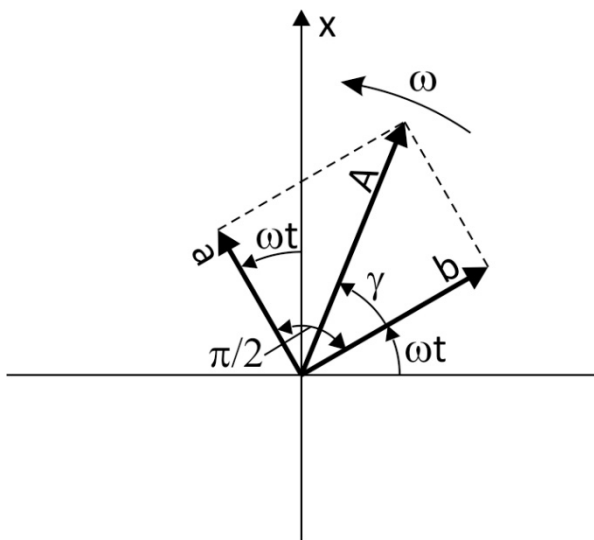
$$\operatorname{tg}(\gamma) = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \sin(\gamma_i)}{\sum_{i=1}^n a_i \cos(\gamma_i)} \quad (16)$$

Do składania ruchów harmonicznych o tej samej częstotliwości można zastosować wektorową interpretację drgań (rys. 6). Jako przykład weźmy sumę dwóch wektorów a_1 i a_2 obróconych względem siebie o kąt γ i obracających się z prędkością kątową ω w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Rzut poziomy jaki i pionowy każdego z wektorów przedstawia ruch harmoniczny. Wypadkowa A wektorów a_1 i a_2 obraca się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara z tą samą prędkością kątową ω . Zatem rzut poziomy wektora wypadkowego A jest opisany równaniem $A\cos(\omega t + \varphi)$, a rzut pionowy jest opisany równaniem $A\sin(\omega t + \varphi)$, gdzie φ to kąt przesunięcia fazowego, którego wyznaczeniem nie będziemy się zajmować. Obydwa rzuty przedstawiają ruchy harmoniczne o częstotliwości ω , czyli suma dwóch drgań harmonicznych o tych samych częstotliwościach daje również ruch harmoniczny. Potwierdza to analizę przeprowadzoną wcześniej metodami trygonometrycznymi.



Rys. 6

Przy okazji omówimy jeden szczególny przypadek, który jest ważny z punktu widzenia analiz prowadzonych w następnych rozdziałach. Dotyczy on dodawania ruchów harmoniczych o tych samych częstościach przesuniętych w fazie o 90° . Weźmy pod uwagę sumę dwóch wektorów a i b obracających się z prędkością kątową ω w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (rys. 7). Kąt pomiędzy wektorami jest kątem prostym. Jeśli rozpoczniemy odmierzanie czasu od chwili, kiedy wektor a zajmuje położenie pionowe, to jego rzut pionowy będzie równy $a\cos(\omega t)$, zaś rzut pionowy wektora b to $b\sin(\omega t)$. Suma tych rzutów to $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$.



Rys. 7

Z rysunku wynika, że długość wektora wypadkowego wynosi $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, a jego rzut pionowy to $A\sin(\omega t + \gamma)$. Suma rzutów wektorów składowych jest równa rzutowi wektora wypadkowego A , czyli

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\omega t + \gamma) \quad (17)$$

gdzie kąt przesunięcia fazowego określimy na podstawie rysunku jako

$$\operatorname{tg}(\gamma) = \frac{a}{b} \quad (18)$$

Wynik przeprowadzonych rozważań będzie znajdował zastosowanie w analizie rozwiązań równań ruchu drgającego. Umożliwia on także wyjaśnienie równoważności zapisu wzorów (1) i (2), dotyczących przedstawienia funkcji okresowej w postaci szeregu trygonometrycznego Fouriera.

Rozważmy sumę dwóch drgań harmoniczych o **różnych wartościach częstości** i różnych fazach, czyli

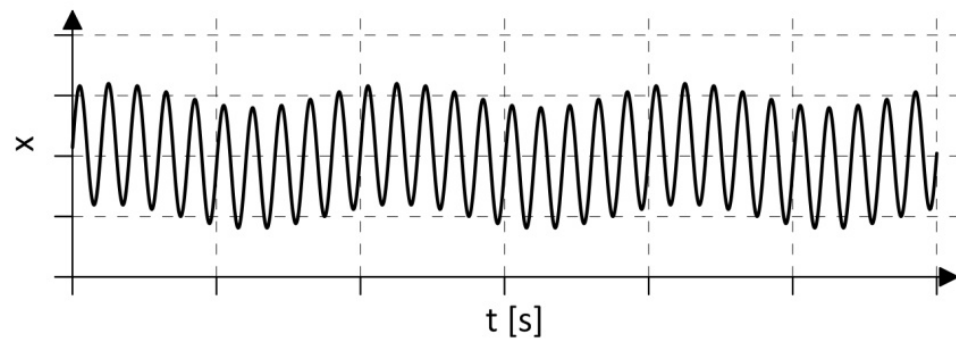
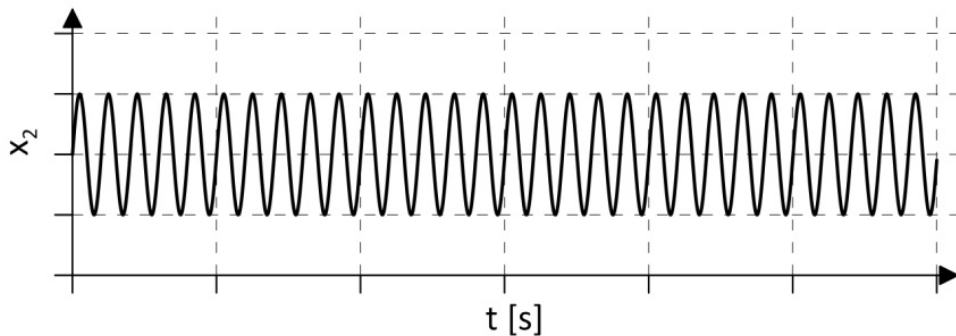
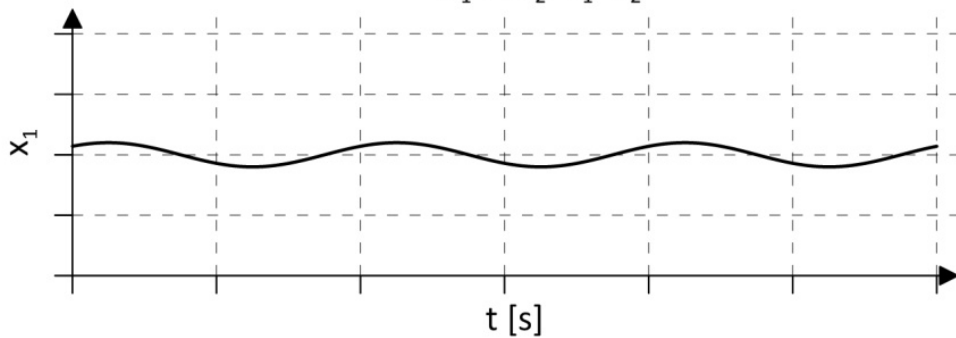
$$x = x_1 + x_2 = a_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \gamma_2) \quad (19)$$

gdzie $x_1 = a_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1)$, $x_2 = a_2 \sin(\omega_2 t + \gamma_2)$. Suma takich drgań nie będzie drganiem harmonicznym, ale w niektórych przypadkach może być drganiem okresowym. Jeśli założymy, że częstości ω_1 i ω_2 są współmierne, tzn. istnieją liczby naturalne m i n takie, że $\omega_1/m = \omega_2/n$, to drganie wypadkowe x jest drganiem okresowym. W przeciwnym przypadku drganie wypadkowe nie będzie okresowe.

Przypadek 1. Suma drgań o częstościach bardzo różniących się.

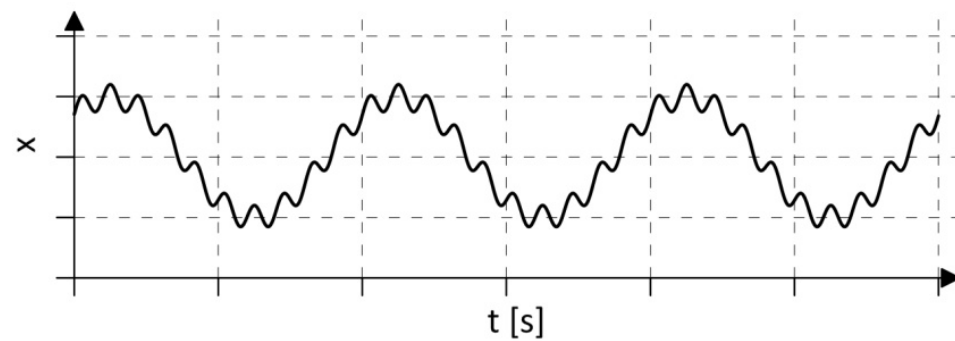
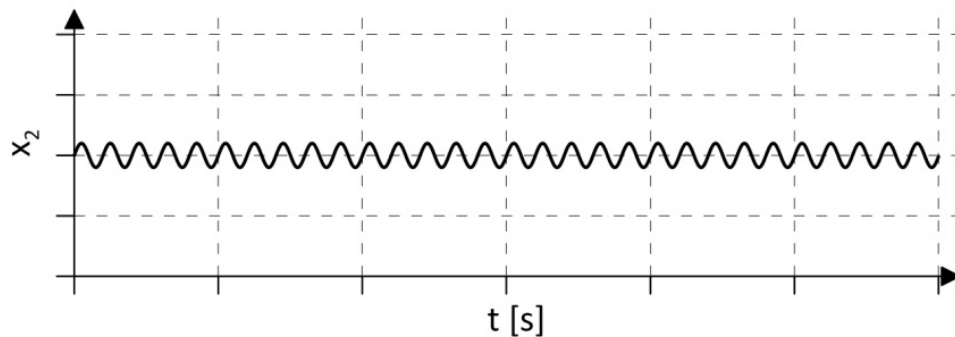
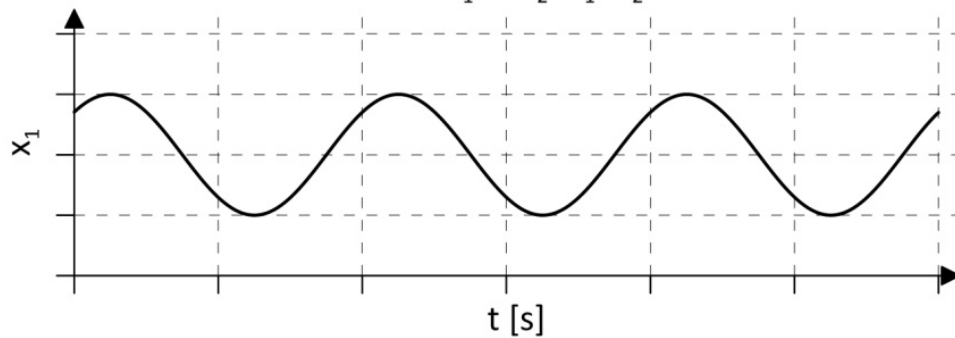
Na rys. 8 i 9 pokazano złożenie drgań harmoniczych danych równaniem (19), przy czym dla drgań przedstawionych na rysunku 8 przyjęto $\omega_1 \ll \omega_2$, i $a_1 < a_2$, natomiast dla drgań zaprezentowanych na rysunku 9 przyjęto $\omega_1 \ll \omega_2$, i $a_1 > a_2$. Ponadto założono, że $\omega_1/m = \omega_2/n$, więc drgania wypadkowe są drganiami okresowymi.

$$\omega_1 \ll \omega_2, a_1 < a_2$$



Rys. 8.

$$\omega_1 \ll \omega_2, a_1 > a_2$$



Rys. 9.

Przypadek 2. Suma drgań o częstościach różniących się nieznacznie.

Taki przypadek można opisać równaniem (19), w którym dla uproszczenia analizy założono jednakowe amplitudy drgań składowych i brak przesunięcia fazowego. W związku z tym otrzymano równanie w postaci

$$x = x_1 + x_2 = a \sin(\omega_1 t) + a \sin(\omega_2 t) \quad (20)$$

Równanie to można przekształcić do postaci

$$x = a(\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)) = 2a \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \quad (21)$$

w której $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_{sr}$ to częstość „średnia” i $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \omega_{mod}$ to częstość modulacji. Równanie (21) można zapisać w postaci wzoru

$$x = 2a \cos(\omega_{mod} t) \sin(\omega_{sr} t) \quad (22)$$

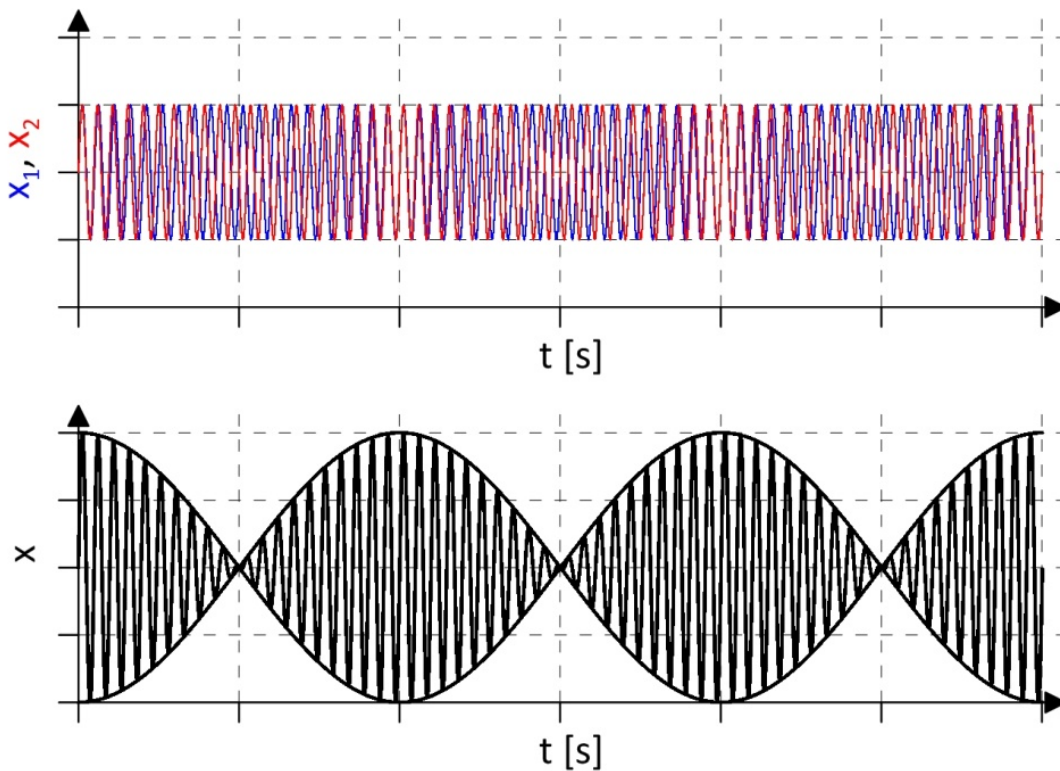
lub

$$x = A_{mod}(t) \sin(\omega_{sr} t) \quad (23)$$

gdzie

$$A_{mod}(t) = 2a \cos(\omega_{mod} t) \quad (24)$$

Ruch opisany wzorami (23) i (24) można interpretować jako oscylacje o częstotliwości $\omega_{\dot{s}r}$ i amplitudzie $A_{mod}(t)$ zmieniającej się w czasie z częstotnością ω_{mod} . Zapisane wzory (23) i (24) są wzorami ścisłymi, będącymi inną formą zapisu równania (20), jednak ich zastosowanie daje największe korzyści wtedy, gdy częstotliwości drgań składowych spełniają zależność: $\omega_1 \approx \omega_2$. Wówczas $\omega_{\dot{s}r} \approx \omega_1 \approx \omega_2$ oraz $\omega_{mod} \ll \omega_{\dot{s}r}$, więc amplituda $A_{mod}(t)$ zmienia się nieznacznie w stosunku do „szybkich” oscylacji z częstotnością $\omega_{\dot{s}r}$. Taki przypadek ruchu nazywany jest dudnieniem (rys. 10). Obwiednia drgań jest funkcją harmoniczną o amplitudzie $2a$ i częstotliwości ω_{mod} .

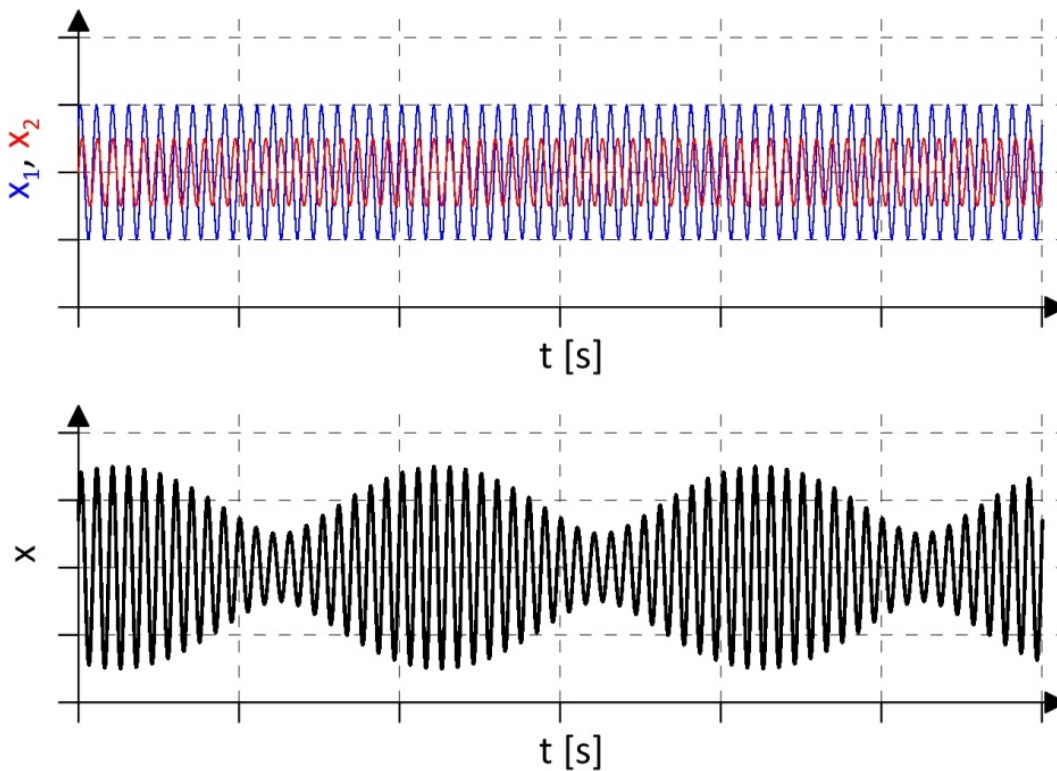


Rys. 10.

Można oczywiście rozważyć przypadek, gdy amplitudy drgań składowych mają różne amplitudy i są przesunięte w fazie, czyli

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) + a_2 \sin(\omega_2 t) \quad (25)$$

Wyniki analizy będą jednak bardziej złożone i przez to trudniejsze do zrozumienia. Zasadniczą różnicą w stosunku do poprzednio analizowanego przypadku jest to, że amplituda zmienia się w granicach od $A_{max} = a_1 + a_2$ do $A_{min} = |a_1 - a_2|$.



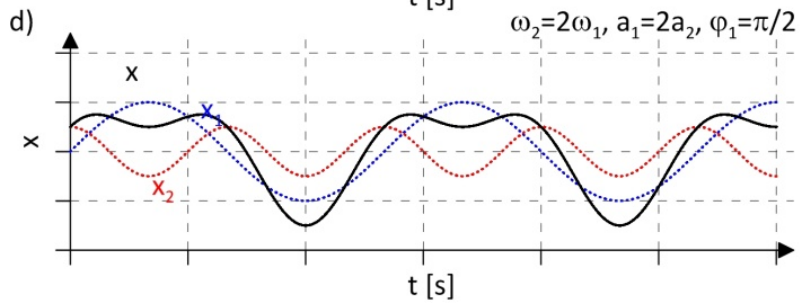
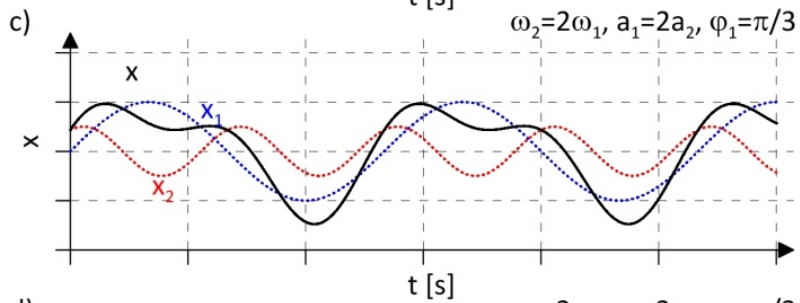
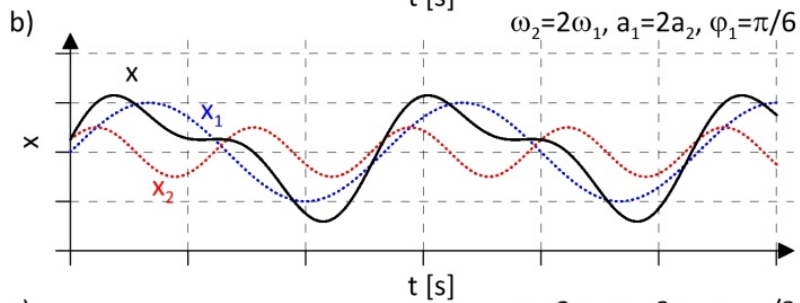
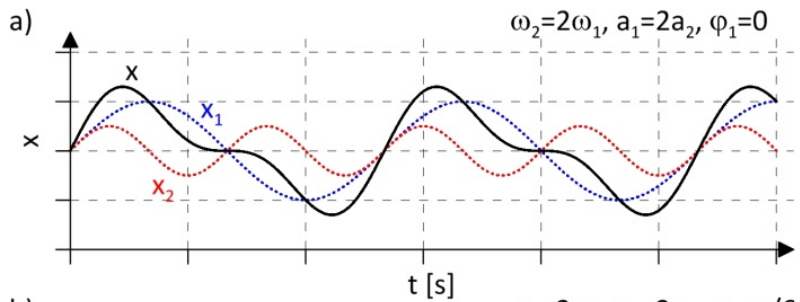
Rys. 11.

Przypadek 3. Suma drgań, których stosunek częstości jest niewielką liczbą naturalną.

Taki przypadek można opisać równaniem (19), w którym $\omega_2 = i\omega_1$, czyli

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) + a_2 \sin(i\omega_1 t + \gamma_2) \quad (26)$$

gdzie $i = \omega_2/\omega_1$ jest niewielką liczbą naturalną. Drganie składowe x_2 jest przesunięte względem drgania x_1 o γ_2 . W zależności od stosunku amplitud, częstości i przesunięcia fazowego, drganie wypadkowe x może przyjmować najróżniejsze formy. Przykładowe wykresy przedstawione na rys. 12 sporządzono przy założeniu, że $i = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2$, $\frac{a_1}{a_2} = 2$, a kąt przesunięcia fazowego γ_2 wynosi kolejno $\gamma_2 = 0$ (rys. 12a), $\gamma_2 = \pi/6$ (rys. 12b), $\gamma_2 = \pi/3$ (rys. 12c), $\gamma_2 = \pi/2$ (rys. 12d).



Rys. 12.

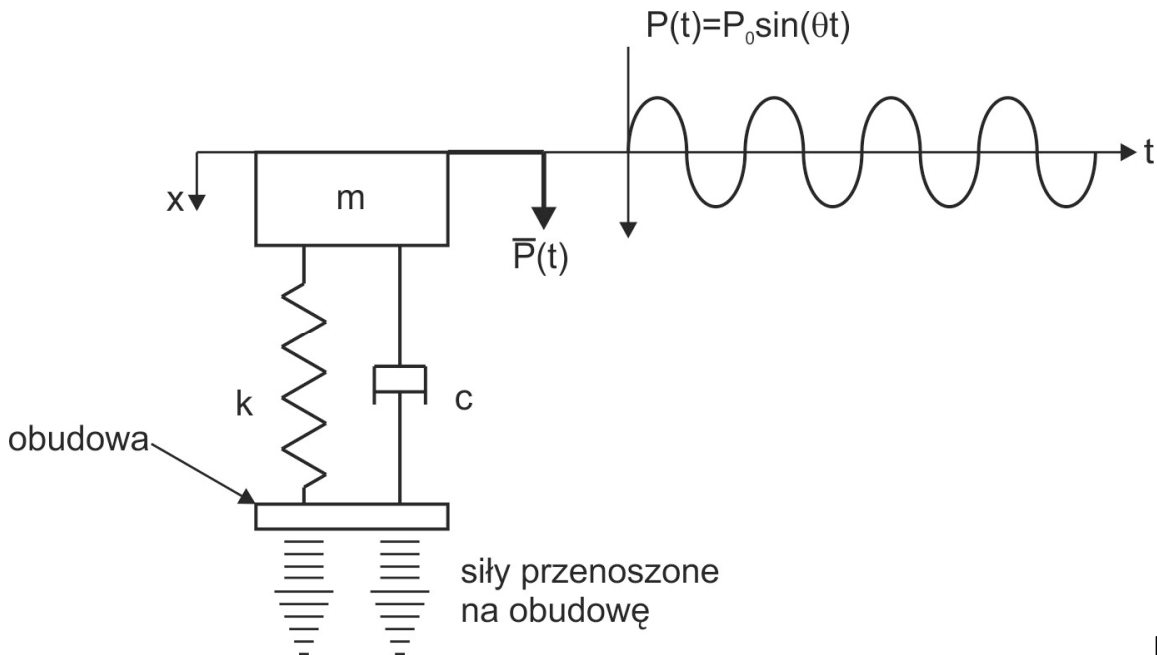
Przedstawione w tym punkcie wybrane zależności matematyczne stosowane do opisu ruchu drgającego, w szczególności ruchu okresowego i harmonicznego zostaną wykorzystane w kolejnych rozdziałach dotyczących dynamiki ruchu drgającego.

2.2. Rodzaje wymuszeń: harmoniczne, skokowe, udarowe

Niektóre wymuszenia powodujące drgania mechaniczne można opisać typowymi funkcjami matematycznymi. Niejednokrotnie jest to opis przybliżony, którego zastosowanie ułatwia analizę zjawisk. Poniżej zaprezentowano najczęściej stosowane funkcje opisujące wymuszenia harmoniczne, skokowe i udarowe.

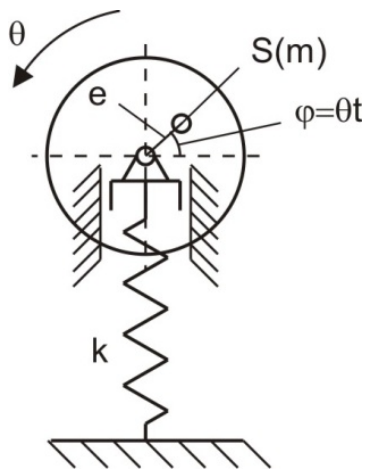
a) wymuszenie harmoniczne

- siła harmoniczna działająca na masę m , wymuszenie siłowe jest opisane funkcją $P(t) = P_0 \sin(\theta t)$, gdzie P_0 to amplituda wymuszenia, θ to częstość wymuszenia,



Rys. 13.

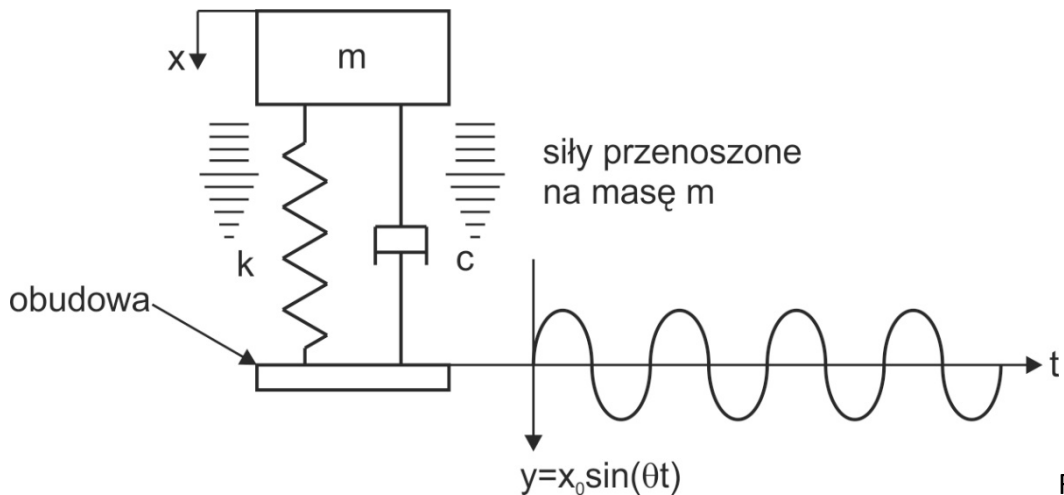
Przykładem układu z harmonicznym wymuszeniem siłowym może być wirująca niewyważona bryła. Jeżeli w układzie występuje bryła obracająca się wokół nieruchomej osi z prędkością kątową θ , a środek masy bryły nie leży na osi obrotu, to wówczas gdy $\theta = \text{const.}$ to kąt obrotu $\varphi = \theta t$. Środek masy jest przesunięty od osi obrotu o wartość e (e – to tzw. mimośród).



Występuje wówczas fikcyjna siła $\bar{B}_n = -m\bar{a}_n$ pochodząca od przyspieszenia normalnego masy o wartości $B_n = -m\theta^2 e$. Rzut tej siły na średnicę daje siłę harmonicznie zmienną $P(t) = B_n \cos(\theta t)$ lub $P(t) = B_n \sin(\theta t)$. Taką siłę nazywamy wymuszeniem ruchu drgającego. Aby takie wymuszenie nie występowało, konieczne jest doprowadzenie układu do tego, aby $e = 0$. Wówczas środek masy leży na osi obrotu i mówimy, że bryła jest wyważona statycznie.

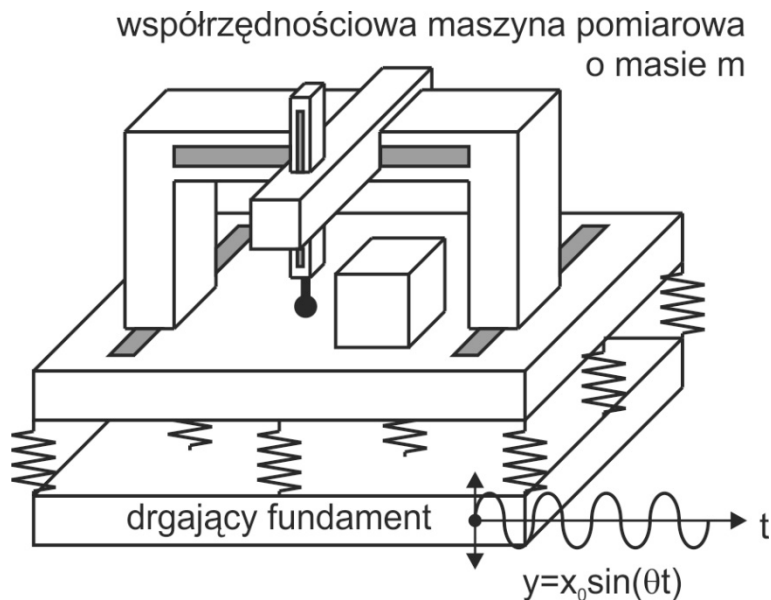
Rys. 14.

- przemieszczenie obudowy, wymuszenie kinematyczne jest opisane funkcją $y = x_0 \sin(\theta t)$, gdzie x_0 to amplituda wymuszenia, θ to częstość wymuszenia,



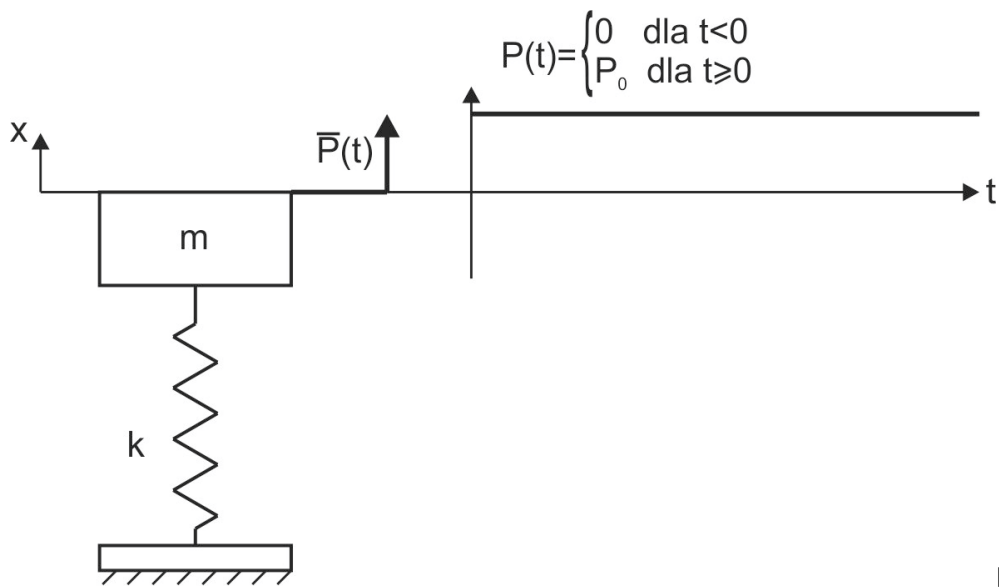
Rys. 15.

Przykładem harmonicznego wymuszenia kinematycznego działającego na masę mogą być drgania fundamentu, na których posadowione jest urządzenie, np. współrzędnościowa maszyna pomiarowa.



W przypadku takich maszyn, służących do precyzyjnych pomiarów, drgania fundamentu maszyny są szczególnie niepożądane. Mogą być one generowane przez inne maszyny np. przez obrabiarki. Dlatego istotnym aspektem jest izolacja maszyny od drgań fundamentu, co będzie tematem analiz w dalszej części skryptu.

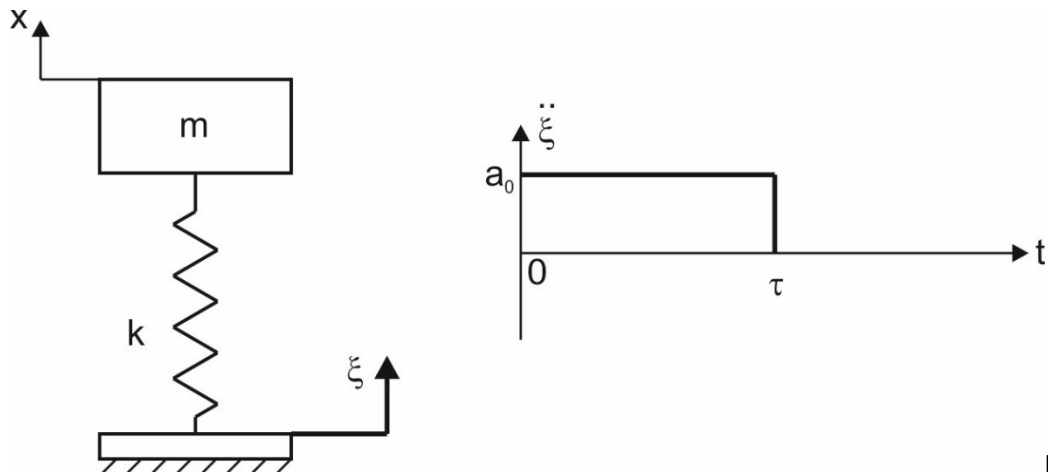
b) wymuszenie skokowe, wymuszenie jest opisane zależnością $P = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ P_0 & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$
 gdzie P_0 to wartość skoku wymuszenia



Rys. 17.

Wymuszenie skokowe polega na gwałtownej zmianie siły działającej na konstrukcję. Przykładem może być gwałtowne obciążenie konstrukcji stałym ciężarem. Innym przykładem wymuszenia skokowego jest gwałtowne odciążenie dźwigu podnoszącego ładunek w przypadku zerwania liny.

c) wymuszenie udarowe (chwilowe oddziaływanie na obiekt), np. podstawa doznaje przyspieszenia o stałej wartości $\ddot{\xi} = a_0$ przez krótki czas τ .

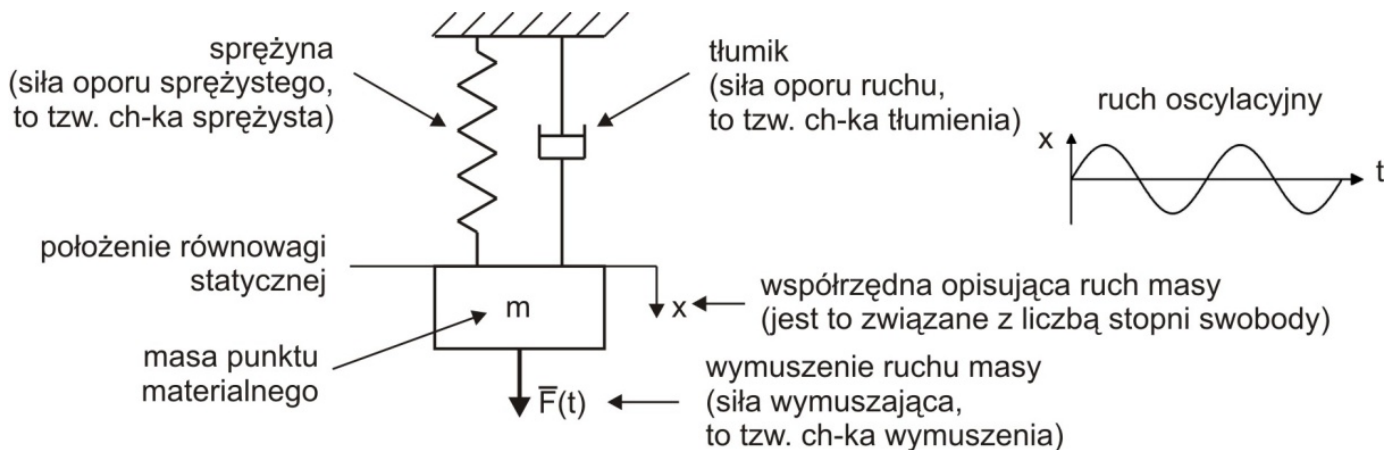


Rys. 18.

Wymuszenia udarowe występują m.in. podczas wystrzałów z broni palnej oraz zderzeń.

2.3. Podstawy modelowania układów drgających

Mechanika klasyczna zakłada, że ciała są nieodkształcalne. Wiadomo jednak, że w rzeczywistości ciała ulegają deformacjom. Odkształcenia ciał materialnych stałych są małe, często niewidoczne gołym okiem. Jeżeli chcemy analizować to wszystko o czym mówi mechanika uwzględniając deformację ciał stałych, to trzeba zbudować model tego ciała tak dobrany, aby deformacje były możliwe. Najczęściej przyjmuje się tzw. modele dyskretne. Najprostszym modelem dyskretnym ciała jest układ o 1 stopniu swobody.



Rys. 19.

W mechanice opisując ruch masy wprowadza się wszystkie działające na nią siły. W przedstawionym układzie występują: siła reakcji sprężyny, siła reakcji tłumika i siła wymuszająca ruch.

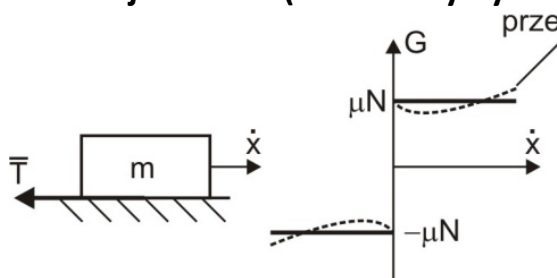
Siła reakcji sprężyny (charakterystyka sprężysta)



$S = kx$ [N] - siła reakcji sprężyny
(taki przebieg najczęściej przyjmujemy),
 k [N/m] - tzw. współczynnik sprężystości sprężyny,
który wyznacza się doświadczalnie,
 x [m] - mała deformacja sprężyny

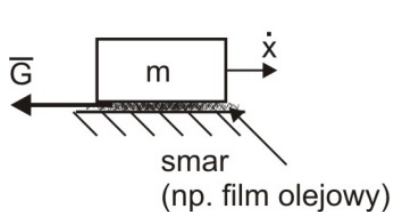
Rys. 20.

Siła reakcji tłumika (charakterystyka tłumienia)



$G = T = \mu N$ [N] - tak najczęściej określamy siłę tarcia suchego, jako stałą wartość
 μ [-] współczynnik tarcia suchego, który wyznacza się doświadczalnie,
 N [N] - siła nacisku

Rys. 21.



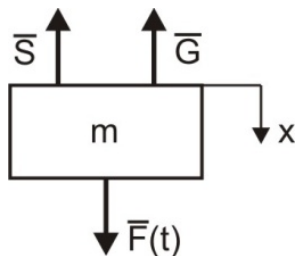
$G = c\dot{x}$ [N] - siła oporu tłumika (siła tarcia, które tu nazywamy tarcie płynnym lub wiskotycznym),
 c [Ns/m] - tzw. współczynnik tarcia wiskotycznego, który wyznacza się doświadczalnie,
 \dot{x} [m/s] - prędkość masy

Rys. 22.

Siła wymuszająca ruch (charakterystyka wymuszenia)

Siła wymuszająca ruch $\bar{F}(t)$ może mieć jedną z form przedstawionych wcześniej w punkcie „Rodzaje wymuszeń”. W analizach najczęściej przyjmowana jest siła harmonicznie zmienna, bo taka jest najbardziej niebezpieczna dla układu – występuje wówczas zmęczenie materiału.

Wprowadzając na rysunek siły działające na masę w ruchu oscylacyjnym, rozważamy następujący układ sił



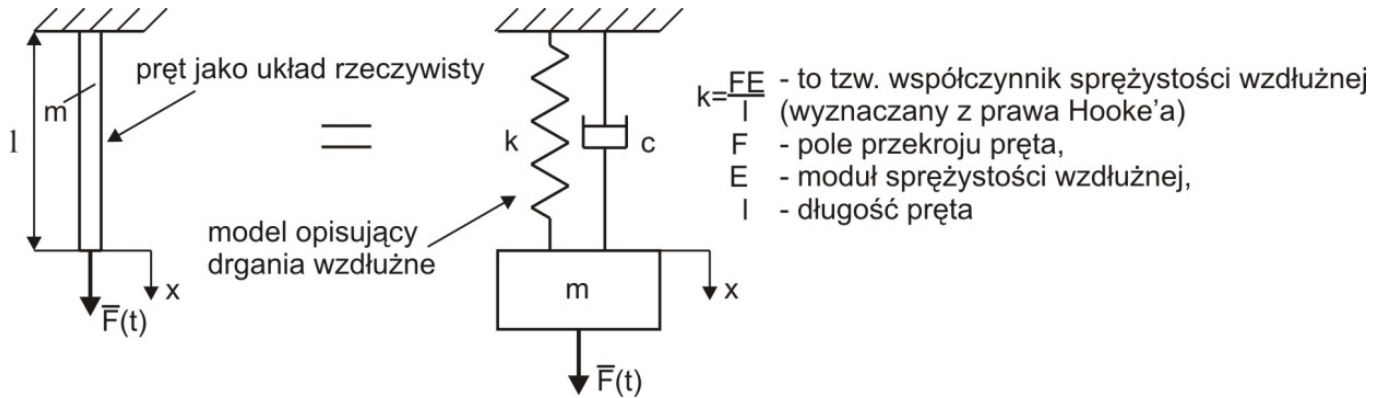
Rys. 23.

gdzie \bar{S} to siła reakcji sprężyny mający zwrot przeciwny do deformacji sprężyny, \bar{G} to siła reakcji tłumika mający zwrot przeciwny do prędkości deformacji tłumika. Różniczkowe równanie ruchu opisujące ruch masy to

$$m\ddot{x} = F(t) - G - S$$

Przedstawiony model można stosować w następujących przypadkach:

1. Drgania wzdłużne pręta.



Rys. 24.

Równanie opisujące ruch masy ma postać

$$m\ddot{x} = F(t) - G - S$$

gdzie

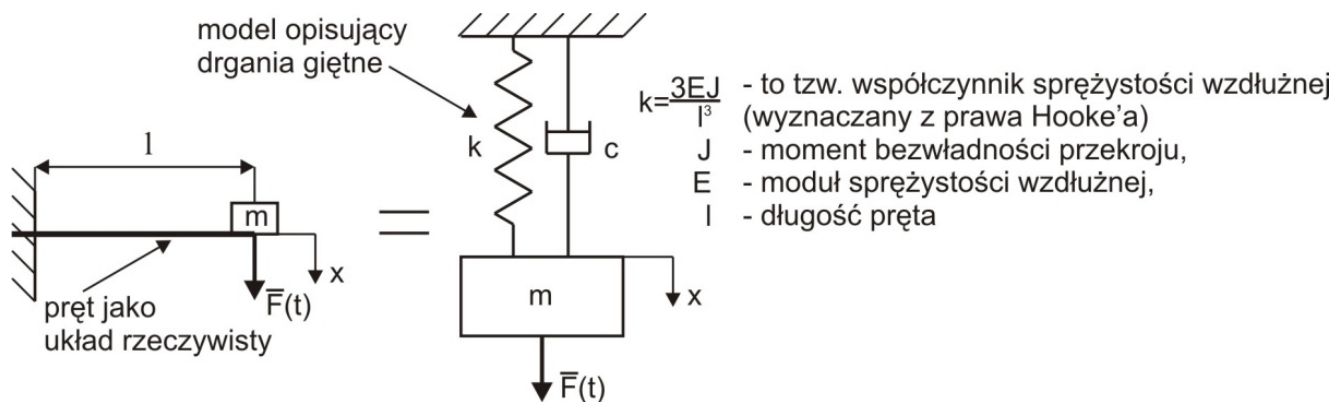
m – masa pręta,

$G = c\dot{x}$ – siła pochodząca od oporu wewnętrznego (modelowanego jako opór wiskotyczny),

$S = kx$ - siła oporu sprężystego,

x – deformacja pręta.

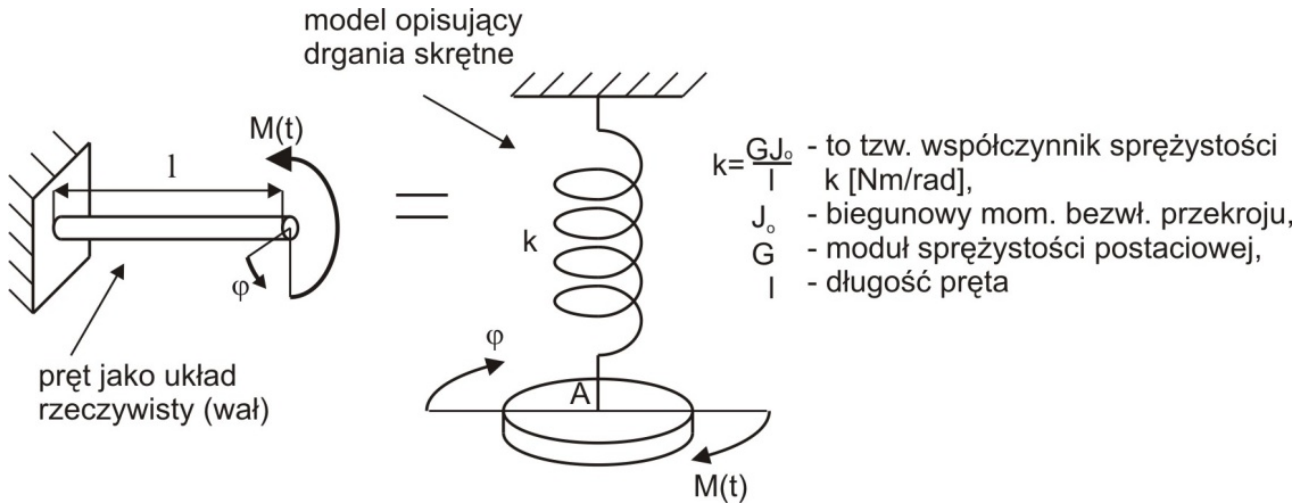
2. Drgania giętne belki wspornikowej.



Rys. 25.

Sposób budowy modelu dla belki wspornikowej jest nieco bardziej skomplikowany niż w przypadku pręta

3. Drgania skrętne wału.



Rys. 26.

Równanie opisujące ruch krążka ma postać

$$I_A \ddot{\varphi} = M(t) - M_G - M_S$$

gdzie

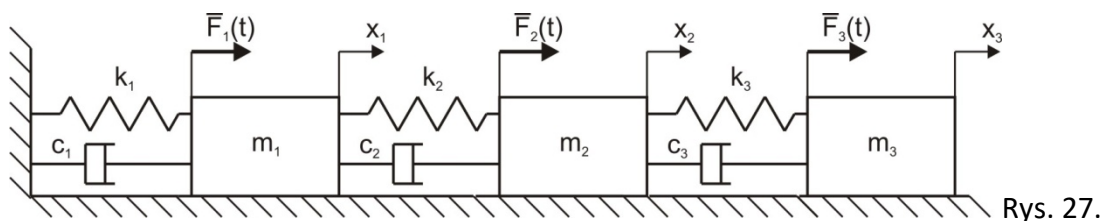
I_A - masowy moment bezwładności określony względem punktu A,

$M_G = c\dot{\varphi}$ - moment pochodzący od oporu wiskotycznego,

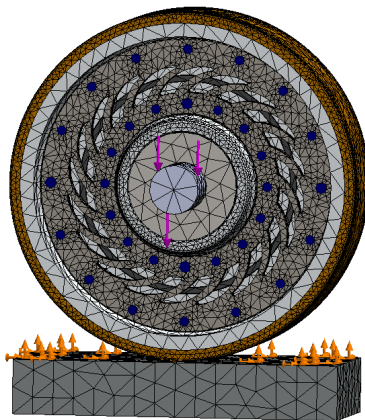
$M_S = k\varphi$ - moment pochodzący od oporu sprężystego,

φ - kąt obrotu krążka.

Przedstawiony model można rozbudować i uzyskać model o wielu stopniach swobody



Jeżeli układ dyskretny ma dużą liczbę stopni swobody to zbliża się do układu rzeczywistego, który ma nieskończenie wiele stopni swobody. Analiza takich układów jest skomplikowana matematycznie, często wykorzystuje się w niej metody komputerowe, np. MES – metoda elementów skończonych (ang. FEM – Finite Element Method).



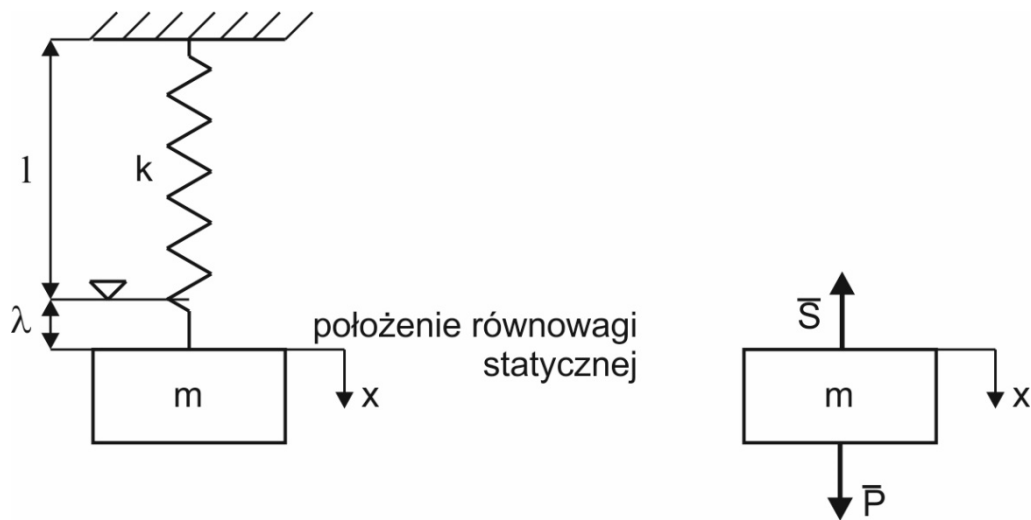
Rys. 28.

3. Drgania układu o jednym stopniu swobody

3.1. Położenie równowagi statycznej

W informacjach wstępnych na temat drgań mechanicznych powiedzieliśmy, że są one małymi oscylacjami względem położenia równowagi statycznej. Istotnym zagadnieniem jest więc określenie tego położenia, względem którego opisywane są drgania. Wynika ono z równowagi pomiędzy siłami ciężkości mas a siłami reakcji sprężystych. Wszystkie te siły są siłami pól potencjalnych, zatem szukanie położenia równowagi statycznej jest zagadnieniem związanym z równowagą układu w polu potencjalnym.

Jako przykład służący wyjaśnieniu tego zagadnienia, weźmy układ pokazany na rys. 1, składający się z ciała o masie m i sprężyny o współczynniku sprężystości k . W stanie swobodnym, tzn. bez obciążenia masą, długość sprężyny wynosi l . Pod wpływem obciążenia przez masę, długość sprężyny zmienia się o λ , którą nazywamy deformacją statyczną sprężyny. W tym położeniu siła ciężkości masy \bar{P} jest równoważona przez reakcję sprężyny \bar{S} i jest to położenie równowagi statycznej. W przypadku zaburzenia równowagi ciało o masie m będzie wykonywać ruch względem tego położenia, opisany przez przemieszczenie x .



Rys. 1.

Położenie równowagi statycznej, określone przez λ , może być znalezione z zastosowaniem kryterium Lagrange'a – Dirichleta. W tym celu należy określić potencjał układu

$$V = V_1 + V_2 \tag{1}$$

gdzie V_1 to potencjał sił sprężystych, V_2 to potencjał mas w polu ziemskim. Z mechaniki ogólnej znana jest zależność pomiędzy potencjałem V a siłą pola potencjalnego F_x :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -F_x \quad (2)$$

gdzie F_x to rzut siły pola potencjalnego na kierunek x . W tym przypadku interesuje nas zależność pomiędzy potencjałem sił sprężystych V_1 a siłą reakcji sprężyny \bar{S} . Siła ta jest skierowana przeciwnie do przemieszczenia x , zatem $F_x = -S$, i na podstawie równania (2) zapiszemy

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = S \quad (3)$$

Wartość siły reakcji sprężyny to

$$S = k\Delta \quad (4)$$

gdzie $\Delta = \lambda + x$ to całkowita deformacja sprężyny, λ to statyczna deformacja sprężyny, x to deformacja sprężyny wynikająca z ruchu wokół położenia równowagi statycznej. Uwzględniając wartość reakcji sprężyny zapiszemy

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = k(\lambda + x) \quad (5)$$

a następnie rozdzielimy zmienne w równaniu (5) otrzymując

$$\partial V_1 = k(\lambda + x) \partial x \quad (6)$$

Całkując obustronnie wyrażenie (6) otrzymamy

$$\int_0^{V_1} \partial V_1 = \int_{-\lambda}^x k(\lambda + x) \partial x \quad (7)$$

$$V_1 \Big|_0^{V_1} = k\lambda x + \frac{1}{2} kx^2 \Big|_{-\lambda}^x \quad (8)$$

$$V_1 = k\lambda x + \frac{1}{2} kx^2 + k\lambda^2 - \frac{1}{2} k\lambda^2 = k\lambda x + \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} k\lambda^2 = \frac{1}{2} k(x + \lambda)^2 \quad (9)$$

Podobnie, na podstawie równania (2), wyznaczmy potencjał masy w polu ziemskim, uwzględniając, że w tym przypadku mamy $F_x = P$:

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = -P \quad (10)$$

Uwzględniając wartość siły ciężkości

$$P = mg \quad (11)$$

otrzymamy

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = -mg \quad (12)$$

i następnie rozdzielając zmienne w równaniu (12) zapiszemy

$$\partial V_2 = -mg\partial x \quad (13)$$

Całkując obustronnie wyrażenie (13) otrzymamy

$$\int_0^{V_2} \partial V_2 = - \int_{-\lambda}^x mg\partial x \quad (14)$$

$$V_2|_0^{V_2} = -mgx|_{-\lambda}^x \quad (15)$$

$$V_2 = -mg(x + \lambda) \quad (16)$$

Całkowity potencjał układu wynosi

$$V = \frac{1}{2}k(x + \lambda)^2 - mg(x + \lambda) \quad (17)$$

i jest on funkcją zmiennej x , co zapisujemy ogólnie $V = V(x)$. W celu wyznaczenia położenia równowagi statycznej stosujemy **Tw. Dirichleta**:

W polu potencjalnym punkt, w którym potencjał osiąga minimum jest położeniem równowagi stałej.

Szukamy zatem minimum potencjału $V(x)$ wykorzystując znane z matematyki postępowanie określania minimum funkcji. Przy pewnych założeniach funkcja osiąga ekstremum w danym punkcie jeśli jej pierwsza pochodna jest równa zero w tym punkcie,

a druga pochodna jest w tym punkcie dodatnia. W naszym przypadku tą funkcją jest potencjał $V(x)$. Pochodna potencjału po współrzędnej x to

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k(x + \lambda) - mg \quad (18)$$

Potencjał jest minimalny w stanie równowagi statycznej czyli wtedy gdy $x = 0$, zatem jego pierwsza pochodna względem x jest równa zero

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (19)$$

Z równań (18) i (19) wynika, że

$$k\lambda - mg = 0 \quad (20)$$

Zatem deformacja statyczna jest wyrażona wzorem

$$\lambda = \frac{mg}{k} \quad (21)$$

Należy jeszcze sprawdzić, czy rzeczywiście w wyznaczonych warunkach potencjał osiąga minimum, tzn. czy jego druga pochodna względem x jest dodatnia

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{x=0} > 0 \quad (22)$$

Z obliczeń wynika, że

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = k \quad (23)$$

czyli znak drugiej pochodnej potencjału względem x jest dodatni bo $k > 0$ i rzeczywiście w położeniu równowagi statycznej potencjał osiąga wartość minimalną.

Deformacja statyczna λ określa poszukiwane położenie masy w stanie równowagi statycznej.

Deformację statyczną sprężyny można również określić na podstawie analizy równowagi sił pola potencjalnego. Wiedząc, że w stanie równowagi statycznej siły ciężkości masy są równoważone przez siły reakcji sprężyn, można dla rozważanego przypadku zapisać równanie

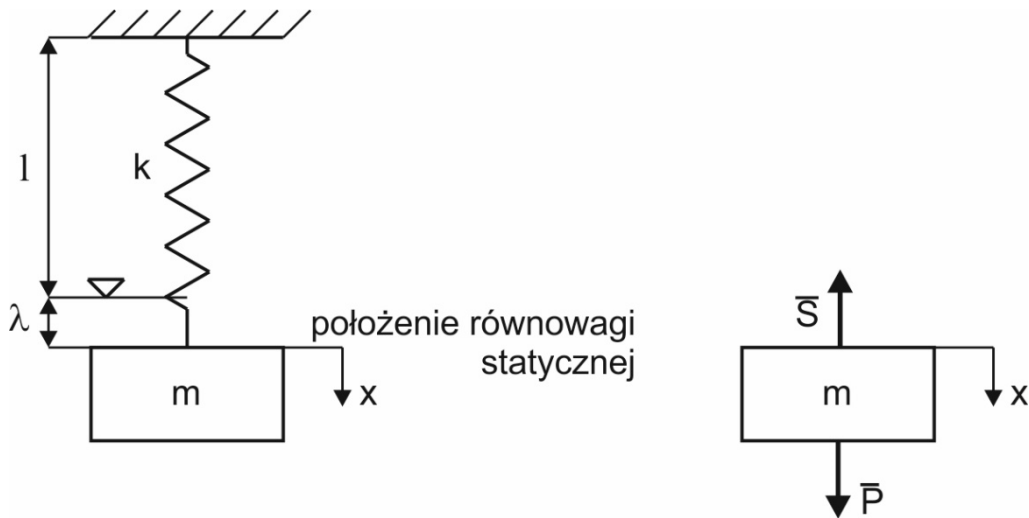
$$S - P = 0 \quad (24)$$

Uwzględniając wartość reakcji sprężyny w stanie wstępnego napięcia $S = k\lambda$ i wartość siły ciężkości $P = mg$, uzyskamy na podstawie równania (24) zapis równoważny z równaniem (20), z którego wynika, że $\lambda = \frac{mg}{k}$.

Przedstawiony przykład dotyczy wyznaczania położenia równowagi statycznej prostego układu składającego się z jednej masy i jednej sprężyny. Przedstawioną metodologię można również zastosować w przypadku złożonych układów.

3.2. Drgania swobodne

Nazwa „drżania swobodne” oznacza ruchy oscylacyjne układu, które nie są podtrzymywane żadną siłą wymuszającą. Wiadomo jednak, że każdy ruch musi mieć jakąś przyczynę. W przypadku drżan swobodnych jest nią początkowe wychylenie masy z położenia równowagi statycznej, prędkość początkowa, albo suma obydwóch tych zjawisk. W celu analizy drżan swobodnych przyjmujemy model przedstawiony na rysunku, składający się z ciała i sprężyny. Zakładamy, że masa sprężyny jest pomijalnie mała i jej jedyną cechą jest sprężystość. Z kolei w odniesieniu do ciała zakładamy, że ma ono masę m i nieskończenie dużą sztywność, czyli jest nieodkształcalne.



Rys. 2.

Dynamiczne równanie ruchu masy ma postać:

$$m\ddot{x} = -S + P \quad (25)$$

gdzie

P to siła ciężkości masy,

$S = k\Delta$ to siła reakcji sprężyny,

$\Delta = \lambda + x$, Δ to całkowita deformacja sprężyny, λ to statyczna deformacja sprężyny,

x to deformacja sprężyny wynikająca z ruchu wokół położenia równowagi statycznej.

Uwzględniając powyższe zapisy, równanie ruchu zapisano jako

$$m\ddot{x} = -k\lambda - kx + P \quad (26)$$

Z równowagi statycznej ($x = 0$, $\ddot{x} = 0$) wynika, że

$$-k\lambda + P \rightarrow \lambda = \frac{P}{k} \quad (27)$$

wobec tego

$$m\ddot{x} = -kx \quad (28)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (29)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (30)$$

gdzie $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ [$\frac{rad}{s}$] to częstość drgań swobodnych. Rozwiązaniem równania (30) jest

$$x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \quad (31)$$

$$\dot{x} = -C_1 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + C_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t) \quad (32)$$

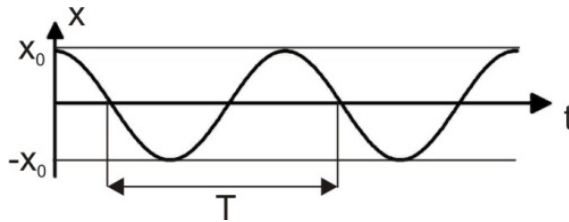
gdzie C_1 i C_2 to stałe całkowania, które wyznaczymy z równań (31) i (32) wykorzystując warunki początkowe, tzn. dla $t = t_0 = 0$ [s]

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases} \quad (33)$$

Z równań (31) i (32) otrzymamy $C_1 = x_0$, $C_2 = 0$. Ostatecznie ruch masy opisuje równanie

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t) \quad (34)$$

gdzie x_0 to amplituda drgań swobodnych. Przebieg rozwiązania przedstawiono na wykresie, gdzie zaznaczono to okres ruchu $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$



Rys. 3.

Jeżeli warunki początkowe będą zerowe, tzn. dla $t = t_0 = 0$ [s]

$$\begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases} \quad (35)$$

to układ jest w stanie równowagi statycznej. Jeżeli natomiast warunki początkowe będą takie, że dla $t = t_0 = 0$ [s]

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = v_0 \end{cases} \quad (36)$$

to wówczas $C_1 = x_0$, $C_2 = \frac{v_0}{\omega_0}$ i równanie (31) można zapisać jako

$$x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (37)$$

gdzie

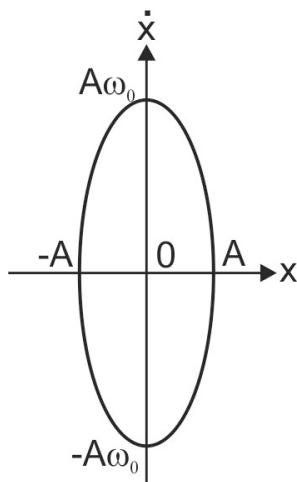
$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} = \sqrt{x_0^2 + v_0^2 \frac{m}{k}} \text{ to amplituda drgań,}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{C_1}{C_2} = \frac{x_0 \omega_0}{v_0} = \frac{x_0}{v_0} \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ określa kąt przesunięcia fazowego.}$$

Prędkość masy opisuje równanie

$$\dot{x} = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (38)$$

Ruch masy można odwzorować także na tzw. płaszczyźnie fazowej. Charakterystyką fazową nazywamy wykres, na którego osiach przedstawia się funkcję i jej pochodną, czyli $\dot{x}(x)$. Na rys. 3. przedstawiono charakterystykę fazową układu wykonującego drgania swobodne. W przypadku takich drgań trajektoria fazowa jest krzywą zamkniętą, gdyż w kolejnych okresach ruchu amplitudy przemieszczenia i prędkości nie zmieniają się. Wynika to z faktu, że energia mechaniczna układu jest stała (energia nie jest dostarczana do układu ani nie jest tracona). Mówimy, że układ jest na **cyklu granicznym**.



Rys. 4.

Z pokazanego przebiegu wynika, że gdy $x = \pm max$ to $\dot{x} = 0$ oraz gdy $\dot{x} = \pm max$ to $x = 0$. Pole powierzchni wyznaczone przez trajektorię fazową jest miarą energii mechanicznej układu. Wynika z tego, że im większe maksymalne przemieszczenie i prędkość drgań, tym większa energia mechaniczna układu.

Metoda energetyczna wyznaczania częstości drgań własnych układu

Jednym ze sposobów wyznaczenia częstości drgań własnych układu jest wykorzystanie zasady zachowania energii mechanicznej. Jest to metoda stosowana dla układów zachowawczych, tzn. takich, w których nie występują straty energii (nie występuje tłumienie – przypadek idealny).

Energia mechaniczna to

$$H = E + V \quad (39)$$

gdzie E to energia kinetyczna układu, V to potencjał układu. Z zasady zachowania energii mechanicznej wynika, że

$$E_{max} = V_{max} \quad (40)$$

Zatem należy wyznaczyć najpierw energię potencjalną i kinetyczną, a następnie ich maksymalne wartości.

Na podstawie równania (17) z punktu 7.1 zapisano potencjał układu (po uwzględnieniu deformacji statycznej (21))

$$V = \frac{1}{2}kx^2 \quad (41)$$

Potencjał zależy tylko od deformacji sprężyny wynikającej z ruchu układu względem położenia równowagi statycznej. Natomiast energia kinetyczna układu wynika z ruchu postępowego ciała o masie m

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (42)$$

Rozwiązanie równania drgań swobodnych (drgań układu zachowawczego) przewiduje się w postaci (37), czyli

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (43)$$

a prędkość drgań układu jest dana równaniem

$$\dot{x} = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (44)$$

gdzie A to amplituda drgań, ω_0 to częstość drgań własnych układu – wielkość którą chcemy wyznaczyć, φ to kąt przesunięcia fazowego. Wykorzystując równania (43) i (44) zapiszemy (41) i (42) w postaci

$$V = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) \quad (45)$$

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi) \quad (46)$$

Maksymalna wartość potencjału występuje gdy $\sin^2(.) = 1$, natomiast maksymalna wartość energii kinetycznej występuje gdy $\cos^2(.) = 1$. Zatem

$$V_{max} = \frac{1}{2}kA^2 \quad (47)$$

$$E_{max} = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \quad (48)$$

Porównując (47) i (48) na mocy równania (40) otrzymamy równanie

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \quad (49)$$

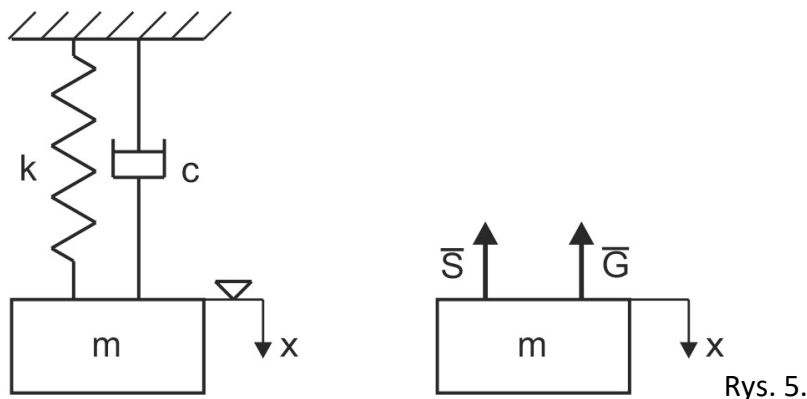
z którego wyznaczymy częstość drgań własnych jako

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (50)$$

3.3. Drgania tłumione

3.3.1. Równania ruchu

W rzeczywistości w układach zawsze występuje tłumienie, np. tzw. wewnętrzne (lub strukturalne związane z oporami przy mikroprzesunięciach kryształów materiału – to problem metaloznawstwa), dlatego amplituda drgań swobodnych maleje z czasem. Wówczas przyjmujemy model przedstawiony na poniższym rysunku



Rys. 5.

Dynamiczne równanie ruchu masy ma postać:

$$m\ddot{x} = -S - G \quad (51)$$

gdzie:

$S = kx$ to siła reakcji sprężyny,

$G = c\dot{x}$ to siła tłumienia wiskotycznego,

Uwzględniając powyższe zapisy, równanie ruchu zapisano jako

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (52)$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (53)$$

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (54)$$

gdzie

$2h = \frac{c}{m}$, h to tzw. współczynnik tłumienia jednostkowego,

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ to częstość drgań własnych. Rozwiązaniem równania (16) jest

Zgodnie z teorią równań różniczkowych, równanie (54) ma rozwiązania zależne od współczynników $2h$ i ω_0^2 . Można wyróżnić trzy przypadki:

- 1) $h^2 - \omega_0^2 < 0$ to przypadek tłumienia podkrytycznego („małego”)
- 2) $h^2 - \omega_0^2 = 0$ to przypadek tłumienia krytycznego
- 3) $h^2 - \omega_0^2 > 0$ to przypadek tłumienia nadkrytycznego („dużego”)

3.3.2. Tłumienie podkrytyczne

W przypadku tłumienia podkrytycznego rozwiązanie równania (54) ma formę:

$$x = e^{-ht}[C_1 \cos(\omega_t t) + C_2 \sin(\omega_t t)] \quad (55)$$

Część rozwiązania w nawiasie prostokątnym reprezentuje drgania harmoniczne z częstością

$$\omega_t = \sqrt{\omega_0^2 - h^2} \quad (56)$$

która jest nazywana częstością drgań tłumionych. Ze względu na to, że w rozważanym przypadku zachodzi zależność $h^2 - \omega_0^2 < 0$, to częstość drgań tłumionych jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Część rozwiązania o postaci e^{-ht} to funkcja asymptotycznie malejąca do zera gdy $t \rightarrow \infty$ i $h > 0$, lub eksponentalnie rosnąca do nieskończoności, gdy $t \rightarrow \infty$ i $h < 0$. Ten drugi przypadek, gdy tłumienie jest ujemne, reprezentuje niestabilne drgania układu – będzie on szczegółowo omówiony w dalszej części wykładu. Zajmiemy się teraz wyjaśnieniem przypadku tłumienia dodatniego, kiedy e^{-ht} dąży do zera. Wówczas iloczyn funkcji $C_1 \cos(\omega_t t) + C_2 \sin(\omega_t t)$ reprezentującej drgania harmoniczne i funkcji e^{-ht} malejącej asymptotycznie, daje drgania o stałej częstości ω_t i malejącej amplitudzie. Takie drgania nie są już drganiami harmonicznymi, ani nawet okresowymi. Aby wyznaczyć stałe całkowania C_1 i C_2 , zróżniczkujmy równanie (55) względem czasu

$$\dot{x} = -he^{-ht}[C_1 \cos(\omega_t t) + C_2 \sin(\omega_t t)] + e^{-ht}[-C_1 \omega_t \sin(\omega_t t) + C_2 \omega_t \cos(\omega_t t)] \quad (57)$$

Jeśli założymy warunki początkowe takie, że dla $t = t_0 = 0$ [s]

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = v_0 \end{cases} \quad (58)$$

to wówczas na podstawie równań (55) i (57) otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} x_0 = C_1 \\ v_0 = -hC_1 + C_2\omega_t \end{cases} \quad (59)$$

z którego wyznaczmy stałe całkowania

$$\begin{cases} C_1 = x_0 \\ C_2 = \frac{v_0 + hx_0}{\omega_t} \end{cases} \quad (60)$$

Rozwiązanie (55) będzie bardziej zrozumiałe, jeśli przedstawimy je w innej postaci, wykorzystując zasadę składania drgań harmonicznycych o tych samych częstościach ale przesuniętych w fazie o 90° (patrz równania (17) i (18) w punkcie 6.1.3. *Składanie drgań harmonicznycych*). Wynika z niej, że równanie (55) można przekształcić następująco

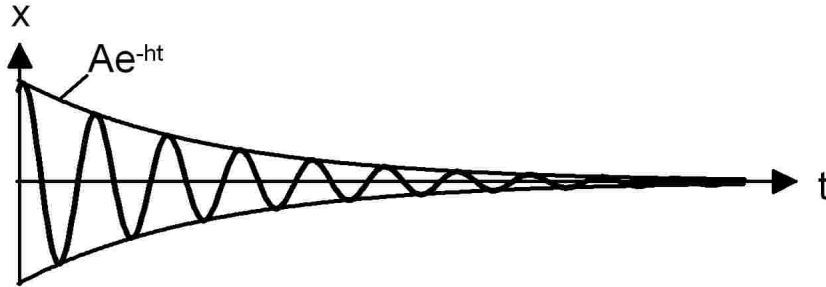
$$x = e^{-ht}[C_1 \cos(\omega_t t) + C_2 \sin(\omega_t t)] = Ae^{-ht} \sin(\omega_t t + \varphi) \quad (61)$$

gdzie

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + hx_0}{\omega_t}\right)^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + hx_0)^2}{\omega_0^2 - h^2}}$$
 to amplituda drgań,

$tg\varphi = \frac{C_1}{C_2} = \frac{x_0\omega_t}{v_0+hx_0} = \frac{x_0}{v_0+hx_0} \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$ określa kąt przesunięcia fazowego.

Można teraz powiedzieć, że funkcja (61) opisuje drgania, których obwiednią jest funkcja Ae^{-ht} , co przedstawiono na wykresie (rys. 6).



Rys. 6.

Prędkość masy opisuje równanie

$$\dot{x} = -Ahe^{-ht} \sin(\omega_t t + \varphi) + A\omega_t e^{-ht} \cos(\omega_t t + \varphi) \quad (62)$$

$$\dot{x} = Ae^{-ht} [\omega_t \cos(\omega_t t + \varphi) - h \sin(\omega_t t + \varphi)] \quad (63)$$

które można przekształcić do postaci

$$\dot{x} = Ae^{-ht} \sqrt{\omega_t^2 + h^2} \sin(\omega_t t + \varphi + \gamma) \quad (64)$$

gdzie

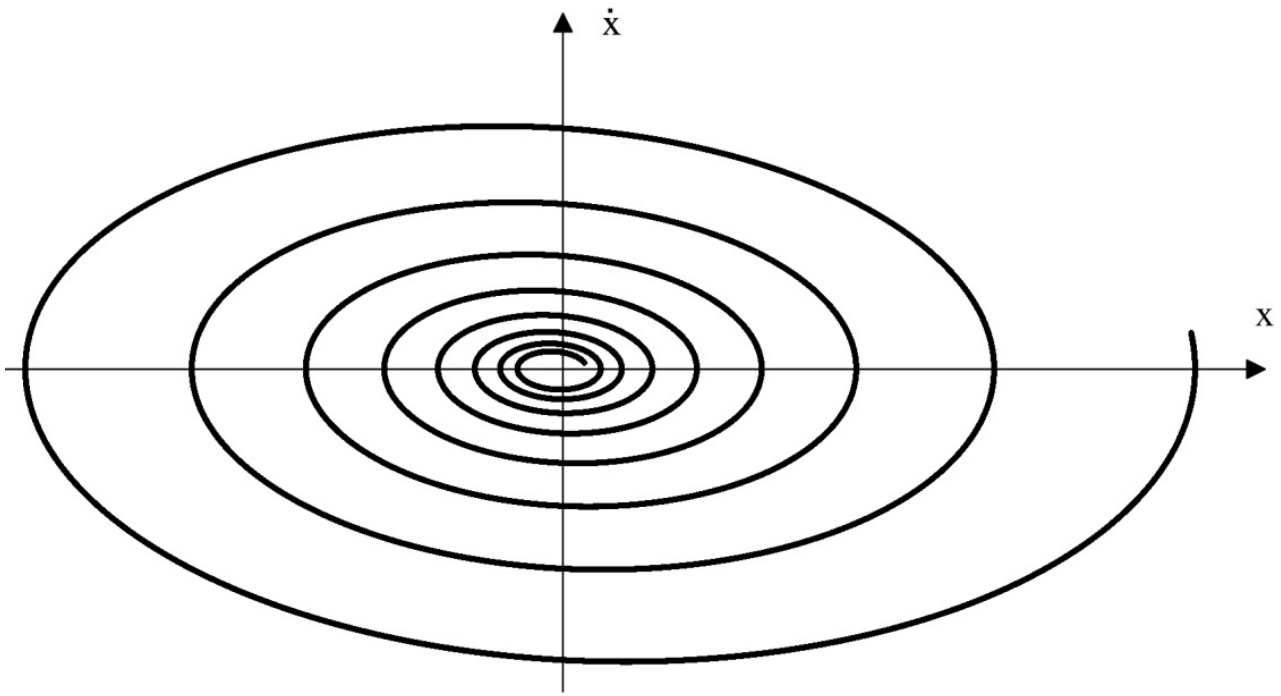
$tg\gamma = \frac{\omega_t}{-h} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}}{-h}$ określa kąt przesunięcia fazowego. Wykorzystując wzór (56) można w następujący sposób przekształcić wyrażenie $\sqrt{\omega_t^2 + h^2}$

$$\sqrt{\omega_t^2 + h^2} = \sqrt{\omega_0^2 - h^2 + h^2} = \omega_0 \quad (65)$$

i ostatecznie prędkość masy opisać równaniem

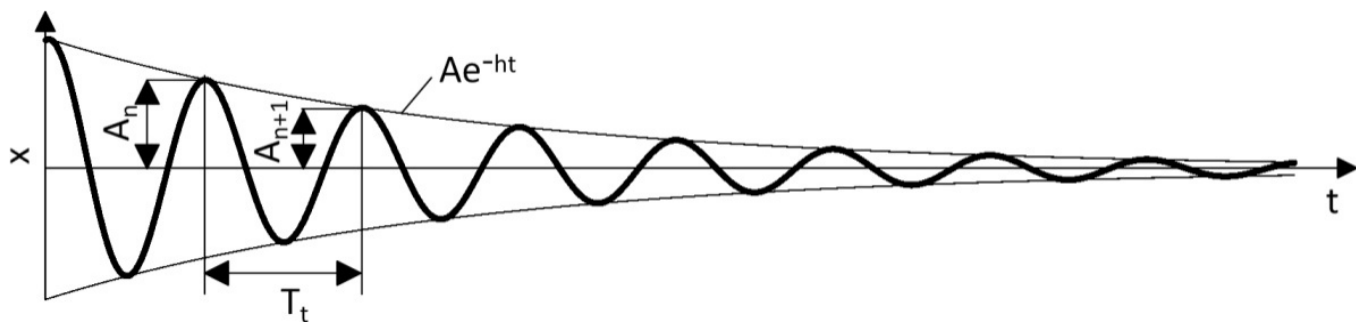
$$\dot{x} = A\omega_0 e^{-ht} \sin(\omega_t t + \varphi + \gamma) \quad (66)$$

Ruch masy można odwzorować także na tzw. płaszczyźnie fazowej. W rozważanym przypadku, w wyniku dodatniego tłumienia charakterystyka zmierza do zera. Wniosujemy z tego, że energia mechaniczna układu zmniejsza się i układ jest stabilny.



Rys. 7.

W celu określenia właściwości drgań tłumionych przeanalizujemy szczegółowo rozwiązanie (61) z zastosowaniem wykresu (Rys. 8).



Rys. 8.

Zaznaczono na nim dwie kolejne wartości przemieszczenia A_n i A_{n+1} odległe od siebie w czasie o wartość $T_t = \frac{2\pi}{\omega_t}$. Wielkość T_t nie jest okresem drgań tłumionych, ponieważ drgania te nie są okresowe. Jest ona pseudookresem, który tylko potocznie jest nazywany okresem drgań tłumionych z tego względu, że określa odległość w czasie pomiędzy „ekstremalnymi” położeniami masy A_n i A_{n+1} nazywanymi – również potocznie – amplitudami. Mówimy zatem w uproszczeniu o dwóch kolejnych amplitudach A_n i A_{n+1} i okresie drgań tłumionych T_t .

Stosunek dwóch kolejnych amplitud jest związany zależnością

$$e^{hT_t} = \frac{A_n}{A_{n+1}} \quad (67)$$

gdzie wykładnik funkcji eksponentialnej nazywany jest logarytmicznym dekrementem tłumienia $D = hT_t$. Jest on miarą spadku amplitudy drgań w czasie jednego okresu.

Z zależności (67) z uwzględnieniem $D = hT_t$

$$e^D = \frac{A_n}{A_{n+1}} \quad (68)$$

wynika, że spadek drgań jest eksponentialny jeśli stosunek amplitud jest przedstawiony w skali liniowej, co widać na rys. 8 – obwiednia drgań ma kształt funkcji eksponentialnej. Spadek drgań ma jednocześnie charakter liniowy jeśli stosunek amplitud jest przedstawiony w skali logarytmicznej

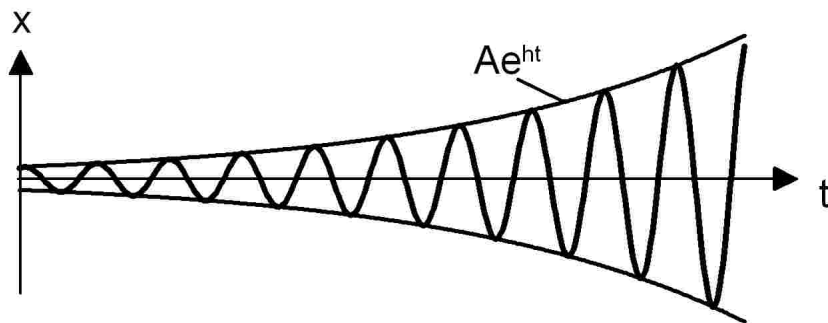
$$D = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} \quad (69)$$

Gdy przedstawi się przebieg drgań tłumionych w taki sposób, że oś wartości x jest logarytmiczna, wówczas obwiednia drgań jest funkcją liniową.

W technice występują również takie układy, w których tłumienie może być ujemne. Szczegółowe omówienie takich przypadków pozostawiamy na dalszą część wykładu. Tutaj wystarczy podać, że w takim przypadku ruch takiego układu opisuje równanie w postaci

$$x = e^{ht} [C_1 \cos(\omega_t t) + C_2 \sin(\omega_t t)] = A e^{ht} \sin(\omega_t t + \varphi) \quad (70)$$

a przebieg tego rozwiązania to oscylacje o rosnącej amplitudzie, co pokazano poniżej na rys. 9.



Rys. 9.

Pokazany przebieg drgań charakteryzuje tzw. drgania samowzbudne - w tym przypadku układ jest niestateczny. Układy samowzbudne to na przykład, takie, w których występuje tarcie suche, a prędkość ślizgania jest mała - np. skrzypce i smyczek, zawiasy w drzwiach. Innym przykładem drgań samowzbudnych występujących np. w konstrukcjach lotniczych to tzw. flutter skrzydła.

3.3.3. Tłumienie krytyczne

W przypadku tłumienia krytycznego ($h^2 - \omega_0^2 = 0$) rozwiązanie równania (54) ma formę:

$$x = e^{-ht}(C_1 + C_2t) \quad (71)$$

Prędkość masy opisuje równanie

$$\dot{x} = -he^{-ht}(C_1 + C_2t) + C_2e^{-ht} = e^{-ht}[C_2 - (C_1 + C_2t)h] \quad (72)$$

Jeśli założymy warunki początkowe takie, że dla $t = t_0 = 0$ [s]

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = v_0 \end{cases} \quad (73)$$

to wówczas na podstawie równań (71) i (72) otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} x_0 = C_1 \\ v_0 = C_2 - C_1h \end{cases} \quad (74)$$

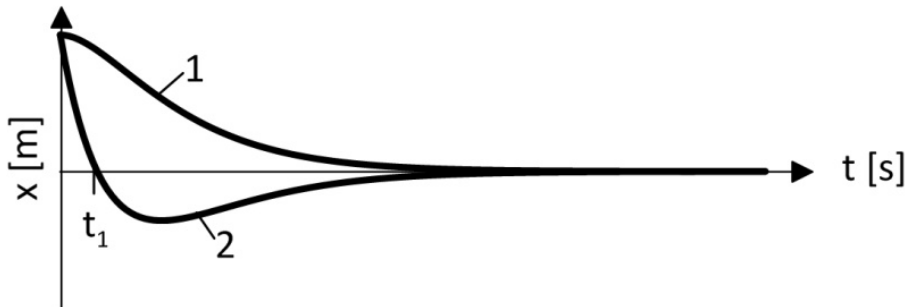
z którego wyznaczymy stałe całkowania

$$\begin{cases} C_1 = x_0 \\ C_2 = v_0 + x_0h \end{cases} \quad (75)$$

Ostatecznie rozwiązanie opisujące ruch masy ma formę

$$x = e^{-ht}[x_0 + (v_0 + x_0 h)t] \quad (76)$$

Jak wynika z rozwiązania (76) w przypadku tłumienia krytycznego nie występują oscylacje masy. W zależności od warunków początkowych dla danego tłumienia h rozwiązanie może przebiegać zgodnie z jednym z dwóch przypadków przedstawionych na wykresie.



Rys. 10.

W pierwszym przypadku (1) masa asymptotycznie zmierza do położenia równowagi nie przechodząc przez położenie równowagi statycznej, natomiast w drugim przypadku (2) występuje jednokrotne przejście masy przez to położenie i asymptotyczna zbieżność masy do położenia równowagi. To, który z przypadków będzie zachodził, można wyznaczyć analizując rozwiązanie (76). Jeśli wystąpi przejście masy przez położenie równowagi statycznej, to dla czasu $\infty > t = t_1 > 0$ będzie $x = 0$. Wówczas na podstawie drugiego członu rozwiązania (76) mamy

$$x_0 + (v_0 + x_0 h)t_1 = 0 \rightarrow t_1 = -\frac{x_0}{(v_0 + x_0 h)} \quad (77)$$

Jeśli zachodzi taka kombinacja warunków początkowych, dla których istnieje dodatnia skończona wartość t_1 , wówczas występuje jednokrotne przejście masy przez położenie równowagi. Człon rozwiązania e^{-ht} nie jest tutaj brany pod uwagę, ponieważ wynika z niego, że $x \rightarrow 0$ jeśli $t \rightarrow \infty$, co nie jest poszukiwanym przez nas rozwiązaniem.

3.3.4. Tłumienie nadkrytyczne

W przypadku tłumienia nadkrytycznego ($h^2 - \omega_0^2 > 0$) rozwiązanie równania (54) ma formę:

$$x = Ce^{rt} \tag{78}$$

gdzie r to stała wartość. Aby ją wyznaczyć zróżniczkujemy rozwiązanie (78) względem czasu otrzymując

$$\dot{x} = Cre^{rt} \tag{79}$$

$$\ddot{x} = Cr^2e^{rt} \tag{80}$$

I podstawimy otrzymane zależności do równania (54):

$$Cr^2e^{rt} + 2hCre^{rt} + \omega_0^2Ce^{rt} = 0 \tag{81}$$

$$Ce^{rt}(r^2 + 2hr + \omega_0^2) = 0 \tag{82}$$

Równanie będzie zawsze spełnione, bez względu na wartość t , jeśli wyrażenie w nawiasie będzie równo zero

$$r^2 + 2hr + \omega_0^2 = 0 \tag{83}$$

Zależność (83) to równanie kwadratowe, zatem obliczamy wyróżnik tego równania, od którego zależy jego rozwiązanie. Wyróżnik równania

$$\Delta = 4(h^2 - \omega_0^2) \quad (84)$$

jest większy od zera, ponieważ rozważamy przypadek tłumienia nadkrytycznego, kiedy $h^2 - \omega_0^2 > 0$. Równanie (83) ma więc dwa rozwiązania

$$r_{1,2} = -h \mp \sqrt{h^2 - \omega_0^2} \quad (85)$$

które są ujemne. Uwzględniając obydwie stałe r_1 i r_2 w rozwiązaniu (78), otrzymujemy równanie opisujące przemieszczenie masy

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad (86)$$

gdzie C_1 i C_2 to stałe całkowania. Prędkość masy opisuje równanie

$$\dot{x} = C_1 r_1 e^{r_1 t} + C_2 r_2 e^{r_2 t} \quad (87)$$

Jeśli założymy warunki początkowe takie, że dla $t = t_0 = 0$ [s]

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = v_0 \end{cases} \quad (88)$$

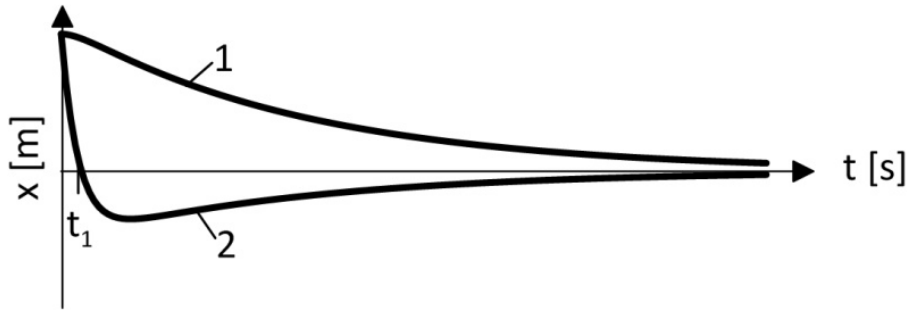
to wówczas na podstawie równań (86) i (87) otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} x_0 = C_1 + C_2 \\ v_0 = C_1 r_1 + C_2 r_2 \end{cases} \quad (89)$$

z którego wyznaczamy stałe całkowania

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{v_0 - x_0 r_2}{r_2 - r_1} = -\frac{v_0 - x_0(-h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2})}{2\sqrt{h^2 - \omega_0^2}} \\ C_2 = \frac{v_0 - x_0 r_1}{r_2 - r_1} = \frac{v_0 - x_0(-h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2})}{2\sqrt{h^2 - \omega_0^2}} \end{cases} \quad (90)$$

Z rozwiązania równania ruchu w postaci (86) wynika, że w przypadku tłumienia nadkrytycznego nie występują oscylacje masy. Stałe r_1 i r_2 są ujemne i obydwa człony rozwiązania zbiegają asymptotycznie do zera, zatem rozwiązanie jest stabilne. W zależności od warunków początkowych dla danego tłumienia h i częstości ω_0 rozwiązanie może przebiegać zgodnie z jednym z dwóch przypadków przedstawionych na wykresie.



Rys. 11.

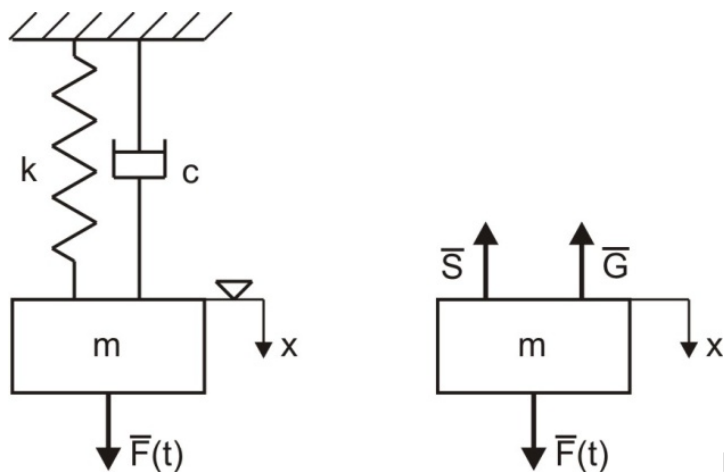
Z rozwiązania (86) przy uwzględnieniu wyznaczonych stałych można wyznaczyć czas t_1 , taki że $\infty > t_1 > 0$, w którym ewentualnie nastąpi przejście masy przez położenie równowagi

$$t_1 = \frac{\ln\left(\frac{v_0 - x_0(-h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2})}{v_0 - x_0(-h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2})}\right)}{2\sqrt{h^2 - \omega_0^2}} \quad (86)$$

3.4. Drgania wymuszone z tłumieniem wiskotycznym

3.4.1. Równania ruchu

W celu opisu drgań wymuszonych z tłumieniem wiskotycznym przyjmujemy następujący model, pokazany na rysunku.



Rys. 12.

Dynamiczne równanie ruchu masy ma postać:

$$m\ddot{x} = F(t) - S - G \quad (87)$$

gdzie:

$S = kx$ to siła reakcji sprężyny,

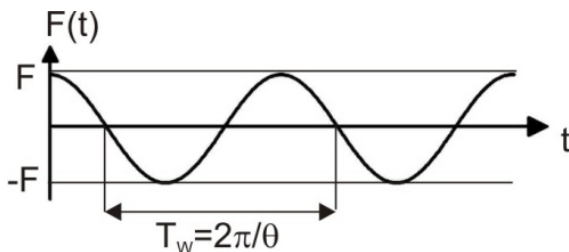
$G = c\dot{x}$ to siła tłumienia wiskotycznego,

$F(t)$ to siła wymuszająca ruch.

Charakterystykę wymuszenia przyjęto jako wymuszenie harmonicznie zmienne, ponieważ jest to jedno z najbardziej niebezpiecznych wymuszeń dla układu, czyli

$$F(t) = F \cos(\theta t) \quad (88)$$

gdzie F [N] to amplituda wymuszenia, θ $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ to częstość wymuszenia.



Rys. 13.

Uwzględniając powyższe zapisy, równanie ruchu zapisano jako

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \cos(\theta t) \quad (89)$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m} \cos(\theta t) \quad (90)$$

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = q \cos(\theta t) \quad (91)$$

gdzie

$2h = \frac{c}{m}$, h to tzw. współczynnik tłumienia jednostkowego,

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ to częstość drgań własnych.

$q = \frac{F}{m}$ to amplituda wymuszenia jednostkowego.

Rozwiązaniem równania (91) jest

$$x = x_1 + x_2 \quad (92)$$

gdzie x_1 to rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (54) ($\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$), którego postać zależy od przypadku tłumienia, x_2 to rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego. Sens fizyczny tych rozwiązań jest następujący: x_1 opisuje drgania swobodne tłumione wynikające z niezerowych warunków początkowych, x_2 opisuje drgania wymuszone ustalone. Rozwiązanie x_1 , przy założeniu dodatniego tłumienia, jest stabilną częścią rozwiązania i stosunkowo szybko zanika w czasie. Z punktu widzenia inżynierskiego interesuje nas głównie rozwiązanie opisujące drgania wymuszone ustalone x_2 , którego forma jest następująca

$$x_2 = B \cos(\theta t - \gamma) \quad (93)$$

Ponieważ drgania swobodne tłumione zanikają, to interesuje nas głównie rozwiązanie opisujące drgania wymuszone ustalone, czyli możemy przyjąć

$$x = x_2 = B \cos(\theta t - \gamma) \quad (94)$$

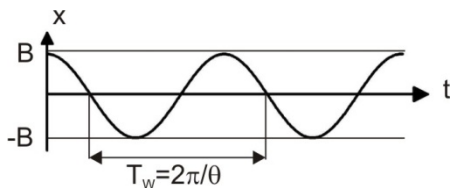
gdzie

$$B = \frac{q}{\sqrt{(\omega_0^2 - \theta^2)^2 + 4h^2\theta^2}} \quad (95)$$

to amplituda drgań wymuszonych ustalonych, natomiast kąt przesunięcia fazowego jest zdefiniowany przez wzór

$$tg\gamma = \frac{2h\theta}{\omega_0^2 - \theta^2} \quad (96)$$

Przebieg rozwiązania przedstawiono na wykresie. Takie rozwiązanie, określone wzorami (95) i (96) występuje poza sytuacją gdy jednocześnie $\omega_0 = \theta$ i $h = 0$.



Rys. 14.

Przebieg czasowy drgań pokazuje, że masa wykonuje ruch okresowy o ustalonej amplitudzie. Okres drgań wymuszonych ustalonych T_w jest taki sam jak okres siły wymuszającej. W zaprezentowanym ruchu interesująca jest wielkość amplitudy drgań wymuszonych. Analizuje się tzw. charakterystykę amplitudowo-częstościową, którą uzyskuje się następująco. Należy licznik i mianownik wyrażenia (95) podzielić przez ω_0^2 , czyli

$$B = \frac{\frac{q}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4h^2}{\omega_0^2} \frac{\theta^2}{\omega_0^2}}} \quad (97)$$

Licznik wyrażenia (33) można przekształcić do postaci

$$\frac{q}{\omega_0^2} = \frac{\frac{F}{m}}{\frac{k}{m}} = \frac{F}{k} = \delta_{st} \quad (98)$$

która wyraża statyczną deformację sprężyny przez siłę o wartości amplitudy wymuszenia F . Natomiast współczynnik $\frac{2h}{\omega_0} = \beta$ reprezentuje bezwymiarowy współczynnik tłumienia, zaś współczynnik $\frac{\theta}{\omega_0} = \alpha$ reprezentuje bezwymiarową częstość. Uwzględniając przyjęte oznaczenia zapisano równanie (97) w postaci

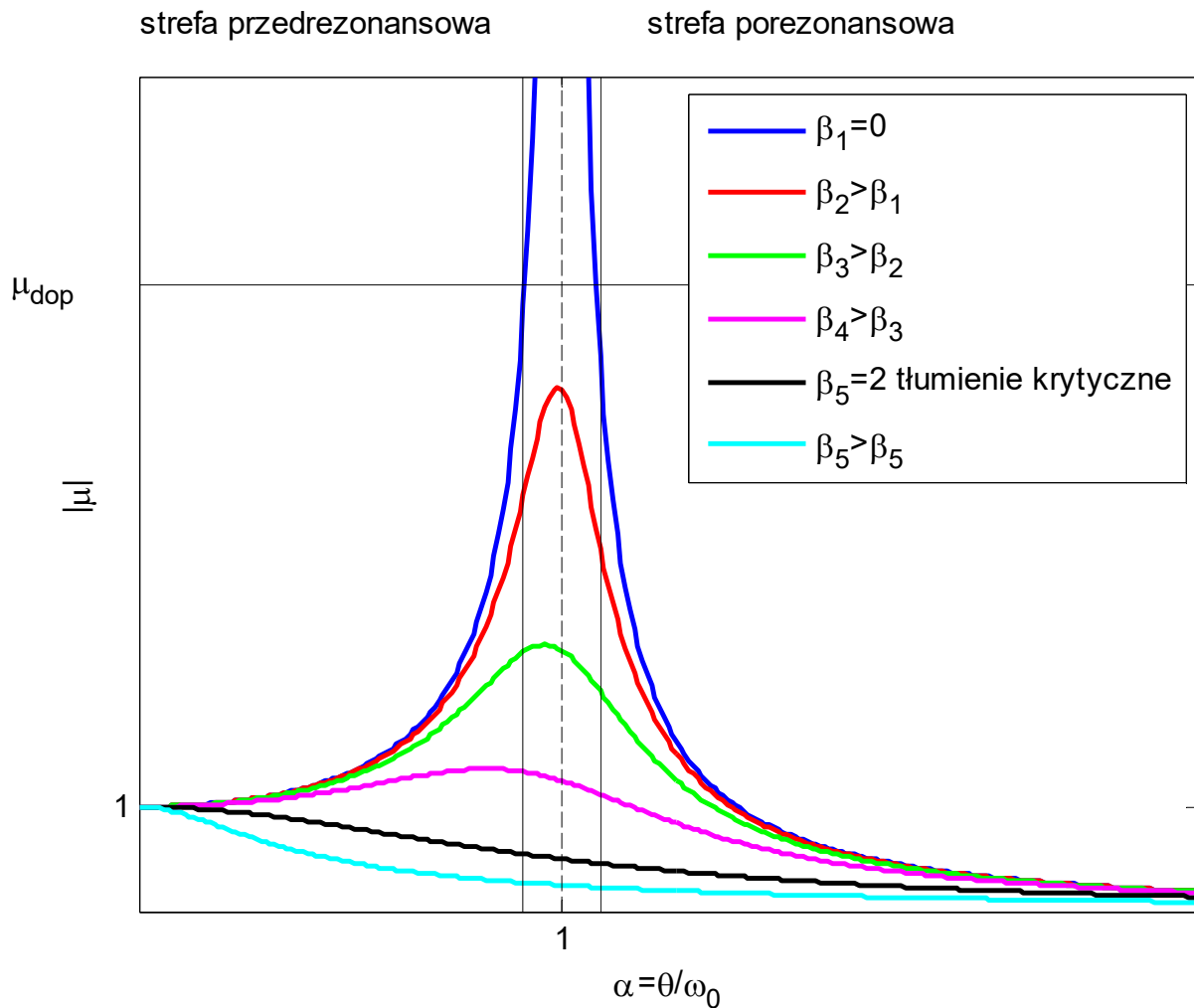
$$B = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + \beta^2 \alpha^2}} \quad (99)$$

Dzieląc równanie (99) przez deformację statyczną δ_{st} otrzymano

$$\mu = \frac{B}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + \beta^2 \alpha^2}} \quad (100)$$

gdzie $\mu = \frac{B}{\delta_{st}}$ to tzw. współczynnik uwielokrotnienia amplitudy (współczynnik dynamiczny). Zawiera on informację o tym, jaka jest deformacja wywołana siłą zmienną o amplitudzie F w stosunku do deformacji statycznej wywołanej siłą statyczną o wartości F . Z zależności (99) wynika, że ten stosunek zależy od częstości siły wymuszającej θ zawartej we współczynniku α . Charakterystyka dynamiczna (99) jest nazywana charakterystyką amplitudowo-częstościową i można ją przedstawić na wykresie przyjmując, że α (czyli stosunek częstości wymuszenia do częstości własnej) zmienia się od 0 do

∞ . Taką charakterystykę, dla różnych wartości tłumienia β przedstawiono na poniższym rysunku.



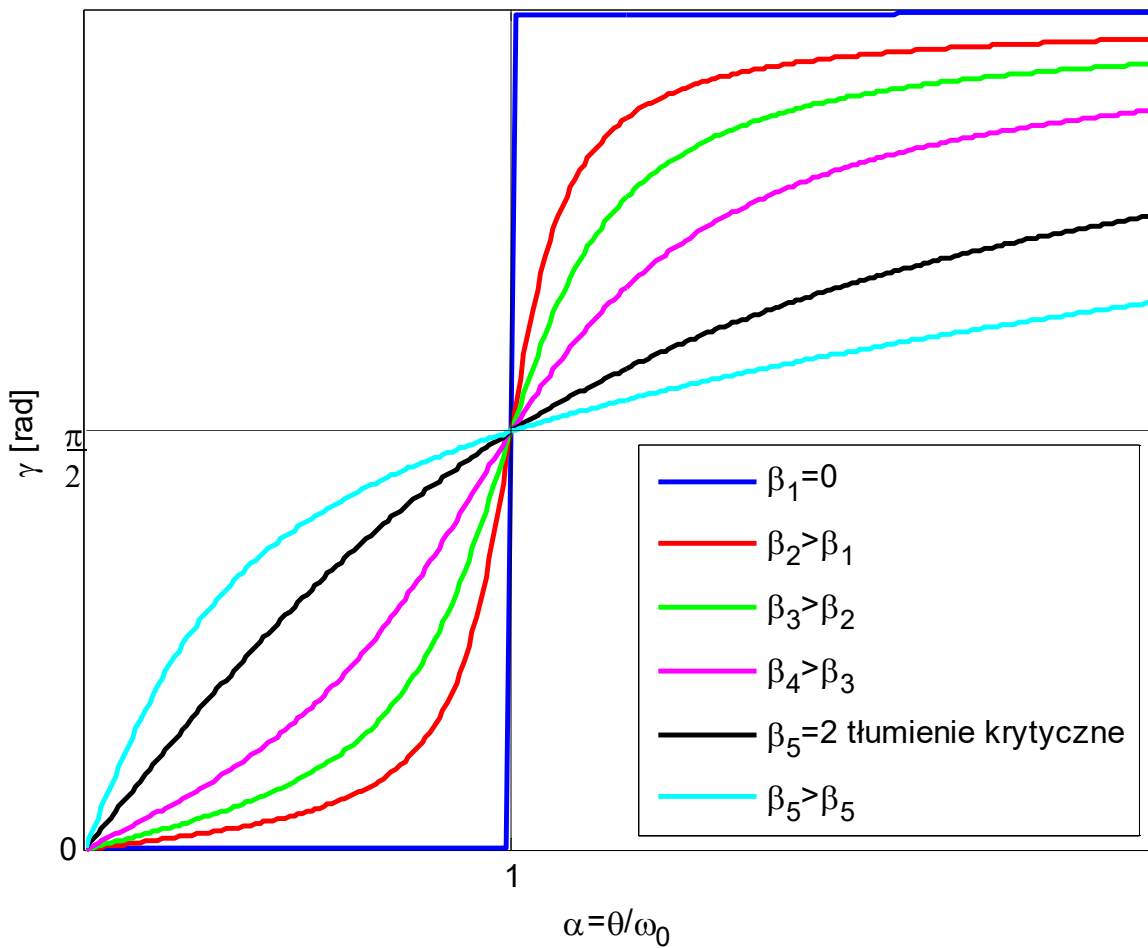
Rys. 15.

Zauważamy, że jeśli $\beta = 0$ (tzn. gdy nie ma tłumienia) to przy $\alpha = \frac{\theta}{\omega_0} = 1$ wartość $\mu = \frac{B}{\delta_{st}} \rightarrow \infty$, czyli występuje zjawisko rezonansu mechanicznego polegającego na ciągłym wzroście amplitudy drgań B do nieskończoności. Dla każdego układu można określić dopuszczalną wartość współczynnika uwielokrotnienia amplitudy, czyli μ_{dop} , którego wartość wyznacza granice strefy rezonansu. Jeżeli nie występuje tłumienie to układ powinien pracować w strefie przed- i pozarezonansowej. Praca w strefie rezonansowej jest niebezpieczna dla układu, gdyż prowadzi ona do jego zniszczenia. Jeżeli $\beta \neq 0$ (tzn. gdy występuje tłumienie), to otrzymujemy przebiegi, z których kilka pokazano na rysunku. Wówczas dla $\alpha = 1$ wartość współczynnika uwielokrotnienia jest ograniczona i wynosi $\mu = \frac{1}{\beta} = \frac{\omega_0}{2h}$, czyli maleje wraz ze wzrostem tłumienia. Należy jeszcze zauważyć kilka faktów. Bez względu na tłumienie, wszystkie krzywe rozpoczynają się w wartości 1 dla $\alpha = 0$. Jest to oczywiste ponieważ wtedy częstość wymuszenia wynosi zero i wymuszeniem jest statyczna siła o wartości F . Ponadto w przypadku, gdy $\alpha = \frac{\theta}{\omega_0} \rightarrow \infty$, czyli częstość wymuszenia θ dąży do nieskończoności, to współczynnik uwielokrotnienia amplitudy maleje do zera. Innymi słowy, bardzo szybkozmienne wymuszenia stabilizują układ. Jeszcze inaczej można powiedzieć, że wymuszenie zmienia się tak szybko, iż układ nie nadąża odpowiadać na wymuszenie.

Wróćmy jeszcze do wyrażenia (96) określającej kąt przesunięcia fazowego przemieszczenia względem wymuszenia. Podzielmy licznik i mianownik tego wyrażenia (95) przez ω_0^2 otrzymując

$$tg\gamma = \frac{\frac{2h \cdot \theta}{\omega_0 \omega_0}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}} = \frac{\beta\alpha}{1-\alpha^2} \quad (101)$$

Zmianę kąta przesunięcia fazowego w funkcji bezwymiarowej częstości α pokazano na rysunku.



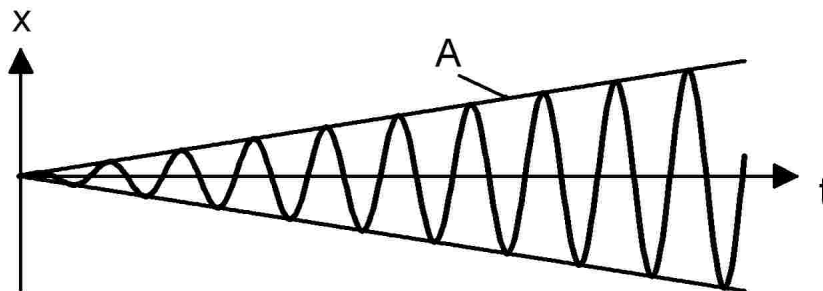
Rys. 16.

Widać, że bez względu na wielkość tłumienia β , w rezonansie kąt przesunięcia fazowego zawsze wynosi 90° i wraz ze wzrostem częstości wymuszenia dąży do 180° (wówczas wymuszenie jest w przeciw-fazie do przemieszczenia i dlatego następuje stabilizacja układu).

Jeżeli występują drgania wymuszone przy pracy układu w rezonansie mechanicznym (gdy $\omega_0 = \theta$) i braku tłumienia ($h = 0$), to rozwiązaniem równania (91) jest

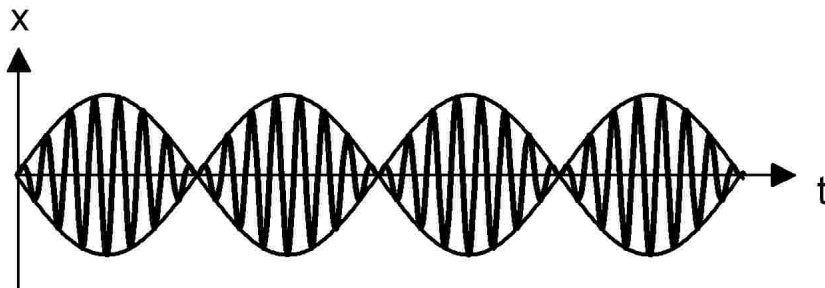
$$x = A \sin(\theta t) \quad (102)$$

gdzie $A = F \frac{\theta}{2k} t$ lub inaczej $A = F \frac{\omega_0}{2k} t = \frac{F}{2\sqrt{mk}} t$. Wynika z tego, że amplituda rośnie do nieskończoności, co pokazano na poniższym rysunku, a obwiednią drgań jest linia prosta.



Rys. 17.

Jeżeli układ pracuje w pobliżu rezonansu, tzn. częstość wymuszenia θ jest nieznacznie mniejsza od ω_0 (tuż przed rezonansem) lub jest nieznacznie większa od ω_0 (tuż poza rezonansem), wówczas występuje tzw. zjawisko dudnienia, co pokazano na poniższym rysunku. Amplituda drgań okresowo rośnie i maleje.



Rys. 18.

4. Wibroizolacja

Drgania występujące w układach mechanicznych to niekorzystne zjawisko, bo powodują zmęczenie materiału (rysy, pęknięcia i zniszczenie konstrukcji) oraz pojawiają się luzów w połączeniach ruchomych (niedokładność pracy układu mechanicznego). Konstruktorzy tak projektują układy, aby występujące drgania były możliwie małe (całkowite ich wyeliminowanie jest niemożliwe). Jeżeli w czasie pracy układu mechanicznego drgania jednak występują, to powinno się zrobić wszystko, co możliwe, aby nie przenosiły się z układu na obudowę lub odwrotnie, rozwiązujemy wówczas tzw. problem wibroizolacji drgań mechanicznych. Mamy dwa rodzaje zagadnień wibroizolacji:

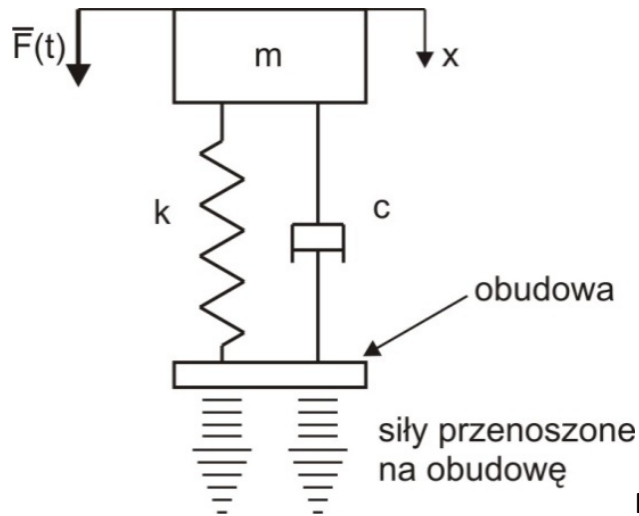
- a) wibroizolacja czynna (siłowa) dawniej nazywana amortyzacją,
- b) wibroizolacja bierna (przemieszczeniowa) dawniej nazywana izolacją.

W przypadku a) konstrukcja wsporcza (obudowa) powinna być chroniona przed działaniem obciążeń dynamicznych, czyli sił przenoszonych na obudowę. W przypadku b) urządzenie powinno być chronione przed drganiami obudowy (fundamentu).

4.1. Wibroizolacja przy wymuszeniu harmonicznym

4.1.1. Wibroizolacja czynna

Rozważmy następujący przykład układu drgającego (np. obrabiarka). Masa m wykonuje drgania wymuszone - ten rodzaj drgań jest niebezpieczny dla układu.



Rys. 1.

Równanie opisujące ruch masy to

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F\cos(\theta t) \quad (1)$$

Równanie to doprowadzimy do postaci

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = q \cos(\theta t) \quad (2)$$

gdzie

$2h = \frac{c}{m}$, h to tzw. współczynnik tłumienia jednostkowego,

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ to częstość własna układu,

$q = \frac{F}{m}$ to amplituda wymuszenia jednostkowego.

Rozwiązanie równania (2) opisujące drgania wymuszone ustalone to

$$x = B \cos(\theta t - \gamma) \quad (3)$$

gdzie amplituda drgań wymuszonych ustalonych określona jest jako

$$B = \frac{q}{\sqrt{(\omega_0^2 - \theta^2)^2 + 4h^2\theta^2}} \quad (4)$$

W tym przypadku na obudowę przenoszona jest siła przez sprężynę i tłumik, która jest równa

$$P(t) = S(t) + G(t) = kx + c\dot{x} \quad (5)$$

Ponieważ przemieszczenie x jest opisane równaniem (3), to prędkość masy opisuje równanie

$$\dot{x} = -B\theta \sin(\theta t - \gamma) \quad (6)$$

Siłę przenoszoną na obudowę można zapisać następująco

$$P(t) = kB \cos(\theta t - \gamma) - cB\theta \sin(\theta t - \gamma) = C \cos(\theta t - \gamma + \alpha) \quad (7)$$

gdzie

$$C = B\sqrt{k^2 + (c\theta)^2} \quad (8)$$

to amplituda siły przenoszonej na obudowę, natomiast kąt przesunięcia fazowego α jest określony przez wzór

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c\theta}{k} \quad (9)$$

Uwzględniając (4) i (8) otrzymamy amplitudę siły przenoszonej na obudowę w formie

$$C = \frac{q\sqrt{k^2 + (c\theta)^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \theta^2)^2 + 4h^2\theta^2}} \quad (10)$$

Dzieląc licznik i mianownik równania (10) przez ω_0^2 dostaniemy zależność

$$C = \frac{\frac{q}{\omega_0^2} \sqrt{k^2 + (c\theta)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4h^2}{\omega_0^2} \frac{\theta^2}{\omega_0^2}}} = \frac{\frac{F}{k} \sqrt{k^2 + (c\theta)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4h^2}{\omega_0^2} \frac{\theta^2}{\omega_0^2}}} = \frac{F \sqrt{1 + \left(\frac{c\theta}{k}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4h^2}{\omega_0^2} \frac{\theta^2}{\omega_0^2}}} = \frac{F \sqrt{1 + \left(\frac{2h\theta}{\omega_0^2}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4h^2}{\omega_0^2} \frac{\theta^2}{\omega_0^2}}} \quad (11)$$

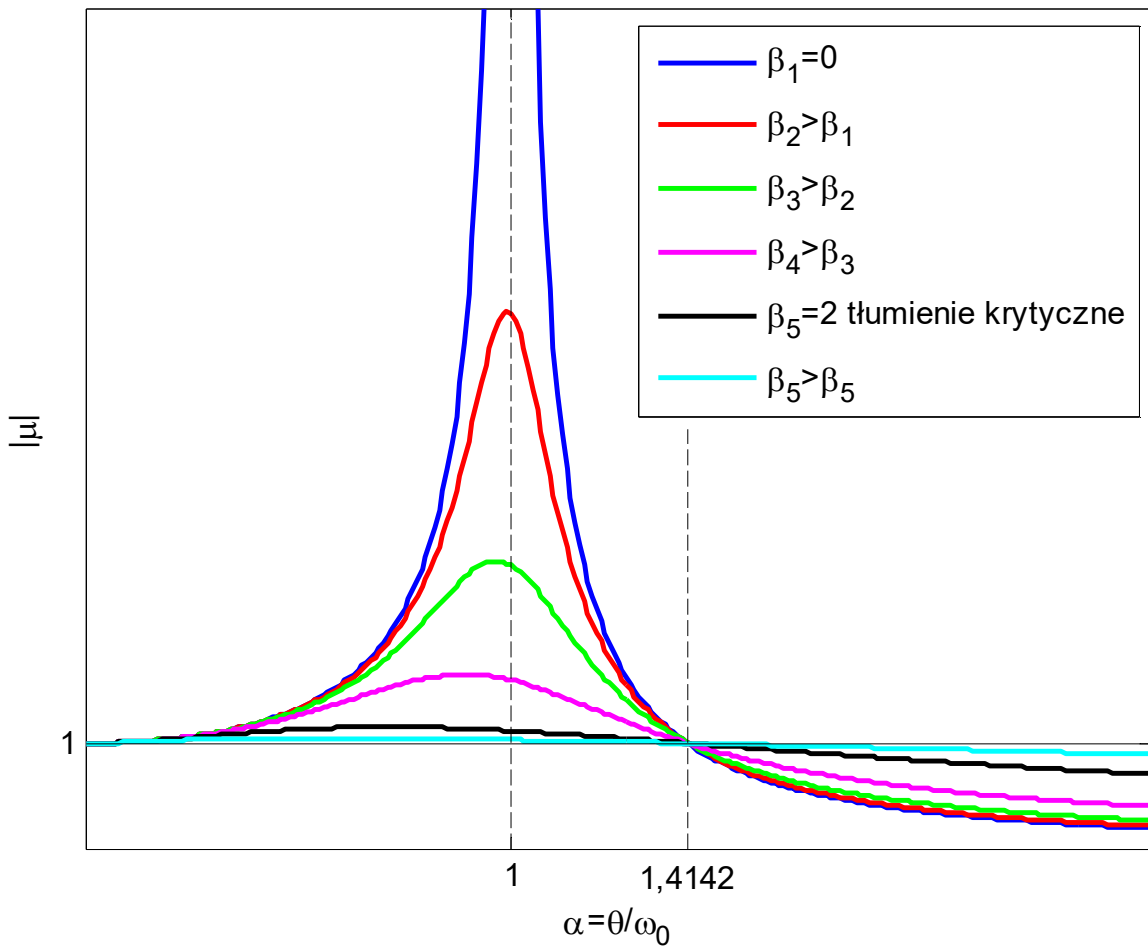
w której najpierw wykorzystano fakt, że $\frac{q}{\omega_0^2} = \frac{F}{k} = \frac{F}{\frac{m}{k}}$ a następnie skorzystano z zależności $c = 2hm$ i $k = \omega_0^2 m$ aby człon $\frac{c\theta}{k}$ przekształcić do postaci $\frac{2h\theta}{\omega_0^2}$. Wprowadzając znane już oznaczenia $\alpha = \frac{\theta}{\omega_0}$ i $\beta = \frac{2h}{\omega_0}$ zapisano

$$C = \frac{F \sqrt{1 + \beta^2 \alpha^2}}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + \beta^2 \alpha^2}} \quad (12)$$

Dzieląc równanie (12) przez amplitudę siły wymuszającej dostaniemy równanie

$$\mu = \frac{C}{F} = \frac{\sqrt{1 + \beta^2 \alpha^2}}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + \beta^2 \alpha^2}} \quad (13)$$

gdzie μ to tzw. współczynnik przepuszczalności wibroizolacji, który jest stosunkiem amplitudy siły przenoszonej na obudowę C do amplitudy siły wymuszającej F . Zależność współczynnika przepuszczalności wibroizolacji μ od bezwymiarowej częstości α dla różnych wartości tłumienia pokazano na poniższym rysunku.



Rys. 2.

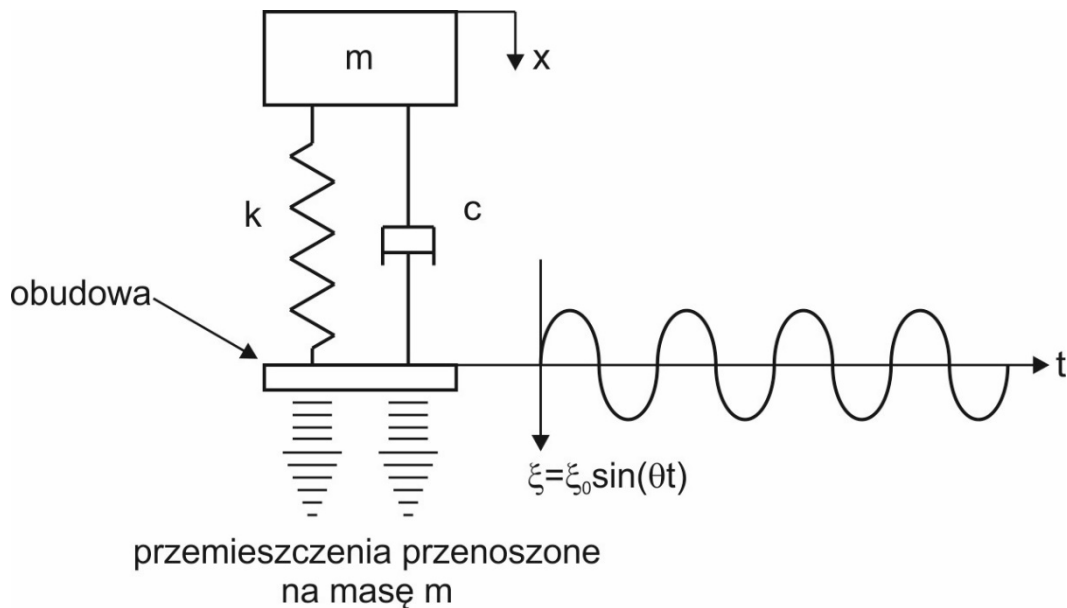
Jeśli $\beta = 0$ (tzn. gdy nie ma tłumienia) to $|\mu| \leq 1$ gdy $\alpha = \frac{\theta}{\omega_0} > \sqrt{2}$. Zatem $\frac{\theta}{\omega_0} > \sqrt{2}$ to warunek wibroizolacji czynnej. Ponieważ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m'}}$, to należy dobrać taką sprężynę (dostatecznie miękką), aby $k < \frac{m\theta^2}{2}$. Jeżeli w układzie występuje tłumienie, ($\beta_i \neq 0$) to wówczas dostajemy przebiegi, których kilka pokazano na rysunku. Z pokazanych przebiegów wynika, że tłumienie psuje wibroizolację, ponieważ siła przenoszona na obudowę jest wówczas większa niż w przypadku, gdy nie ma tłumienia.

Należy pamiętać, że w czasie ruchu maszyny lub jej zatrzymania przechodzimy przez strefę rezonansu, w której tłumienie jest korzystne, bo amplitudy drgań są ograniczone. Dlatego w przypadku wibroizolacji wprowadzamy wkładki z gumy, drewna, tkaniny czy mas plastycznych, bo elementy te jako tłumiki nieznacznie psują wibroizolację, ale są korzystne w przejściowych okresach pracy maszyny.

Podsumowując, warunek osiągnięcia najskuteczniejszej wibroizolacji i spokojnej pracy maszyny w ruchu ustalonym jest taki, aby $\frac{\theta}{\omega_0} > \sqrt{2}$ (zazwyczaj wynosi $4 \div 5$) oraz aby było małe tłumienie. Należy pamiętać, że analizowany powyżej przypadek to układ o jednym stopniu swobody. W rzeczywistości układy mają znacznie więcej stopni swobody, bo np. w przypadku, gdy $\frac{\theta}{\omega_0} \approx 10 \div 20$ może wystąpić zjawisko tzw. rezonansu wewnętrznego sprężyn, które w rzeczywistości mają masę.

4.1.2. Wibroizolacja bierna

W przypadku wibroizolacji biernej mamy następujący układ przedstawiony na rysunku.



Rys. 9.

Przemieszczenie podłoża (obudowy) możemy opisać np. funkcją harmoniczną

$$\xi = \xi_0 \sin(\theta t) \quad (14)$$

Są to np. ruchy podłoża wywołane zaburzeniem równowagi statycznej, oscylacje komunikacyjne albo trzęsienie ziemi, które wymuszają ruch masy. Siła w sprężynie i tłumiku to odpowiednio

$$S = k(\xi - x) \quad (15)$$

$$G = c(\dot{\xi} - \dot{x}) \quad (16)$$

gdzie założono, że $\xi > x$. Równanie ruchu masy ma formę

$$m\ddot{x} = G + S \quad (17)$$

a po podstawieniu wartości sił reakcji sprężyny i tłumika będzie ona następująca

$$m\ddot{x} = c(\dot{\xi} - \dot{x}) + k(\xi - x) \quad (18)$$

i dalej

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{\xi} + k\xi \quad (19)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\xi_0\theta\cos(\theta t) + k\xi_0\sin(\theta t) \quad (20)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \xi_0\sqrt{k^2 + (c\theta)^2}\sin(\theta t + \alpha) \quad (21)$$

Ostatecznie zapiszemy

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = D\sin(\theta t + \alpha) \quad (22)$$

gdzie

$$D = \xi_0\sqrt{k^2 + (c\theta)^2} \quad (23)$$

to amplituda wymuszenia drgań masy, natomiast kąt przesunięcia fazowego α jest określony przez wzór

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{c\theta}{k} \quad (24)$$

Równanie (22) doprowadzimy do znanej formy

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = q\sin(\theta t + \alpha) \quad (25)$$

gdzie

$2h = \frac{c}{m}$, h to tzw. współczynnik tłumienia jednostkowego,

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ to częstość własna układu,

$q = \frac{D}{m}$ to amplituda wymuszenia jednostkowego.

Rozwiązanie równania (25) opisujące drgania wymuszone masy ma znaną postać

$$x = B\cos(\theta t - \gamma) \quad (26)$$

z amplitudą określoną jako

$$B = \frac{q}{\sqrt{(\omega_0^2 - \theta^2)^2 + 4h^2\theta^2}} \quad (27)$$

Uwzględniając, że $q = \frac{D}{m}$ oraz zależność (23), amplitudę drgań masy zapiszemy w postaci

$$B = \frac{\frac{\xi_0}{m} \sqrt{k^2 + (c\theta)^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \theta^2)^2 + 4h^2\theta^2}} \quad (28)$$

Dzieląc licznik i mianownik równania (28) przez ω_0^2 dostaniemy zależność

$$B = \frac{\frac{\xi_0}{\omega_0^2 m} \sqrt{k^2 + (c\theta)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4h^2}{\omega_0^2} \frac{\theta^2}{\omega_0^2}}} = \frac{\frac{\xi_0}{k} \sqrt{k^2 + (c\theta)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4h^2}{\omega_0^2} \frac{\theta^2}{\omega_0^2}}} = \frac{\xi_0 \sqrt{1 + \left(\frac{c\theta}{k}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4h^2}{\omega_0^2} \frac{\theta^2}{\omega_0^2}}} = \frac{\xi_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2h\theta}{\omega_0^2}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4h^2}{\omega_0^2} \frac{\theta^2}{\omega_0^2}}} \quad (29)$$

w której najpierw wykorzystano fakt, że $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ a następnie skorzystano z zależności $c = 2hm$ i $k = \omega_0^2 m$ aby człon $\frac{c\theta}{k}$ przekształcić do postaci $\frac{2h\theta}{\omega_0^2}$. Wprowadzając znane już oznaczenia $\alpha = \frac{\theta}{\omega_0}$ i $\beta = \frac{2h}{\omega_0}$ zapisano

$$B = \frac{\xi_0 \sqrt{1 + \beta^2 \alpha^2}}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + \beta^2 \alpha^2}} \quad (30)$$

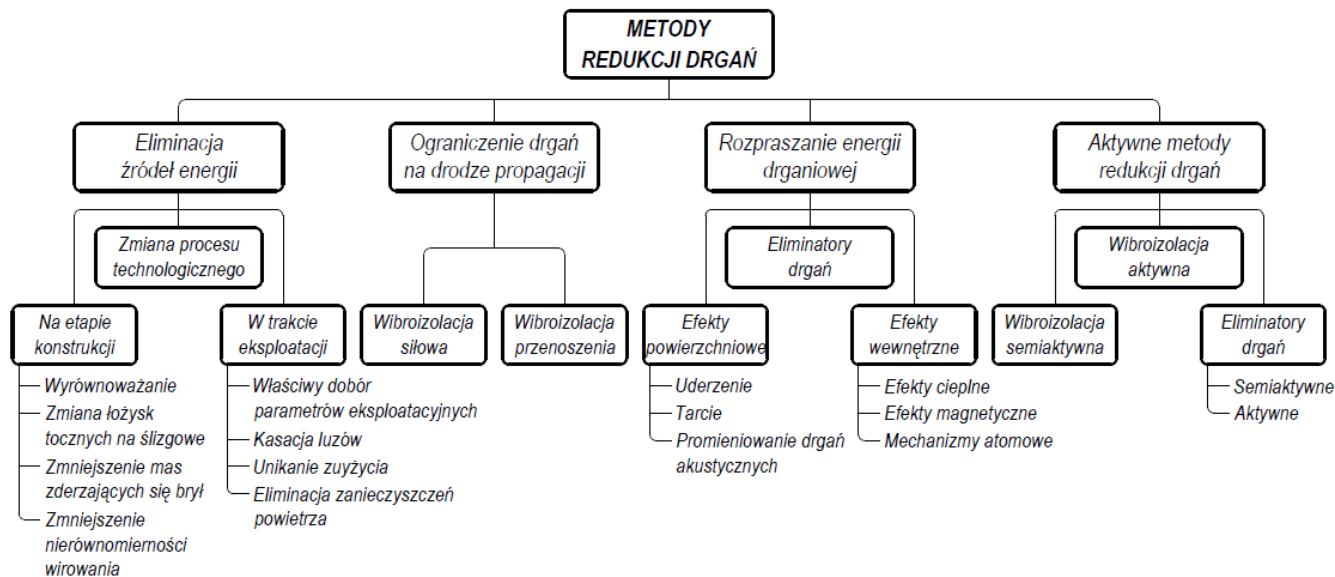
Dzieląc równanie (30) przez amplitudę wymuszenia kinematycznego ξ_0 dostaniemy równanie

$$\mu = \frac{B}{\xi_0} = \frac{\sqrt{1+\beta^2\alpha^2}}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2+\beta^2\alpha^2}} \quad (31)$$

gdzie μ to tzw. współczynnik przepuszczalności wibroizolacji, który teraz jest stosunkiem amplitudy drgań masy B do amplitudy wymuszenia kinematycznego ξ_0 . Jak można zauważyć, postać współczynnika przepuszczalności wibroizolacji w przypadku wibroizolacji zarówno czynnej jak i biernej jest taka sama. Zatem wnioski dotyczące wibroizolacji biernej są identycznej jak w przypadku wibroizolacji czynnej. Współczynnik przepuszczalności wibroizolacji biernej nazywany jest współczynnikiem amplifikacji (wzmocnienia) drgań podłoża.

4.2. Wibroizolacja pasywna a aktywna

Od lat starano się zapobiegać przyczynom drgań, kontrolować drgania a ostatnio możliwe stało się sterowanie drganiami. Cały ten zakres działań zwany w literaturze anglojęzycznej Vibration Control, można podzielić na grupę metod pasywnych i aktywnych. Klasyfikację metod redukcji drgań przedstawiono na rysunku.



Rys. 10.

Tradycyjne metody pasywne polegające na modyfikacji parametrów (zmiana m , c , k) i struktury układów posiadają szereg ograniczeń, np.:

- małą skuteczność redukcji drgań w zakresie niskich częstotliwości,
- wrażliwość na zmiany warunków eksploatacyjnych,
- wrażliwość na zmienne zakłócenia zewnętrzne itd.

Zupełnie nowe perspektywy w tym zakresie otwierają aktywne układy sterowania drganiami obiektów, które sprowadzają się do modyfikacji struktur i parametrów z wykorzystaniem dodatkowego źródła energii.

Metody te pozwalają rozwiązać zagadnienia sprzecznych żądań dotyczących:

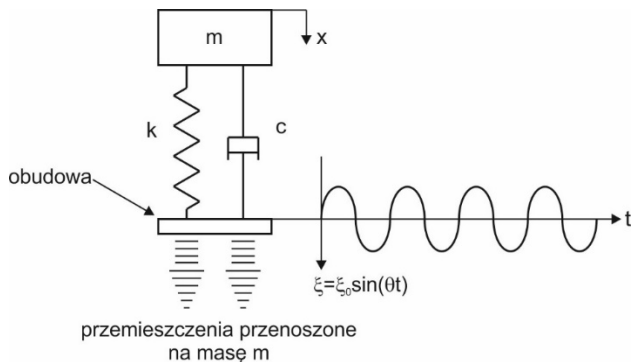
- efektywności procesu roboczego,
- niskiego poziomu drgań,
- dopuszczalnych ugięć statycznych,
- stateczności i sztywności dynamicznej.

W przypadku metod pasywnych występuje rozpraszanie energii lub okresowe jej magazynowanie a następnie oddawanie energii.

Cechą charakterystyczną metod aktywnych jest to, że drgania i hałas kompensuje się drganiami i dźwiękami z dodatkowych źródeł. Wynika z tego, że układy aktywne posiadają dodatkowe zewnętrzne źródło energii wibroakustycznej. Układy te odpowiednio sterowane mogą dostarczać lub absorbować energię wibroakustyczną w określony sposób z dowolnych miejsc układu (urządzenia).

Pierwsze koncepcje metod aktywnych redukcji drgań powstały w ostatnim dziesięcioleciu XIX wieku, mimo, że geneza metod aktywnych wywodzi się z zasady interferencji fal, która była podana w 1690 roku przez Chrystiana Huygensa a metody aktywne opierają się na znanej zasadzie Huygensa-Fresnela. Istniały dwa główne nurty badań i prac technicznych związanych z redukcją poziomem drgań: ochrona budynków oraz drgania środków komunikacji, maszyn i urządzeń. Ochrona budynków związana była z trzęsieniami ziemi. Prace rozwijano się głównie w Japonii, w jednym z najbardziej aktywnych sejsmicznie krajów świata.

Zanim przejdziemy do metod aktywnych, skupimy naszą uwagę na innym spojrzeniu na problem wibroizolacji pasywnej.



Wróćmy do równania ruchu układu (18)

$$m\ddot{x} = c(\dot{\xi} - \dot{x}) + k(\xi - x) \quad (18)$$

i zapiszmy go w następującej formie

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{\xi}) + k(x - \xi) = 0 \quad (19)$$

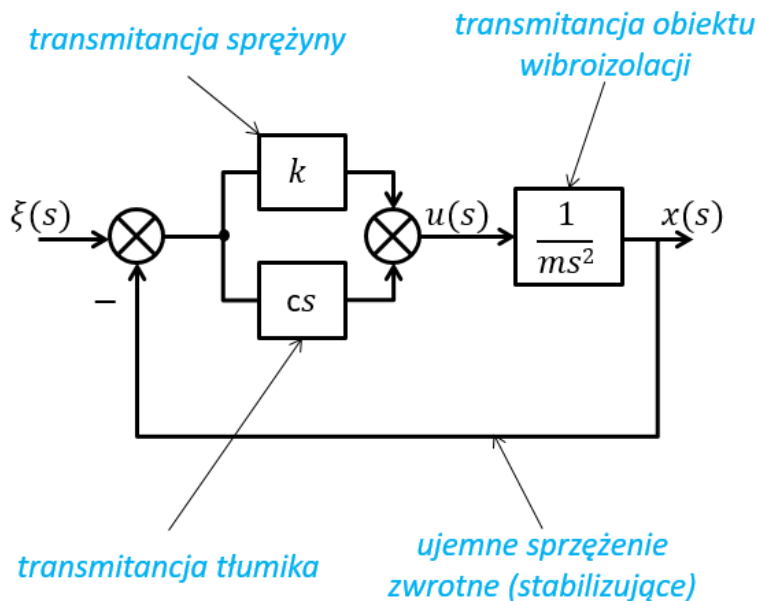
Dokonując transformacji Laplace'a równania (19), przy zerowych warunkach początkowych otrzymamy:

$$mx(s)s^2 = c(\xi(s) - x(s))s + k(\xi(s) - x(s)) \quad (20)$$

Po uporządkowaniu otrzymamy

$$x(s) = \frac{(cs+k)(\xi(s)-x(s))}{ms^2} \quad (21)$$

Korzystając z zależności (21) można zbudować schemat blokowy pasywnego układu wibroizolacji przemieszczeniowej, pokazany na rysunku.



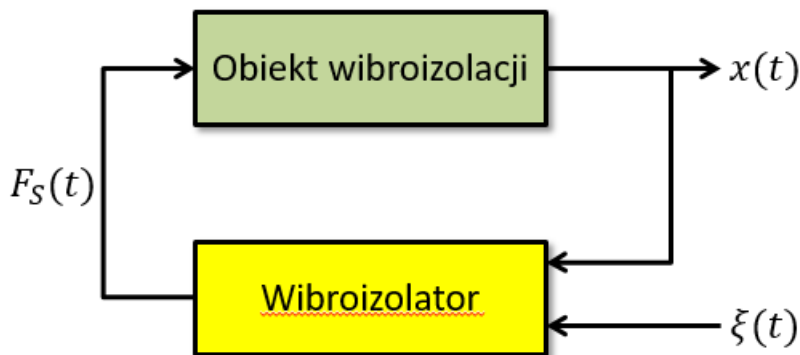
Rys. 11.

Analizując układ można stwierdzić, że na obiekt wibroizolacji o masie m oddziałuje sygnał sterujący u , który ma wymiar siły. Siła ta jest wytwarzana przez wibroizolator i jest sumą ważoną sił proporcjonalnych do względnego przemieszczenia i względnej prędkości, a stałe wagi to odpowiednio k i c . Siłę tę można nazwać siłą sterującą F_S , a określa ją zależność

$$F_S = c(\dot{\xi} - \dot{x}) + k(\xi - x) \quad (22)$$

W układzie pasywnym nie jest możliwa pełna stabilizacja obiektu wibroizolacji. Jak zaznaczono wcześniej, metody pasywne polegające na modyfikacji parametrów (zmiana m , c , k) i struktury układów posiadają szereg ograniczeń.

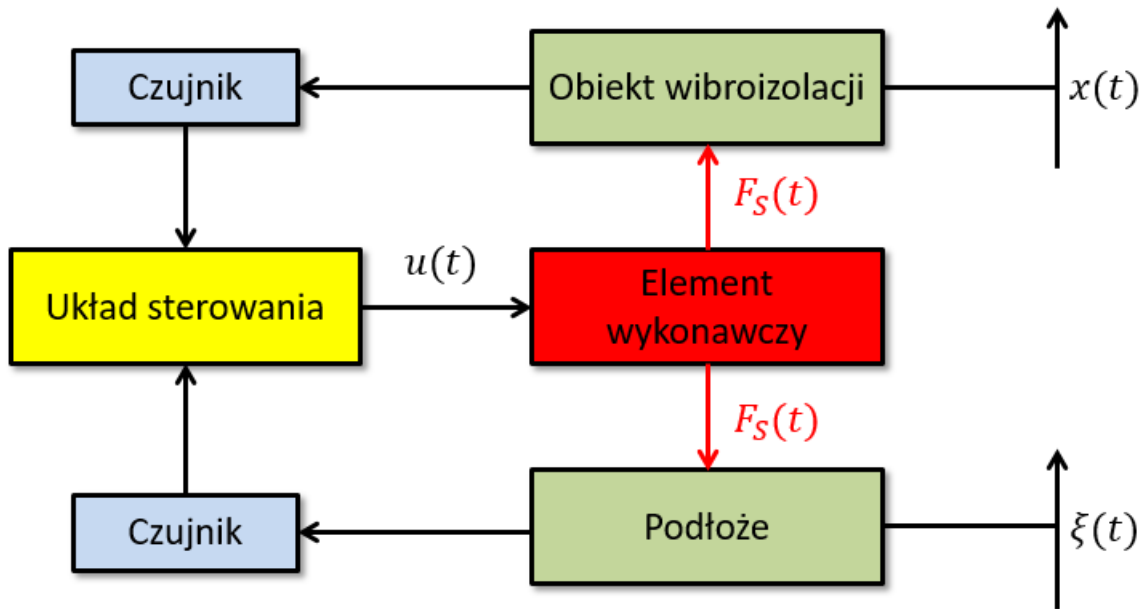
Zadaniem układu wibroizolacji jest minimalizacja przemieszczeń drgań obiektu, czyli x powinno zmierzać do zera. Wobec niemożności pełnej kompensacji wymuszeń zewnętrznych zagadnienie wibroizolacji może być sformułowane jako zadanie utrzymania zmiennych wyjściowych obiektu wibroizolacji w zadanym przedziale. Wtedy układ wibroizolacji można traktować jako układ automatycznej regulacji, co zostało już zaprezentowane. Ogólny model układu wibroizolacji na potrzeby analizy zagadnienia wibroizolacji aktywnej można przedstawić jak na rysunku.



Rys. 12.

Działanie wibroizolatora polega na generowaniu wymuszeń dynamicznych, zapewniających wymagane parametry drgań obiektu wibroizolacji.

Przy takim sformułowaniu, rola układu wibroizolacji może być traktowana jako **zadanie sterowania drganiami obiektu**, a generowane wymuszenie dynamiczne jako **sterowanie**. Taka interpretacja roli układu wibroizolacji jest wygodna dla celów formułowania i rozwiązywania zadań wibroizolacji aktywnej. Pozwala bowiem wykorzystać aparat teorii sterowania do syntezy i analizy aktywnych układów redukcji drgań. Problem wibroizolacji przedstawiono bardziej szczegółowo na kolejnym rysunku.



Siła sterująca $F_S(t)$ jest wytwarzana przez elementy wykonawcze, którymi mogą być siłowniki: pneumatyczne, hydrauliczne, elektrodynamiczne, elektromagnetyczne, piezoelektryczne i inne. Układ wyposażony jest również w elementy pomiarowe i sterujące. Działanie wibroizolatora aktywnego polega na generowaniu dodatkowych wymuszeń dynamicznych zapewniających wymagane parametry drgań obiektu wibroizolacji.

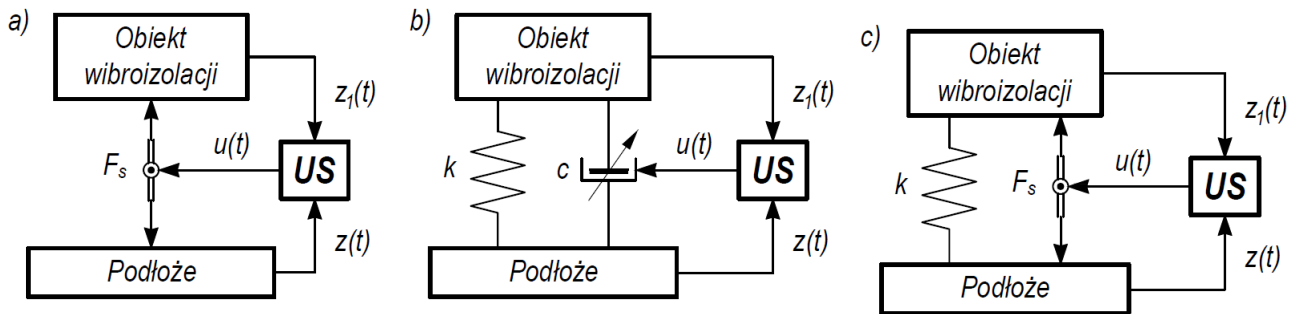
W rzeczywistych układach sterowania drganiami należy wziąć pod uwagę:

- zakłócenia i opóźnienia w torze pomiarowym,
- ograniczenia układu wykonawczego (układ nie może generować dowolnie dużych sił),
- właściwości dynamiczne układu wykonawczego (transmitancja).

W zależności od sposobu wykorzystania dodatkowego źródła energii, sterowane układy redukcji drgań można podzielić na:

- układy aktywne (a)
- układy semiaktywne (b)
- układy hybrydowe (c)

W aktywnych układach redukcji drgań (a), wytwarza się dodatkowe siły lub przemieszczenia sterowane, przyłożone bezpośrednio do izolowanego obiektu w celu kompensacji wymuszeń (zakłóceń) siłowych lub kinematycznych. Wymagają one zastosowania zewnętrznego źródła energii o dużej mocy.

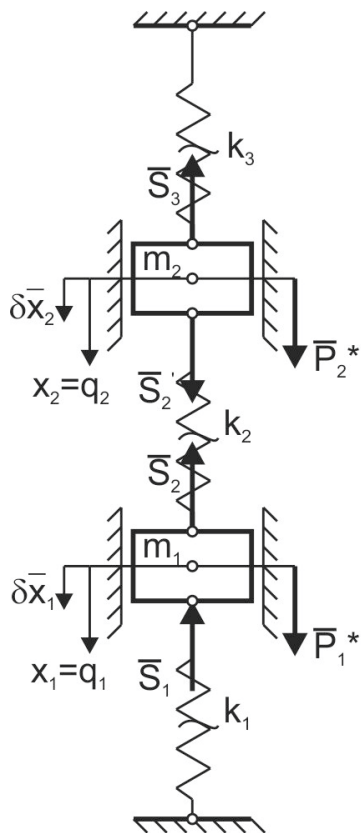


Układy semiaktywne (b) zawierają elementy bierne, sprężyste i tłumiące, lecz parametry określające siły sprężyste i tłumiące mogą być zmieniane (sterowane). Wymagają one źródła energii o niewielkiej mocy (na poziomie sygnałowym).

Układy hybrydowe (c), łączą właściwości układów aktywnych i pasywnych. Część aktywna działa w zakresie niskich częstotliwości, zaś element pasywny zapewnia redukcję drgań w zakresie wyższych częstotliwości.

5. Drgania układu mechanicznego o dwóch stopniach swobody

5.1. Drgania wzdużne



Dla układu mechanicznego pokazanego na rysunku ułożymy dynamiczne równania ruchu stosując równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Układ składa się z dwóch wozików połączonych między sobą oraz z ostoją za pomocą sprężyn. Ruch wozików jest wymuszony przez siły harmoniczne o jednakowej częstotliwości. Tarcie w układzie zostało pominięte. Znane są: masy wozików m_1 [kg] i m_2 [kg], współczynniki sprężystości sprężyn k_1 [N/m], k_2 [N/m] i k_3 [N/m], siły wymuszające ruch $P_1^* = P_{10} \cos(\theta t)$, $P_2^* = P_{20} \cos(\theta t)$, P_{10} [N] i P_{20} [N] - amplitudy sił wymuszających, θ [rad/s] - częstotliwość wymuszenia.

Omawiany układ ma dwa stopnie swobody, ponieważ ruch wozika 1 nie wymusza ruchu wozika 2. Obydwa woziki są w ruchu postępowym, więc przyjmujemy następujące współrzędne uogólnione:

$q_1 = x_1$ - to przemieszczenie wozika 1,

$q_2 = x_2$ - to przemieszczenie wozika 2.

Prędkości uogólnione to $\dot{q}_1 = \dot{x}_1$, $\dot{q}_2 = \dot{x}_2$.

Uogólnione przemieszczenia przygotowane to $\delta q_1 = \delta x_1$,
 $\delta q_2 = \delta x_2$.

W rozważanym przypadku równania Lagrange'a drugiego rodzaju opisujące ruch układu to

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial E}{\partial x_j} = Q_j, \quad j = 1, 2 \quad (1)$$

Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznych wszystkich brył, czyli:

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \quad (2)$$

Elementy lewej strony równań Lagrange'a drugiego rodzaju to:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{d}{dt} (m_1 \dot{x}_1) = m_1 \ddot{x}_1, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_2} \right) = \frac{d}{dt} (m_2 \dot{x}_2) = m_2 \ddot{x}_2 \end{array} \right. \quad (3)$$

Siły uogólnione wyznaczmy w znany już sposób stosując zasadę prac przygotowanych.

Wprowadzamy siły działające na układ mechaniczny. Są to:

\bar{P}_1^* , \bar{P}_2^* - siły wymuszające ruch wozików, co do wartości równe $P_1^* = P_{10} \cos(\theta t)$, $P_2^* = P_{20} \cos(\theta t)$,

\bar{S}_1 , \bar{S}_2 , \bar{S}'_2 , \bar{S}_3 - siły reakcji sprężyn, co do wartości $S_1 = k_1 x_1$, $S_2 = S'_2 = k_2 (x_1 - x_2)$, $S_3 = k_3 x_2$, czyli pominięto siły wstępnego napięcia sprężyn pod wpływem ciężarów brył (ciężary brył również pominięto).

Określamy siły uogólnione układu. Zakładamy pierwszy przypadek, gdzie możliwy jest tylko ruch wozzika 1, tzn. $\delta q_1 = \delta x_1 \neq 0$, $\delta q_2 = \delta x_2 = 0$. Praca przygotowana sił działających na wozzik 1 będzie następująca:

$$Q_1 \delta q_1 = \bar{P}_1 \delta \bar{x}_1 = (P_1^* - S_1 - S_2) \delta x_1 = (P_1^* - S_1 - S_2) \delta q_1 \quad (4)$$

więc wartość pierwszej siły uogólnionej to:

$$Q_1 = P_1^* - S_1 - S_2 \quad (5)$$

Zakładamy teraz drugi przypadek, gdzie możliwy jest tylko ruch wozzika 2, tzn. $\delta q_2 = \delta x_2 \neq 0$, $\delta q_1 = \delta x_1 = 0$. Praca przygotowana sił działających na wozzik 2 będzie następująca:

$$Q_2 \delta q_2 = \bar{P}_2 \delta \bar{x}_2 = (P_2^* + S_2' - S_3) \delta x_2 = (P_2^* + S_2' - S_3) \delta q_2 \quad (6)$$

więc wartość drugiej siły uogólnionej to:

$$Q_2 = P_2^* + S_2' - S_3 \quad (7)$$

Podstawiając obliczone wartości do równań Lagrange'a, otrzymamy:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = P_1^* - S_1 - S_2 \\ m_2 \ddot{x}_2 = P_2^* + S_2' - S_3 \end{cases} \quad (8)$$

Wszystkie elementy równań poza wymuszeniami przenosi się na lewe strony. Po podstawieniu zależności określających siły w sprężynach, otrzymano

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = P_{10}\cos(\theta t) \\ m_2\ddot{x}_2 + k_3x_2 - k_2(x_1 - x_2) = P_{20}\cos(\theta t) \end{cases} \quad (9)$$

Uzyskane równania stanowią układ sprzężonych liniowych równań różniczkowych drugiego rzędu niejednorodnych o stałych współczynnikach. Sprzężenie równań polega na tym, że zmienne opisujące ruch każdej z brył układu występują w obydwóch równaniach i nie można rozwiązywać tych równań niezależnie. Rozwiązanie tego układu otrzymuje się stosując teorię dotyczącą równań różniczkowych liniowych.

Bardzo ważnym elementem analizy układu jest wyznaczenie jego częstości własnych. W tym celu analizuje się drgania swobodne opisane układem równań jednorodnych:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + k_3x_2 - k_2(x_1 - x_2) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Rozwiązanie układu równań jednorodnych (10) ma postać:

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad (11)$$

gdzie: A_1, A_2 - amplitudy drgań swobodnych wozików,

ω - częstość własna,

φ - kąt przesunięcia fazowego.

Podstawiając rozwiązanie (11) i jego drugą pochodną

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -A_1\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \\ \ddot{x}_2 = -A_2\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad (12)$$

do układu równań (10), otrzymano układ

$$\begin{cases} [-m_1 A_1 \omega^2 + k_1 A_1 + k_2 (A_1 - A_2)] \cos(\omega t + \varphi) = 0 \\ [-m_2 A_2 \omega^2 + k_3 A_2 - k_2 (A_1 - A_2)] \cos(\omega t + \varphi) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

który po uporządkowaniu ze względu na amplitudy zapisano następująco

$$\begin{cases} [(-m_1 \omega^2 + k_1 + k_2) A_1 - k_2 A_2] \cos(\omega t + \varphi) = 0 \\ [(-m_2 \omega^2 + k_2 + k_3) A_2 - k_2 A_1] \cos(\omega t + \varphi) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Równania (14) będą spełnione dla każdej chwili czasu, jeśli wyrażenia w nawiasach [.] będą równe zero, czyli

$$\begin{cases} (-m_1 \omega^2 + k_1 + k_2) A_1 - k_2 A_2 = 0 \\ (-m_2 \omega^2 + k_2 + k_3) A_2 - k_2 A_1 = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Układ równań (15) można zapisać w postaci macierzowej następująco:

$$\begin{bmatrix} -m_1 \omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2 \omega^2 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Przez przyrównanie do zera wyznacznika charakterystycznego układu równań, otrzymano równanie częstości drgań własnych:

$$(-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)(-m_2\omega^2 + k_2 + k_3) - k_2^2 = 0 \quad (17)$$

które po uporządkowaniu ze względu na częstość ω zapiszemy w postaci

$$\omega^4 - \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2}\right)\omega^2 + \frac{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}{m_1m_2} = 0 \quad (18)$$

Otrzymane równanie jest wielomianem 4-go stopnia. Przez podstawienie:

$$\omega^2 = z \quad (19)$$

można obniżyć stopień wielomianu i otrzymać równanie kwadratowe:

$$\omega^2 - \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2}\right)z + \frac{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}{m_1m_2} = 0 \quad (20)$$

Sposób rozwiązywania tego równania znany jest z matematyki. Rozwiązania zależą od tzw. wyróżnika równania kwadratowego, czyli:

$$\Delta = \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2}\right)^2 - 4\frac{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}{m_1m_2} \quad (21)$$

Można wykazać, że $\Delta > 0$ i rozwiązania równania (20) są następujące

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2} \right) \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2} \right)^2 - 4 \frac{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}{m_1m_2}} \quad (22)$$

Postacie rozwiązań są takie, iż łatwo można zauważyć, że $z_1 > 0$ i $z_2 > 0$. Uwzględniając wykonane wcześniej podstawienie (19), teraz otrzymamy

$$\omega = \pm \sqrt{z_{1,2}} \quad (23)$$

Biorąc pod uwagę jedynie dodatnie rozwiązania równania (23), otrzymamy ostatecznie dwie częstotliwości własne układu:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2} \right) \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2} \right)^2 - 4 \frac{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}{m_1m_2}}} \quad (24)$$

Przyjęte rozwiązania (11) układu równań (10) należy zapisać w postaci, która uwzględnia obydwie częstotliwości własne, czyli

$$\begin{cases} x_1 = x_{11} + x_{12} = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 = x_{21} + x_{22} = A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \quad (25)$$

gdzie

$$\begin{cases} x_{11} = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1), & x_{12} = A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_{21} = A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1), & x_{22} = A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \quad (26)$$

Każde rozwiązanie zawiera dwie dowolne stałe φ_1 i φ_2 oraz jedną niewiadomą amplitudę, gdyż druga amplituda jest zależna od pierwszej, co wynika z układu równań (15).

$$\begin{cases} (-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)A_1 - k_2A_2 = 0 \\ (-m_2\omega^2 + k_2 + k_3)A_2 - k_2A_1 = 0 \end{cases}$$
 Jeśli w tym układzie równań uwzględnimy i -tą częstość własną to zapiszemy

$$\begin{cases} (-m_1\omega_i^2 + k_1 + k_2)A_{1i} - k_2A_{2i} = 0 \\ (-m_2\omega_i^2 + k_2 + k_3)A_{2i} - k_2A_{1i} = 0 \end{cases} \quad (27)$$

a następnie

$$\begin{cases} \frac{A_{2i}}{A_{1i}} = \frac{-m_1\omega_i^2 + k_1 + k_2}{k_2} = \mu_i \\ \frac{A_{2i}}{A_{1i}} = \frac{k_2}{-m_2\omega_i^2 + k_2 + k_3} = \mu_i \end{cases} \quad (28)$$

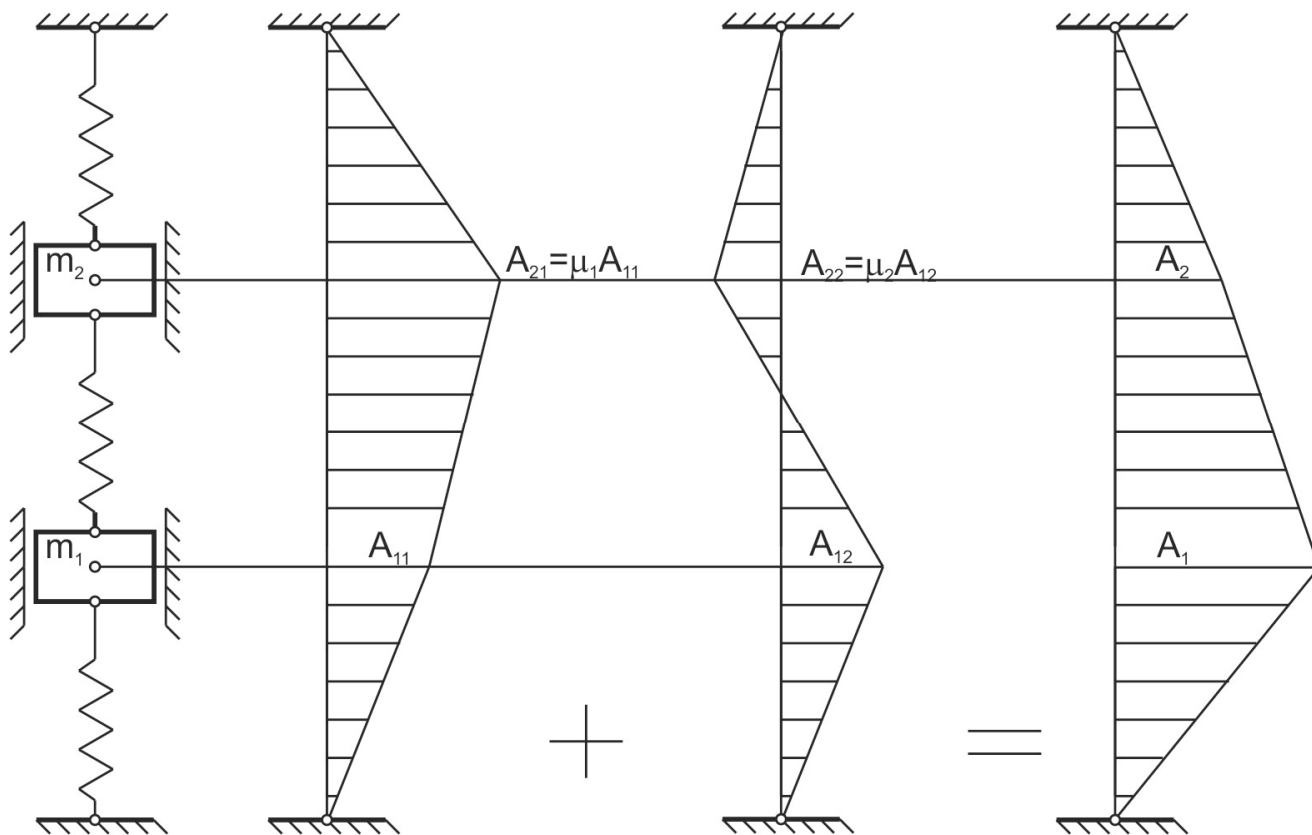
Współczynnik μ_i określający zależność pomiędzy amplitudami można wyznaczyć z dowolnego równania układu (28) przyjmując za i liczbę 1 lub 2 związaną z numerem częstości własnej. Pomimo różnych form równań, jego wartość będzie taka sama niezależnie od tego, z którego równania skorzystamy.

Ostatecznie rozwiązanie (25) przedstawimy w postaci:

$$\begin{cases} x_1 = x_{11} + x_{12} = A_{11}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 = x_{21} + x_{22} = \mu_1 A_{11}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \mu_2 A_{12}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \quad (29)$$

Jest to ogólna postać drgań układu zachowawczego o dwóch stopniach swobody. Stałe φ_1 i φ_2 oraz A_{11} i A_{12} wyznacza się z warunków początkowych.

Omówimy teraz pewne pojęcia typowe dla drgań mechanicznych. Rozwiązanie x_{11} i x_{21} przedstawiające drgania harmoniczne układu z pierwszą częstością własną nazywa się pierwszym drganiem głównym (własnym) układu, zaś rozwiązanie x_{12} i x_{22} przedstawiające drgania harmoniczne układu z drugą częstością własną nazywa się drugim drganiem głównym układu. Współczynniki μ_1 i μ_2 charakteryzujące postać drgań własnych, nazywa się postaciami drgań własnych (głównych).



Rozważmy teraz drgania wymuszone opisane układem równań niejednorodnych (9):

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = P_{10}\cos(\theta t) \\ m_2\ddot{x}_2 + k_3x_2 - k_2(x_1 - x_2) = P_{20}\cos(\theta t) \end{cases}$$

Jeśli dla uproszczenia weźmiemy pod uwagę jedynie część rozwiązania odpowiadającą procesowi stacjonarnemu drgań wymuszonych nietłumionych (to inaczej drgania wymuszone ustalone), należy uwzględnić tylko rozwiązanie szczególne podanego układu równań. Rozwiązanie to ma postać:

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\theta t) \\ x_2 = A_2\cos(\theta t) \end{cases} \quad (30)$$

gdzie: A_1, A_2 - amplitudy drgań wymuszonych wiodników.

Podstawiając rozwiązanie (30) i jego drugą pochodną do układu równań (9), po uporządkowaniu ze względu na amplitudy, otrzymano

$$\begin{cases} [(-m_1\theta^2 + k_1 + k_2)A_1 - k_2A_2]\cos(\theta t) = P_{10}\cos(\theta t) \\ [(-m_2\theta^2 + k_2 + k_3)A_2 - k_2A_1]\cos(\theta t) = P_{20}\cos(\theta t) \end{cases} \quad (31)$$

Równania (31) będą spełnione dla każdej chwili czasu, jeśli

$$\begin{cases} (-m_1\theta^2 + k_1 + k_2)A_1 - k_2A_2 = P_{10} \\ (-m_2\theta^2 + k_2 + k_3)A_2 - k_2A_1 = P_{20} \end{cases} \quad (32)$$

co w zapisie macierzowym wyraża się następująco:

$$\begin{bmatrix} -m_1\theta^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\theta^2 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{10} \\ P_{20} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} -m_1\theta^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\theta^2 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{10} \\ P_{20} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (34)$$

które umożliwiają zapisanie równania (33) w zwartej formie

$$\mathbf{TA} = \mathbf{P} \quad (35)$$

Aby wyznaczyć wektor amplitud drgań, należy pomnożyć lewostronnie równanie (35) przez odwrotność macierzy współczynników \mathbf{T} . Wówczas otrzymamy:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{P} \quad (36)$$

Z definicji macierz odwróconą oblicza się następująco:

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{T})} [\mathbf{T}^D]' \quad (37)$$

gdzie: $\det(\mathbf{T})$ – wyznacznik macierzy \mathbf{T} ,

\mathbf{T}^D – macierz dopełnień algebraicznych.

$[\cdot]'$ - oznacza operację transpozycji macierzy

W naszym przypadku będzie:

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{T})} \begin{bmatrix} (-m_2\theta^2 + k_2 + k_3)(-1)^{(1+1)} & -k_2(-1)^{(1+2)} \\ -k_2(-1)^{(2+1)} & (-m_1\theta^2 + k_1 + k_2)(-1)^{(2+2)} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{(-m_1\theta^2 + k_1 + k_2)(-m_2\theta^2 + k_2 + k_3) - k_2^2} \begin{bmatrix} -m_2\theta^2 + k_2 + k_3 & k_2 \\ k_2 & -m_1\theta^2 + k_1 + k_2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Wstawiając równanie (39) do równania (36), obliczymy amplitudy drgań wymuszonych:

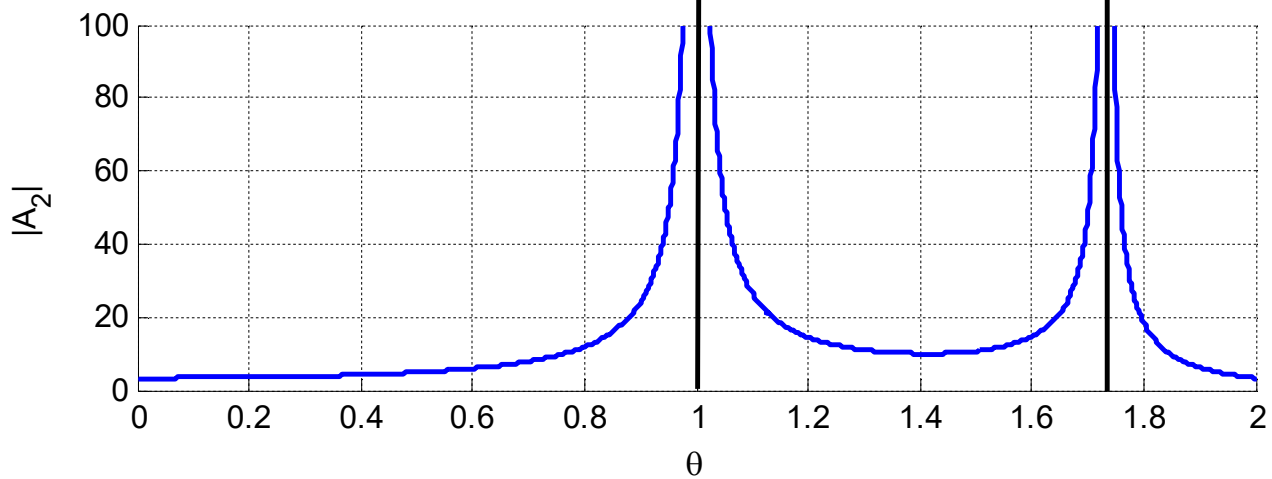
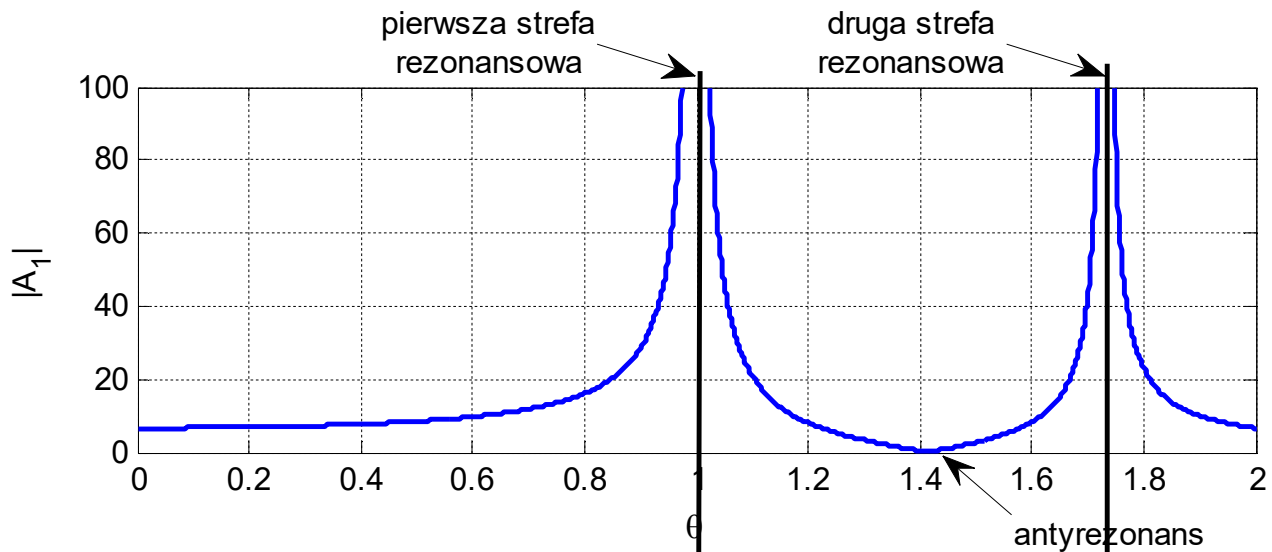
$$\begin{cases} A_1 = \frac{(-m_2\theta^2 + k_2 + k_3)P_{10} + k_2P_{20}}{(-m_1\theta^2 + k_1 + k_2)(-m_2\theta^2 + k_2 + k_3) - k_2^2} \\ A_2 = \frac{k_2P_{10} + (-m_1\theta^2 + k_1 + k_2)P_{20}}{(-m_1\theta^2 + k_1 + k_2)(-m_2\theta^2 + k_2 + k_3) - k_2^2} \end{cases} \quad (40)$$

Jeśli częstość wymuszenia θ będzie równa 0 to z układu równań (40) określimy statyczne wychylenie wodzików (pod wpływem statycznych sił):

$$\begin{cases} A_1(\theta = 0) = \delta_{st} = \frac{(k_2+k_3)P_{10}+k_2P_{20}}{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3} \\ A_2(\theta = 0) = \delta_{st} = \frac{k_2P_{10}+(k_1+k_2)P_{20}}{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3} \end{cases} \quad (41)$$

Natomiast jeśli częstość wymuszenia $\theta = \omega_1$ lub $\theta = \omega_2$ to wówczas zachodzi zjawisko rezonansu i amplitudy A_1 i A_2 będą dążyć do nieskończoności.

Na podstawie układu równań (40) można wyznaczyć tzw. charakterystyki amplitudowo-częstościowe. Dla danych $m_1 = m_2 = 1$ [kg], $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ [N/m], $P_{10} = 10$ [N], $P_{20} = 0$ [N] częstości własne wynoszą: $\omega_1 = 1$ [rad/s], $\omega_2 = 1.73$ [rad/s]. Przyjmując częstość wymuszenia jako zmienną w zakresie $\theta \in \langle 0 - 2 \rangle$ wyznaczono charakterystyki przedstawione na rysunku.



Wartości amplitud dla wybranych wartości częstości wymuszenia przedstawiono w tabeli

θ	0	ω_1	$\sqrt{2} \approx 1.4142$	ω_2	∞
A_1	6.6666	∞	0	∞	0
A_2	3.3333	∞	10	∞	0

Na podstawie danych z tabeli oraz charakterystyk przedstawionych na rysunku możemy stwierdzić, że istnieje taka częstość wymuszenia ($\theta = \sqrt{2}$), że amplituda A_1 masy 1 jest równa 0, pomimo tego, że działa na nią wymuszenie. Jest to zjawisko nazywane antyrezonansem. Jego istnienie wykorzystuje się w projektowaniu tzw. tłumika dynamicznego. Omówimy teraz zasadę jego działania.

Przyjmijmy, że w rozważanym układzie wozik 1 ze sprężyną k_1 jest układem podstawowym, na który z jakichś względów działa wymuszenie $P_1^* = P_{10} \cos(\theta t)$. Gdyby nie było pozostałych elementów układu, byłby to układ o jednym stopniu swobody. Wówczas jedyną możliwością zmniejszenia amplitudy drgań dla danej częstości wymuszenia byłoby zwiększenie tłumienia. Można jednakże postąpić inaczej, modyfikując układ podstawowy przez dołożenie kolejnej masy zamocowanej sprężyną do układu podstawowym (można również zastosować dwie sprężyny jak w omawianym wcześniej przykładzie – nie czyni to zagadnienia bardziej złożonym). Dodatkowa masa ze sprężyną muszą być tak dobrane, aby zjawisko antyrezonansu występowało przy częstości działającego wymuszenia θ .

Przeanalizujmy zatem amplitudę A_1 ze wzoru (40), zakładając, że na masę drugą nie działa wymuszenie ($P_{20} = 0$). Zażądamy, aby amplituda $A_1 = 0$, czyli aby zachodziło zjawisko antyrezonansu. Musi być zatem spełnione równanie

$$A_1 = \frac{(-m_2\theta^2 + k_2 + k_3)P_{10}}{(-m_1\theta^2 + k_1 + k_2)(-m_2\theta^2 + k_2 + k_3) - k_2^2} = 0 \quad (42)$$

Będzie ono spełnione jeśli licznik będzie równy zero, czyli

$$-m_2\theta^2 + k_2 + k_3 = 0 \quad (43)$$

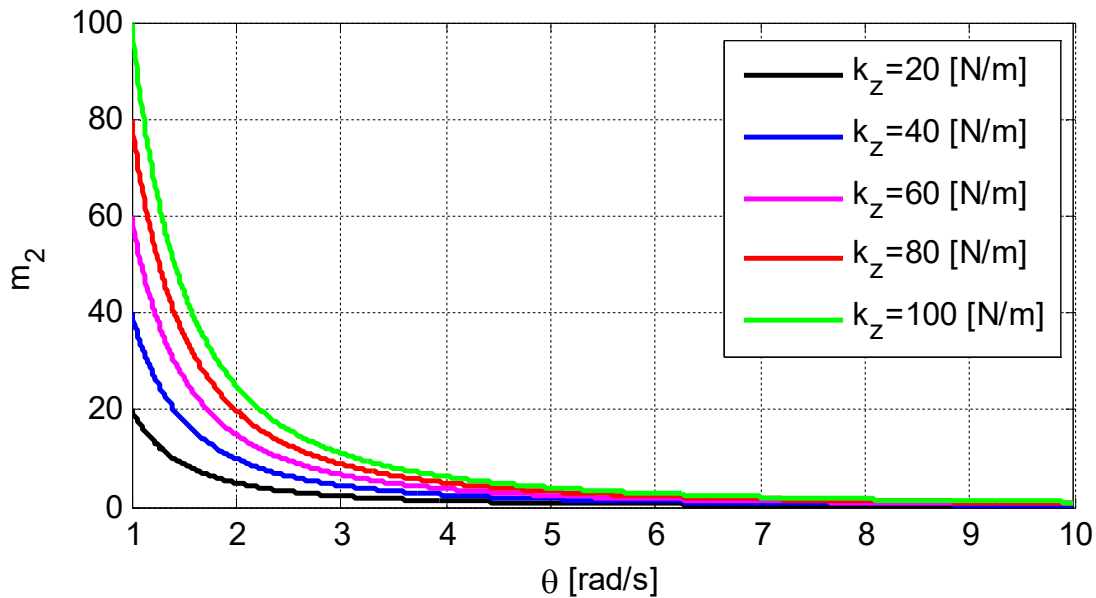
Jeśli założymy masę tłumika dynamicznego m_2 , wówczas obliczymy sumę współczynników sprężystości sprężyn, które powinny być zastosowane

$$k_2 + k_3 = m_2\theta^2 \quad (44)$$

a jeśli założymy jakie mają być sprężyny, to określimy wymaganą masę tłumika dynamicznego

$$m_2 = \frac{k_2 + k_3}{\theta^2} = \frac{k_z}{\theta^2} \quad (45)$$

gdzie k_z – to zastępczy współczynnik sprężystości sprężyn. Zależność masy tłumika od częstości wymuszenia, dla wybranych wartości współczynnika k_z przedstawiono na rysunku.

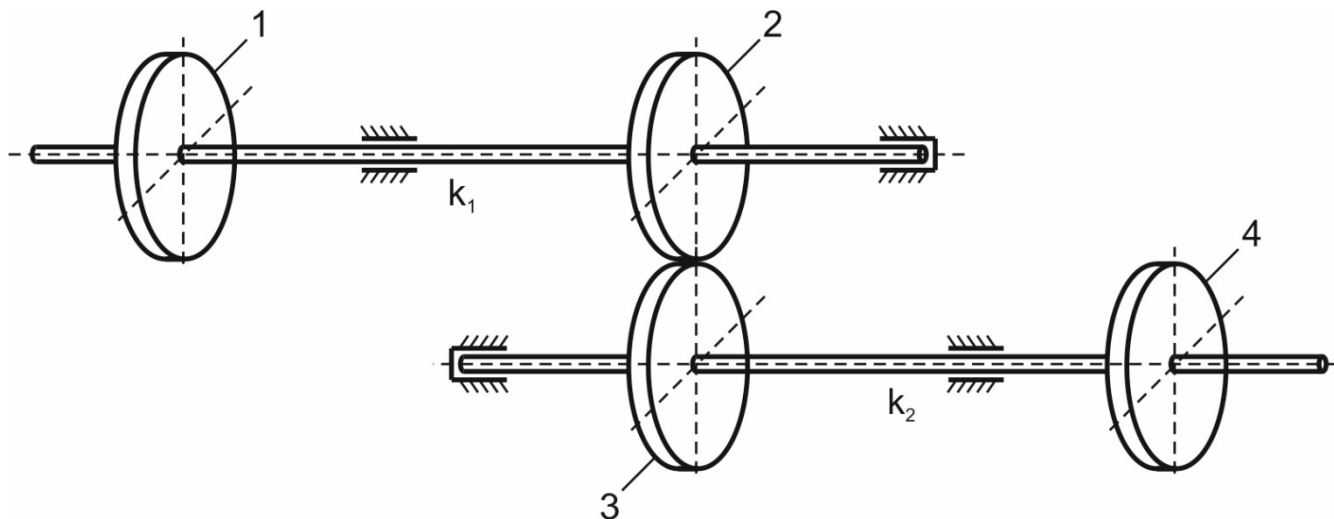


Zauważamy, że do wytłumienia drgań powodowanych wymuszeniami o niskich częstotliwościach, konieczne jest stosowanie dużych mas, przy czym wrażliwość układu na wartość masy m_2 maleje wraz ze wzrostem częstotliwości wymuszenia.

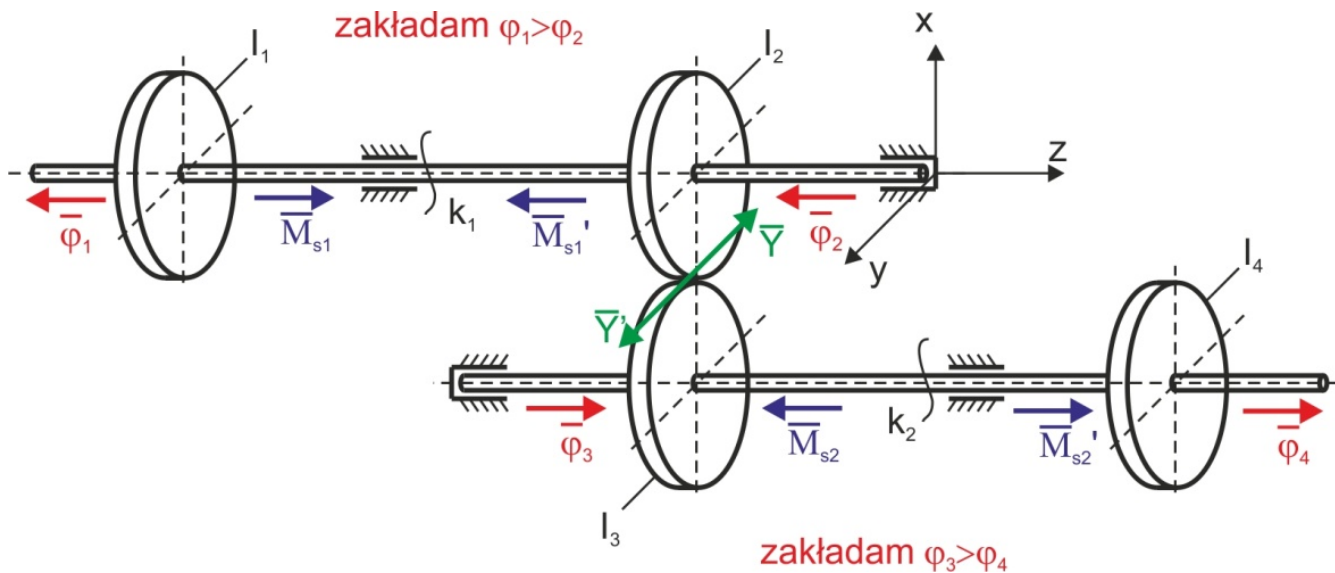
Zwróćmy uwagę na fakt, że tłumik dynamiczny działa poprawnie tylko dla jednej, konkretnej wartości częstotliwości wymuszenia θ . Dodatkowo tłumienie, którego nie braliśmy pod uwagę pogarsza jeszcze działanie tłumika dynamicznego.

5.2. Drgania skrętne

Rozważmy drgania układu przedstawionego na rysunku. W podanym układzie występują cztery krążki o znanych masowych momentach bezwładności odpowiednio I_1 , I_2 , I_3 , I_4 oraz wały o współczynniku sprężystości skrętnej k_1 , k_2 . Zakładamy, że krążki 2 i 3 współpracują bez poślizgu.



Podany układ ma trzy stopnie swobody, ponieważ mogą występować niezależne ruchy krążka 1, pary krążków 2 i 3 oraz krążka 4. Okazuje się jednak, że drgania takiego układu można opisać jak w układzie o dwóch stopniach swobody. Jest tak dlatego, że w analizie drgań nie interesują nas kąty obrotu poszczególnych krążków, ale ich obroty względne, a więc ruch pary krążków 2 i 3 względem krążka 1, oraz ruch krążka 4 względem pary krążków 2 i 3.



Dynamiczne równania ruchu układu są następujące

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\varphi}_1 = -M_{S1} \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 = M'_{S1} - Y r_2 \\ I_3 \ddot{\varphi}_3 = -M_{S2} + Y' r_3 \\ I_4 \ddot{\varphi}_4 = M'_{S2} \end{cases} \quad (1)$$

Zależności siłowe

$$Y = Y' \quad (2)$$

pozwalają zapisać dynamikę układu w postaci trzech równań

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\varphi}_1 + M_{S1} = 0 \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 - M'_{S1} + I_3 i \ddot{\varphi}_3 + i M_{S2} = 0 \\ I_4 \ddot{\varphi}_4 - M'_{S2} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Z kinematyki wiadomo, że

$$r_2 \varphi_2 = r_3 \varphi_3 \rightarrow \varphi_3 = \frac{r_2}{r_3} \varphi_2 = i \varphi_2 \quad i = \frac{r_2}{r_3} \quad (4)$$

Momenty sił sprężystych to

$$\begin{cases} M_{S1} = M'_{S1} = k_1(\varphi_1 - \varphi_2) \\ M_{S2} = M'_{S2} = k_2(\varphi_3 - \varphi_4) = k_2(i\varphi_2 - \varphi_4) \end{cases} \quad (5)$$

Uwzględniając (4) i (5), zapiszemy (3) w następującej formie

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\varphi}_1 + k_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \\ (I_2 + i^2 I_3) \ddot{\varphi}_2 - k_1(\varphi_1 - \varphi_2) + i k_2(i\varphi_2 - \varphi_4) = 0 \\ I_4 \ddot{\varphi}_4 - k_2(i\varphi_2 - \varphi_4) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Równanie (6.1) pomnóżmy przez $(I_2 + i^2 I_3)$ a równanie (6.2) przez I_1 i odejmijmy stronami. Następnie równanie (6.2) pomnóżmy przez $i I_4$ a równanie (6.3) przez $(I_2 + i^2 I_3)$ i odejmijmy stronami. Otrzymamy układ dwóch równań

$$\begin{cases} (I_2 + i^2 I_3)I_1[\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2] + k_1[I_2 + i^2 I_3 + I_1](\varphi_1 - \varphi_2) - iI_1 k_2(i\varphi_2 - \varphi_4) = 0 \\ (I_2 + i^2 I_3)I_4[i\ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_4] - k_1 i I_4(\varphi_1 - \varphi_2) + k_2[I_2 + I_3 + i^2 I_4](i\varphi_2 - \varphi_4) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 = \alpha_1 \\ i\varphi_2 - \varphi_4 = \alpha_2 \end{cases} \quad (8)$$

zapiszemy

$$\begin{cases} (I_2 + i^2 I_3)I_1\ddot{\alpha}_1 + k_1[I_2 + i^2 I_3 + I_1]\alpha_1 - iI_1 k_2\alpha_2 = 0 \\ (I_2 + i^2 I_3)I_4\ddot{\alpha}_2 - k_1 i I_4\alpha_1 + k_2[I_2 + I_3 + i^2 I_4]\alpha_2 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

i dalej

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}_1 + a_{11}\alpha_1 - a_{12}\alpha_2 = 0 \\ \ddot{\alpha}_2 - a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

gdzie

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{k_1[I_2 + i^2 I_3 + I_1]}{(I_2 + i^2 I_3)I_1} \\ a_{12} = \frac{iI_1 k_2}{(I_2 + i^2 I_3)I_1} \\ a_{21} = \frac{k_1 i I_4}{(I_2 + i^2 I_3)I_4} \\ a_{22} = \frac{k_2[I_2 + I_3 + i^2 I_4]}{(I_2 + i^2 I_3)I_4} \end{cases} \quad (11)$$

Uzyskany opis drgań skrętnych ma taką samą formę matematyczną jak opis drgań wzdłużnych podany w punkcie 9.1, a zatem do dalszej analizy można zastosować podane wcześniej metody.

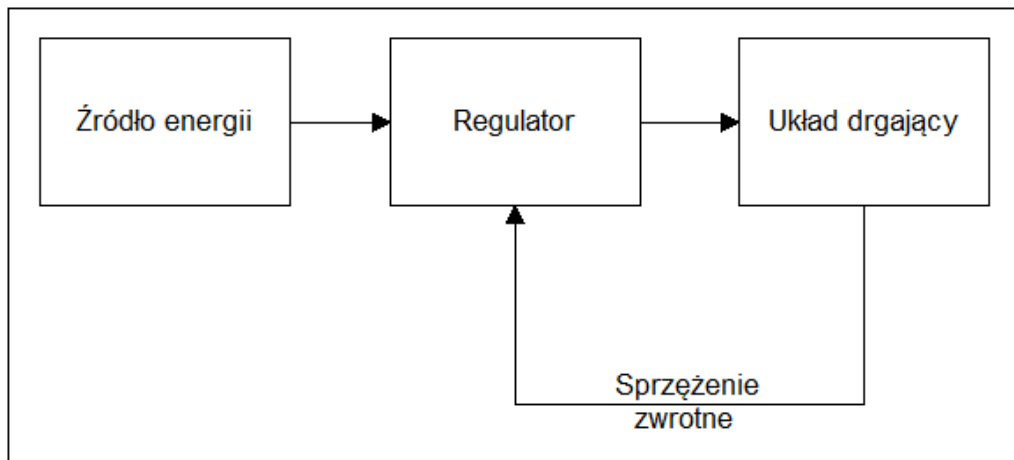
6. Drgania samowzbudne

Układy samowzbudne charakteryzują się tym, że występuje dopływ energii z zewnątrz, który powoduje narastanie drgań lub podtrzymywanie drgań okresowych poprzez kompensację strat.

Układ taki charakteryzuje się tym, że czas nie występuje jawnie w równaniu drgań, oraz źródło drgań jest stałe i nie zależy od czasu natomiast dopływ energii reguluje sam układ drgający.

Można wyróżnić tu cztery charakterystyczne elementy:

- stałe źródło energii,
- układ drgający,
- regulator dopływu energii czyli urządzenie regulujące dopływem energii,
- sprzężenie zwrotne pomiędzy układem drgającym i regulatorem, które pozwala na kierowanie dopływem energii, dzięki czemu układ taki może sterować własnym bilansem energetycznym – w efekcie tego pomimo strat występujących w układzie, mogą generować się niezanikające drgania okresowe.



Rys. 1. Elementy wchodzące w skład układu samowzbudnego

Drgania samowzbudne jak i wiele innych zjawisk w fizyce można rozpatrywać z punktu widzenia energetyki a przede wszystkim jako bilans energetyczny danego zjawiska.

Układ drgań samowzbudnych można przedstawić w następujący sposób. Zakładając że drgania już występują w układzie, ich energia powinna maleć z powodu nieuniknionych strat lub przekazywania ich energii do użytkownika. Jednak pomimo tego ubytek ich energii uzupełniany jest kosztem źródła, gdzie pewna porcja energii zostaje przepuszczona przez zawór do układu drgającego w sposób periodyczny.

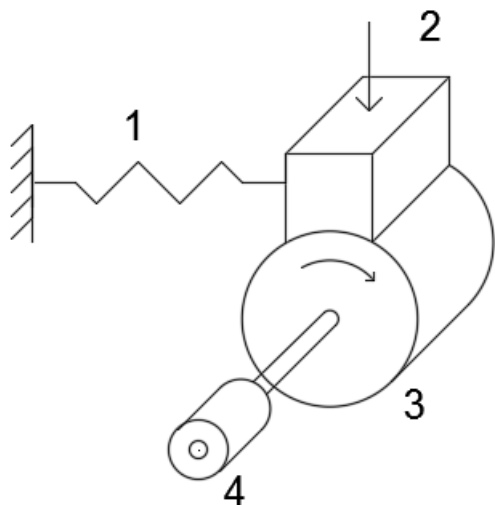
Może się tutaj zdarzyć sytuacja, że dostarczana energia będzie równa idealnie stratom w układzie, co spowoduje powstanie drgań ustalonych o stałej amplitudzie, niezanikających w czasie. Jest to wartość określająca warunek równowagi bilansu energii, który można przedstawić jako warunek istnienia drgań niezanikających. W momencie gdy wartość ta zostanie zachwiana czyli przykładowo dostarczana energia będzie mniejsza, to występujące drgania będą zanikać. Jednak gdy dostarczana energia ze źródła będzie większa to występujące drgania będą narastać.

Przykładowe układy samowzbudne w technice:

- regulatory silników (regulator Watta w maszynie parowej),
- urządzenia akustyczne (sprzęganie mikrofonu z głośnikami),
- urządzenia z występującym tarcie suchym,
- zjawiska aerodynamiczne.

6.1. Drgania wywołane siłami tarcia suchego

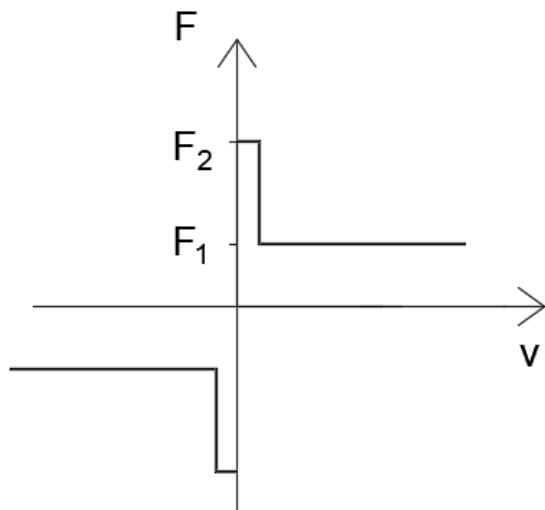
Drgania wywołane siłami tarcia suchego są to często spotykane drgania samowzbudne związane z efektem skrzywienia. Skrzywienie powstaje gdy jedno ciało ślizga się po drugim. W momencie gdy na ciało sprężyste, które przylega do innego ciała działa siła styczna można zaobserwować, że początkowo występuje tylko odkształcenie ciała sprężystego, natomiast nie występuje ruch wzdłużny względem powierzchni, na której stykają się ciała. Brak tego ruchu spowodowany jest występowaniem siły tarcia spoczynkowego pomiędzy danymi ciałami. Ruch występuje dopiero w momencie gdy ciało osiągnie maksymalne odkształcenie oraz siła styczna przekroczy granicę tarcia spoczynkowego. W takim przypadku nastąpi zerwanie powierzchni styku i ciała przesuną się względem siebie - skokowo o daną wartość przesunięcia. Taki efekt będzie się powtarzał. Przykład takiego układu został zamieszczony na rysunku.



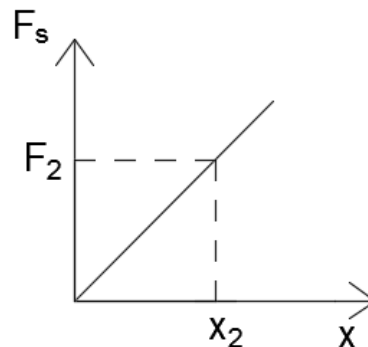
Rys. 2. Mechanizm samowzbudny: 1 sprężyna, 2 klocek, 3 koło zamachowe, 4 silnik.

Silnik 4 obraca kołem zamachowym 3, na którym zamieszczony jest klocek 2, który jest dociskany. Sprężyna 1 przytrzymuje klocek, aby się nie przesuwał. Występujące tarcie pomiędzy kołem zamachowym 3 oraz klokiem 2 powoduje, że sprężyna 1 naciąga się aż do momentu, gdy siła reakcji sprężyny będzie większa niż występująca siła tarcia pomiędzy klokiem a kołem. W tym momencie gdy zostanie osiągnięta wartość krytyczna i siła reakcji sprężyny będzie większa od siły tarcia, klocek oderwie się na kierunku stycznym od ciała 3, a sprężyna przyciągnie go do poprzedniego położenia. Takie działanie układu jest możliwe ze względu na duże różnice pomiędzy tarciem spoczynkowym a tarciem przy poślizgu. W tym przypadku zasadnicze znaczenie dla układów samowzbudnych ma charakterystyka tarcia czyli zależność siły tarcia od prędkości względnej ciała, na które działa ta siła.

Uproszczając zależności rzeczywiste można założyć, że charakterystyka tarcia będzie mieć postać jak na rysunku, czyli że siła tarcia spoczynkowego przy prędkości poślizgu równej 0 ma wartość F_2 . Zakłada się również że siła tarcia poślizgu F_1 nie jest zależna od prędkości względnej.



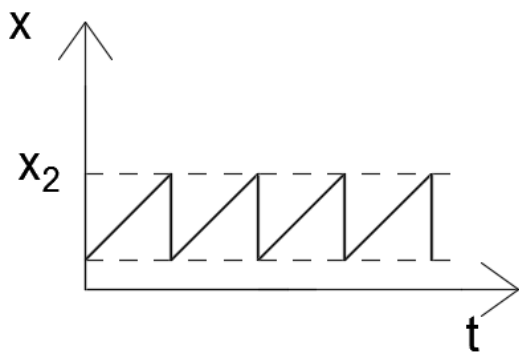
Rys. 3. Charakterystyka tarcia



Rys. 4. Charakterystyka sprężyny

Uwzględniając taką charakterystykę tarcia oraz charakterystykę sprężyny można znaleźć takie położenie klocka x_2 , w którym nastąpi zerwanie. Położenie to można określić na podstawie zależności siły sprężystej F_s od wydłużenia sprężyny x , co zostało przedstawione na rysunku.

Zwykle w celu uproszczenia pomija się wpływ masy klocka, w efekcie czego uzyskuje się ruch klocka jak na rysunku.

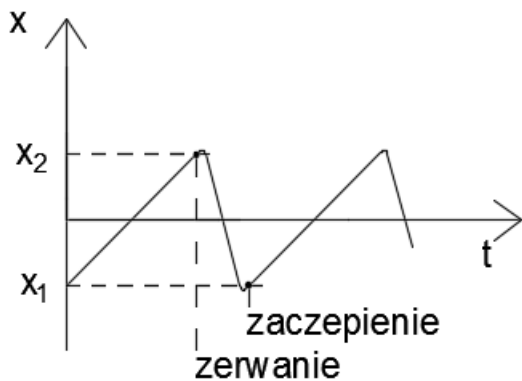


Rys. 5. Przemieszczenie klocka w czasie

Dla tak przyjętych założeń układ nie wykonuje jeszcze drgań samowzbudnych gdyż istotne jest aby w momencie powtarzania się cyklu klocek i powierzchnia na obwodzie koła zamachowego po zerwaniu przyczepności osiągnęły znowu zerową prędkość względną co jest podstawą aby wystąpiło tarcie spoczynkowe.

W tym przypadku nie dzieje się tak gdyż klocek porusza się w kierunku przeciwnym niż koło zamachowe lub pozostaje w spoczynku. Gdy klocek jest w spoczynku to prędkość względna nie osiąga wartości 0 przez co siła tarcia staje się siłą tarcia poślizgowego i powoduje tylko stałe rozciągnięcie sprężyny.

Aby otrzymać rzeczywisty opis zjawiska należy zrezygnować z jednego uproszczenia i przyjąć masę klocka. Spowoduje to, że w chwili zerwania przyczepności prędkość klocka będzie się zmieniać przypominając przebieg podobny do sinusoidalnego. Częstota tej sinusoidy będzie częstotliwością własną drgań układu, który składa się ze sprężyny i masy klocka. W momencie powrotu klocka na skutek bezwładności klocek przechodzi przez położenie w którym sprężyna jest napięta i zaczyna działać ściskająco na sprężynę. W efekcie czego gdy osiągnie skrajne lewe położenie, zaczyna ponownie przemieszczać się w prawo z dodatkową energią pochodzącą od ściśniętej sprężyny. Powoduje to że w pewnym momencie osiąga on taką samą prędkość jak prędkość obwodowa koła zamachowego, przez co jego prędkość względem powierzchni koła staje się zerowa a klocek łączy się z kołem i razem z nim zaczyna się poruszać do następnego zerwania. Ruch ten został przedstawiony na rysunku. W miejscu gdzie $x=0$, klocek znajduje się w położeniu przy nienaciągniętej sprężynie.



Rys. 6. Ruch klocka w czasie z uwzględnieniem masy

Można zauważyć, że przy nieciągłej charakterystyce tarcia, występowanie niezanikających drgań samowzbudnych jest możliwe do wyjaśnienia tylko wówczas, jeżeli pod uwagę weźmie się masę układu drgającego. Analizując poszczególne części składowe takiego układu drgającego można zauważyć występowanie podstawowych elementów występujących w układzie drgającym samowzbudnie:

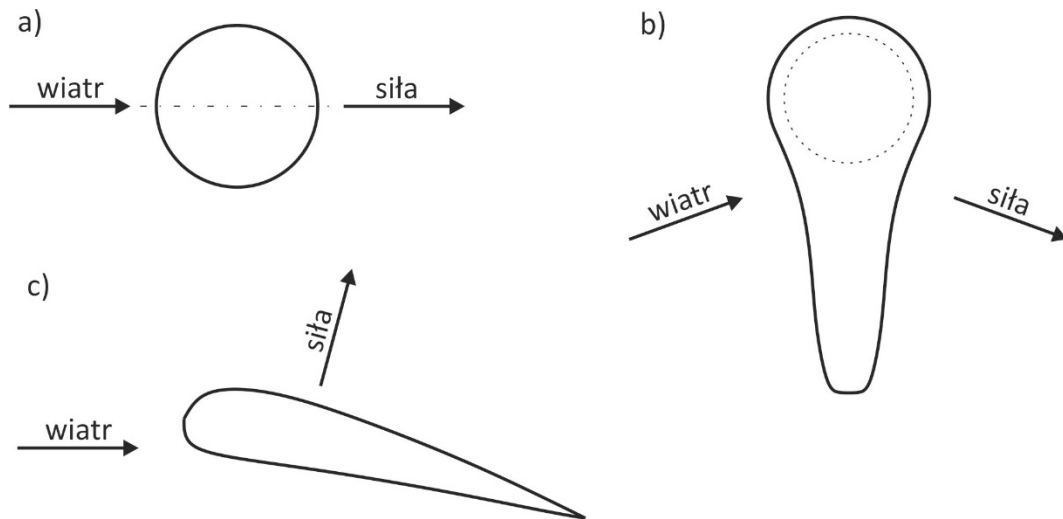
- źródłem energii jest silnik,
- układem drgającym jest sprężyna lub masa klocka i sprężyna,
- rolę regulatora (zaworów) spełniają powstające więzy, które łączą klocek z kołem w momencie występowania tarcia spoczynkowego, lub puszczenie klocka w momencie zerwania.
- jako sprzężenie zwrotne pomiędzy układem drgającym a zaworem występuje siła sprężystości sprężyny, która powoduje oderwanie klocka w określonym położeniu.

6.2. Galopowanie przewodów elektrycznych

Zauważono, że przy pewnych warunkach atmosferycznych przewody elektryczne wysokiego napięcia drgają z dużymi amplitudami i bardzo małą częstością. Przewody te są drutami o przekroju kołowym, rozciągniętymi między słupami odległymi o około 90 m. Drut drga w postaci jednej lub dwu półfal, z amplitudą rzędu 3 m w środku rozpiętości i z częstością 1 Hz lub mniej. Ze względu na charakter tego zjawiska nazywa się je „galopowaniem”, a nie drganiem. Zjawiska tego nie zauważono nigdy w kraju o ciepłym klimacie, natomiast występuje prawie każdej zimy w północnych stanach USA i w Kanadzie, kiedy temperatura waha się około 1°C i gdy wieje silny, boczny wiatr. W większości takich przypadków znajdowano na drucie śnieg. Przybliżone obliczenie pokazuje, że częstość drgań własnych odcinka przewodu rozpiętego między dwoma słupami jest tego samego rzędu co częstość zaobserwowana. Fakt, że drgania raz rozpoczęte są bardzo gwałtowne i trwają czasem 24 godziny, wskazuje na to, że nie można ich uważać za drganie wymuszone. Gdyby bowiem były to drgania wymuszone, to podmuchy wiatru musiałyby mieć częstość równą dokładnie częstości drgań własnych przewodów. Niech dla przykładu $T=1$ s i jeżeli w ciągu 10 min mielibyśmy nie 600, a 601 równoodległych podmuchów wiatru, to drgania wzrastałyby w ciągu pierwszych pięciu minut i malałyby w ciągu następnych pięciu minut. Aby utrzymać drgania przewodów w ciągu 2 godzin błąd w dokładności podmuchów wiatru musiałby być mniejszy niż $1/7200$, co jest zupełnie nieprawdopodobne.

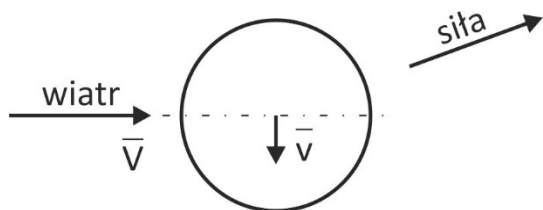
Mamy tu do czynienia z przypadkiem drgań samowzbudnych wywołanych działaniem wiatru na przewody, które na skutek przymarzania do nich śniegu zmieniają swój przekrój i przestają być okrągłe. Wyjaśnienie tego zjawiska wymaga znajomości kilku podstawowych zasad z aerodynamiki.

Kiedy wiatr odmuchuje okrągły cylinder (rys. 7a), wtedy siła pochodząca od wiatru jest z nim zgodna co do kierunku. Jest to oczywiste i wynika z symetrii. W przypadku cylindra o przekroju niekołowym (rys. 7b) twierdzenie takie nie jest słuszne, ponieważ wówczas siła jest odchylna od kierunku wiatru o pewien kąt. Przykładem tego jest skrzydło samolotu, w przypadku którego siła jest prawie prostopadła do kierunku wiatru (rys. 7c).



Rys. 7. Dla niesymetrycznych przekrojów kierunek wiatru i kierunek wywołanej przez niego siły nie pokrywają się

Rozpatrzmy przewód elektryczny podczas występowania galopowania i zwróćmy uwagę na ruch w dół. Jeżeli nie ma wiatru, to przewód będzie odczuwał podmuch skierowany w górę. Kiedy pojawi się wiatr poziomy o prędkości V , na przewód poruszający się w dół z prędkością v będzie dmuchał wiatr skierowany lekko w górę pod kątem $\arctg(v/V)$.



Rys. 8. Poziomy boczny wiatr skierowany jest w górę względem poruszającego się w dół przewodu

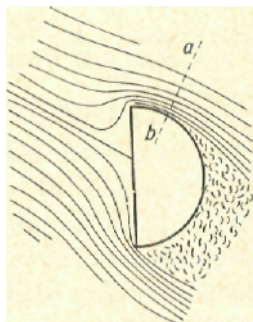
Jeżeli przewód ma przekrój kołowy, to siła wywołana przez ten wiatr będzie posiadała małą składową skierowaną w górę (rys. 8). Ponieważ przewód porusza się w dół, składowa ta jest siłą skierowaną przeciwnie do kierunku ruchu przewodu i tłumi ten ruch. Dla przekrojów *niekołowych* może się jednak zdarzyć, że pochodząca od wiatru siła ma składową skierowaną w dół, z czym związane jest istnienie ujemnego tłumienia (rys. 7b).

Rozważając w podobny sposób warunki, jakie występują podczas ruchu przewodu w górę widzimy, że względny wiatr wieje na przewód z góry pod pewnym kątem, a siła, z jaką działa on na okrągły przewód, ma składową skierowaną w dół, która tłumi ruch. Dla przekroju niekołowego siła może mieć skierowaną w górę składową, która mając ten sam kierunek co ruch działa tak, jak ujemne tłumienie.

Jeżeli zamrożony na przewodzie śnieg ma przekrój, który powoduje, że zależność pomiędzy kierunkiem wiatru a siłą jest taka, jak na rys. 7b, to mamy do czynienia z dynamiczną niestatecznością. Kiedy z jakiegoś powodu drut ma małą prędkość skierowaną w górę, wskutek działania wiatru występuje wtedy jeszcze większy ruch do góry aż do chwili, kiedy siła sprężystości drutu nie zatrzyma go. Następnie siła ta powoduje ruch drutu na dół, w czym znów pomaga wiatr i dlatego małe drgania szybko powiększają się.

6.3. Przekroje niestateczne dynamicznie

Pozostaje nam jeszcze do określenia, które przekroje są dynamicznie stateczne (podobnie jak przekrój okrągły), a które są niestateczne. Wprowadza nas to w zakres aerodynamiki nieregularnych przekrojów. Zazwyczaj możemy zrobić tylko bezpośrednie doświadczenie, ale w niektórych przypadkach również rozważania jakościowe dają pewne informacje. Najbardziej „niestatecznym” ze znanych przekrojów jest półkole odwrócone płaską stroną w kierunku wiatru.

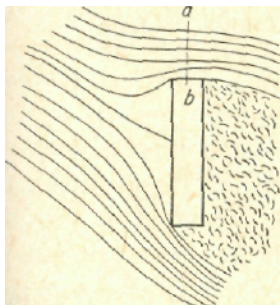


Rys. 9. Optyw powietrza wokół cylindra o półkolistym przekroju

Na rysunku 3 przedstawiono taki przekrój w przepływie wiatru wiejącego nieco z góry, co podczas galopowania odpowiada ruchowi przewodu w górę. Strumień powietrza odrywa się na ostrej, dolnej krawędzi przekroju, ale na pewnej długości może optywać górną powierzchnię. Związane jest to z tym, że wiatr wieje na przewód z góry.

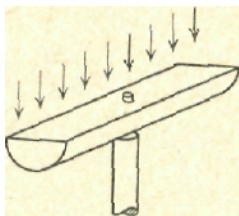
Obszar pokryty kreseczkami jest obszarem zawirowań, o którym wiadomo tylko tyle, że średnie ciśnienie jest tam zbliżone do atmosferycznego. Na dolnej połowie powierzchni cylindra mamy ciśnienie atmosferyczne, tzn. ciśnienie jakie panuje w pewnej odległości od przewodu, gdzie nie ma zakłóceń. Ponad przekrojem linie przepływu zakrzywiają się w dół. Oznacza to, że ciśnienie maleje, gdy przechodzimy od a do b , co można wytłumaczyć w następujący sposób. Rozpatrzmy cząstkę powietrza w linii prądu. Gdyby nie działały na nią żadne siły, to poruszałaby się ona po linii prostej. Ponieważ jej tor jest zakrzywiony w dół, musi więc istnieć siła działająca na nią z góry. Siła ta może być wywołana tylko przez różnicę ciśnień panujących nad i pod cząstką, zatem ciśnienie w punkcie a musi być większe niż w punkcie b . Ponieważ w punkcie a ciśnienie równe jest atmosferycznemu (niezakłóconemu), więc w punkcie b ciśnienie musi być niższe od atmosferycznego. W związku z tym na przekrój w kształcie półkola działa skierowana w górę siła na skutek różnicy ciśnień panującej między górną a dolną powierzchnią. Dlatego też przedstawiony na rys. 9 przypadek należy uznać za zdecydowanie niestateczny.

Innym niestatecznym przekrojem jest wydłużony prostokąt wystawiony szerszym bokiem na działanie wiatru (rys. 10). Wyjaśnienie niestateczności jest tu identyczne, jak dla pręta półkolistego (rys. 9), z tą różnicą, że sam efekt jest mniejszy. Efekt ten można łatwo zaobserwować na płaskiej desce trzymanej w ręce za jeden koniec, której drugi koniec jest zanurzony w zbiorniku z wodą. Kiedy deskę ciągniemy przez wodę tak, że szerszy bok jej przekroju jest prostopadły do kierunku ruchu, wówczas ruch jej jest zygzakowaty. Natomiast w przypadku kiedy węższy bok przekroju jest prostopadły do kierunku ruchu wtedy deska porusza się w sposób prawie ustalony.



Rys. 10. Opływ powietrza wokół pręta o prostokątnym przekroju

Jeżeli przekrój niestateczny umocujemy obrotowo w środku i umieścimy przed wentylatorem tak, jak na rys. 11, to będziemy mieli do czynienia ze zjawiskiem obrotu samowzbudnego. Gdy przyrząd taki znajduje się w spoczynku, wówczas wiatr nie działa na niego żadnym momentem, ale gdy tylko zacznie się on obracać, natychmiast pojawia się moment pochodzący od wiatru, który współdziała z obrotem. Kierunek obrotu zależy oczywiście tylko od wychylenia początkowego, które na ogół jest przypadkowe. Ta bardzo ciekawa zabawka znana jest jako „powietrzny wirnik” Lanchestera.

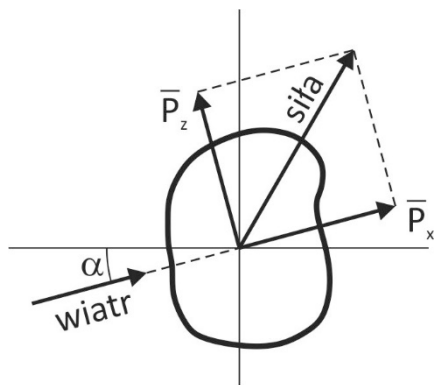


Rys. 11. Wirnik Lanchestera

W aerodynamice całkowitą siłę działającą na ciało rozkłada się na dwie składowe:

- a) opór P_x - skierowany wzdłuż kierunku wiatru, i
- b) siłę nośną P_z - prostopadłą do kierunku wiatru.

Obydwie te siły można łatwo zmierzyć w tunelu aerodynamicznym za pomocą specjalnych urządzeń (tzw. wag aerodynamicznych).



Rys. 12. Całkowita siła wiatru rozłożona na siłę nośną P_z i opór P_x

Niech rys. 12 przedstawia drgający przekrój w chwili, kiedy porusza się on w dół, wskutek czego pozorny wiatr wieje od dołu pod kątem $\alpha = \arctg(v/V)$. Siła nośna P_z i opór P_x mają składowe pionowe skierowane w górę (tzn. składowe skierowane przeciwnie do ruchu) równe odpowiednio $P_z \cos \alpha$ i $P_x \sin \alpha$. Całkowita siła tłumiąca F działa w górę i wynosi

$$F = P_z \cos \alpha + P_x \sin \alpha \quad (1)$$

Nie jesteśmy zainteresowani samą siłą F , ale raczej jej pochodną $dF/d\alpha$, tzn. zmianą siły F wywołaną zmianą kąta α , albo zmianą stosunku v/V . Przyjmijmy, że siła F jest duża, a pochodna $dF/d\alpha$ jest równa zero. W takim razie część ciężaru przewodów nie będzie przenoszona przez słupy, a będzie bezpośrednio równoważona przez wiatr. Jeżeli $dF/d\alpha = 0$, to jakiegokolwiek drgania lub galopowania przewodów nie zmienią ciężaru równoważonego przez wiatr i drgania pozostaną bez zmian. Załóżmy teraz, że $dF/d\alpha$ jest ujemne. Oznacza to, że siła wiatru skierowana w górę wzrasta dla ujemnych kątów α i maleje dla α dodatnich. W takim przypadku mamy — o czym była mowa poprzednio — wymuszające działanie siły. Wobec powyższego mamy następujące kryteria stateczności dynamicznej

$dF/d\alpha < 0$ - ruch niestateczny,

$dF/d\alpha > 0$ - ruch stateczny.

Różniczkując wyrażenie (1) należy zwrócić uwagę, że dla małych drgań v jest bardzo małe w stosunku do V . W takim razie mały jest kąt α i jego cosinus możemy przyjąć równy jedności, natomiast sinus jest znikomo mały w porównaniu z jednością. Zatem

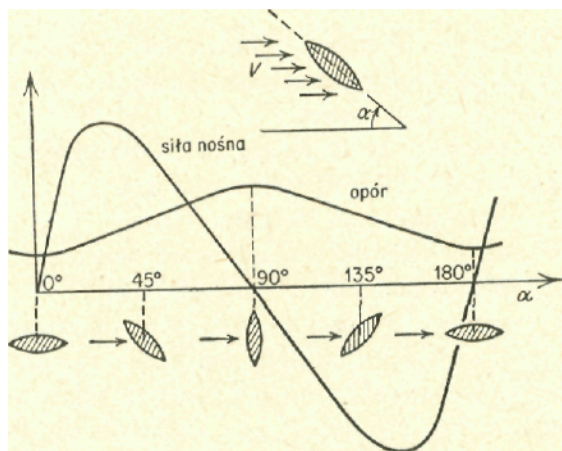
$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\alpha} &= \frac{dP_Z}{d\alpha} \cos\alpha - P_Z \sin\alpha + \frac{dP_X}{d\alpha} \sin\alpha + P_X \cos\alpha = \sin\alpha \left(-P_Z + \frac{dP_X}{d\alpha} \right) + \\ \cos\alpha \left(\frac{dP_Z}{d\alpha} + P_X \right) &\approx \frac{dP_Z}{d\alpha} + P_X \end{aligned} \quad (2)$$

Tak więc układ będzie *niestateczny* wtedy, kiedy

$$\frac{dP_Z}{d\alpha} + P_X < 0 \quad (3)$$

Wartości siły nośnej i oporu dowolnego przekroju nie można obliczyć teoretycznie, ale można je uzyskać z pomiarów tunelowych. Wyniki pomiarów podaje się zazwyczaj w postaci takiego wykresu, jak przedstawiony na rys. 13. Zależność (3) możemy wyrazić słowami w następujący sposób.

„Przekrój jest dynamicznie niestateczny wtedy, kiedy ujemne pochylenie krzywej siły nośnej jest większe od rzędnej krzywej oporu”.



Rys. 13. Siła nośna i opór przekroju soczewkowego w zależności od kąta natarcia

Z rysunku 13 widać, że przekrój soczewkowy ustawiony „wzdłuż” wiatru ($\alpha = 0$) jest zawsze stateczny, natomiast ustawiony „w poprzek” wiatru ($\alpha = 90^\circ$) jest niestateczny. Przewody elektryczne z przymarzniętym śniegiem w temperaturze zbliżonej do temperatury zamarzania mają tendencję do formowania sopli, które są mniej lub bardziej wydłużone w kierunku pionowym. Na wykresie odpowiada temu przypadek $\alpha = 90^\circ$.

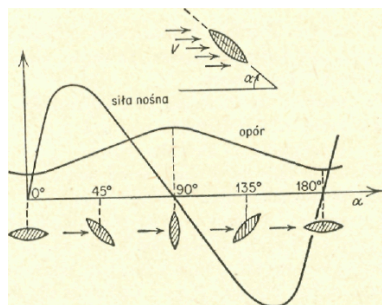
Przy tym kącie i przy małych amplitudach drgań (kiedy kąt zmienia się na przykład między 89° a 91°), podczas każdego okresu dostarczana jest energia. Wskutek tego następuje wzrost amplitudy, który trwa dotąd, dopóki istnieje nadmiar energii dostarczanej przez wiatr. Przy pewnej dużej amplitudzie ten nadmiar energii będzie równy zero, nastąpi wtedy równowaga energii i osiągnięta zostanie ostateczna amplituda. Prawdopodobnie będzie to występowało przy α zmieniającym się między 30° a 150° (rys. 13). W pobliżu skrajnych położeń ma miejsce dopływ energii, natomiast w środku skoku energia jest rozpraszana przez tłumienie, ponieważ wtedy $dP_Z/d\alpha + P_X$ jest większe od zera. Ostateczną amplitudę można znaleźć wykonując, na podstawie znanej krzywej, całkowanie graficzne lub numeryczne.

Omówione drgania przewodów charakteryzują się bardzo małą częstością i dużą amplitudą. Obserwuje się je rzadko, tylko wtedy, kiedy istnieje silny boczny wiatr i obmarzanie przewodów. Częściej występuje inny rodzaj drgań przewodów elektrycznych, charakteryzujący się wysoką częstością i małą amplitudą. Do wywołania tych drgań potrzebny jest jedynie boczny wiatr. Zjawisko to można wytłumaczyć za pomocą „ścieżki wirowej Karmana”.

6.4. Flatter skrzydła samolotu

Innym przykładem drgań samowzbudnych występujących w aerodynamice jest flatter skrzydeł samolotu. W niektórych samolotach latających z dużymi prędkościami, szczególnie w czasie nurkowania, zaobserwowano bardzo gwałtowne drgania skrzydeł. W pewnych przypadkach drgania te były tak silne, że powodowały złamanie skrzydła w locie. Zjawisko to ma więc duże znaczenie podczas projektowania samolotów, gdyż niebezpieczne drgania skrzydeł, które powstają przy określonej prędkości lotu, mogą w bardzo szybki sposób doprowadzić do ich zniszczenia.

Można spróbować wyjaśnić to zjawisko analogicznie do zjawiska opisanego w punkcie 6.2. (Galopowanie przewodów elektrycznych). Dla „przecigniętych” skrzydeł pochylenie krzywej wyporu (siły nośnej) jest ujemne (rys. 13) i ruch wolnonośnego skrzydła w górę i w dół jest niestateczny. Zaobserwowano jednak, że warunki takie nie występują przy typowym „flutterze”, podczas którego kąt natarcia skrzydła jest mały, a pochylenie krzywej siły nośnej jest zdecydowanie dodatnie, co przy rozumowaniu takim jak w punkcie 1 prowadzi do tłumienia dodatniego.

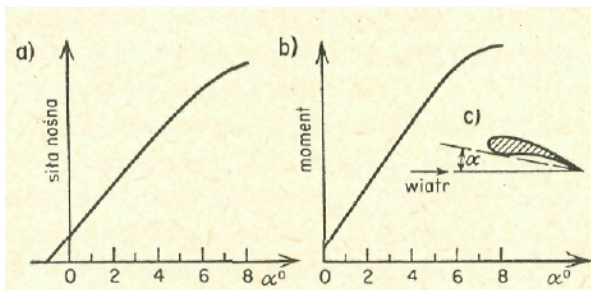


Rys. 13. Siła nośna i opór przekroju soczewkowego w zależności od kąta natarcia (powtórzenie)

Musimy więc rozróżnić „flutter oderwania (przeciągnięcia)” występujący przy dużych kątach natarcia ($\alpha > 15^\circ$) i „flutter klasyczny” przy małych kątach natarcia. Flutter przeciągnięcia jest bardzo istotny w przypadku łopatek turbin, szczególnie w łopatkach sprężarek silników odrzutowych. Przy okazji badania tego zjawiska natrafiono na szereg poważnych problemów. Flutter skrzydeł i usterzeń jest niesłychanie ważny, szczególnie dla samolotów osiągających i przekraczających prędkość dźwięku.

Próby wyjaśnienia tego zjawiska przy uwzględnieniu jednego stopnia swobody (dla przykładu gdy skrzydło drga tylko w górę i w dół, tak jak belka wspornikowa) są bezowocne. Mamy tu do czynienia z innym przypadkiem sprzężonego układu o dwóch stopniach swobody, ponieważ skrzydło porusza się nie tylko w górę i w dół, ale jednocześnie wykonuje ruch skrętny. Wzajemne oddziaływanie drgań pionowych i skrętnych, w obecności strumienia powietrza jako źródła energii, może prowadzić do niestateczności.

Pierwszym etapem wyjaśnienia tego zjawiska niech będzie zaznajomienie się z charakterystyką sił działających na skrzydło. Dla pewnej wartości kąta natarcia (zdefiniowanego na rys. 14c), na skrzydło działa siła nośna i moment skręcający, zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Podczas gdy skrzydło wykonuje drgania skrętne, kąt α zmienia się i dlatego należy znaleźć zależność siły nośnej i momentu od tego kąta. Zależności te, otrzymane na podstawie pomiarów tunelowych przedstawiono graficznie na rys. 14a i b. Dla normalnych kątów lotu α (od 0° do 10°) zależności te są liniowe.



Rys. 14. Zależność pomiędzy siłą nośną i momentem, a małymi kątami natarcia jest liniowa

Samo zjawisko flatteru, kiedy już istnieje, można od strony fizycznej wyjaśnić w dosyć prosty sposób. Przyjmijmy, że pionowe i skrętne ruchy skrzydła są takie, że kąt α jest większy podczas ruchu w górę niż podczas ruchu w dół. Wówczas, zgodnie z rys. 14a siła nośna podczas ruchu skrzydła w górę jest większa (jeśli kąt α rośnie) niż podczas ruchu w dół, co oznacza, że wiatr dostarcza energii. Również z rys. 14b wynika, że energia może być dostarczana przez wiatr. Jeżeli więc skrzydło jednocześnie unosi się i skręca w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, to do układu będzie dostarczona energia i drgania będą narastały.

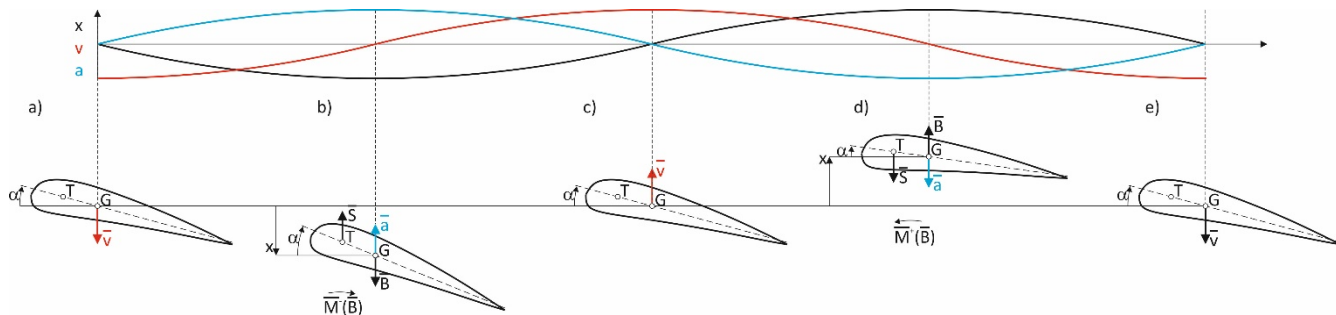
W wyjaśnieniu powstawania zjawiska flatteru najbardziej problematyczne jest wykazanie, że możliwa jest sytuacja, kiedy podczas ruchu skrzydła w górę kąt natarcia rośnie. Przecież w normalnych warunkach podczas ruchu skrzydła w górę siła nośna maleje, ponieważ zmniejsza się kąt natarcia. Jak więc wyjaśnić powstanie flatteru? Widać już chyba, że wyjaśnienie mechanizmu powstawania zjawiska flatteru nie jest tak trywialne jak samo pokazanie na czym ono polega.

Energia, która jest konieczna do wzbudzenia drgań zostaje dostarczona poprzez przepływający strumień powietrza, który wytwarza siłę nośną skierowaną w górę, dzięki czemu utrzymuje samolot w powietrzu. Druga siła wytwarzana przez strumień powietrza to siła oporu, która działa w przeciwnym kierunku niż ruch samolotu. Siły te, stale działające, nie powodują powstawania drgań gdyż są skierowane przeciwnie do ruchu samolotu w efekcie czego generują opór dodatni. Aby występowały drgania siły muszą działać w tym samym kierunku co ruch czyli siły muszą generować tłumienie ujemne. Aby przedstawić mechanizm powstawania flatteru należy wyjaśnić jak powstają siły, które są zgodne w fazie z prędkością.

Skrzydło samolotu można interpretować jako belkę zamocowaną na jednym końcu, która może wykonywać drgania giętne oraz skrętne. Przy drganiach giętnych skrzydło porusza się w górę oraz w dół natomiast drgania skrętne powodują, że profil skrzydła obraca się wokół środka sztywności przez co zmniejsza lub zwiększa kąt natarcia skrzydła.

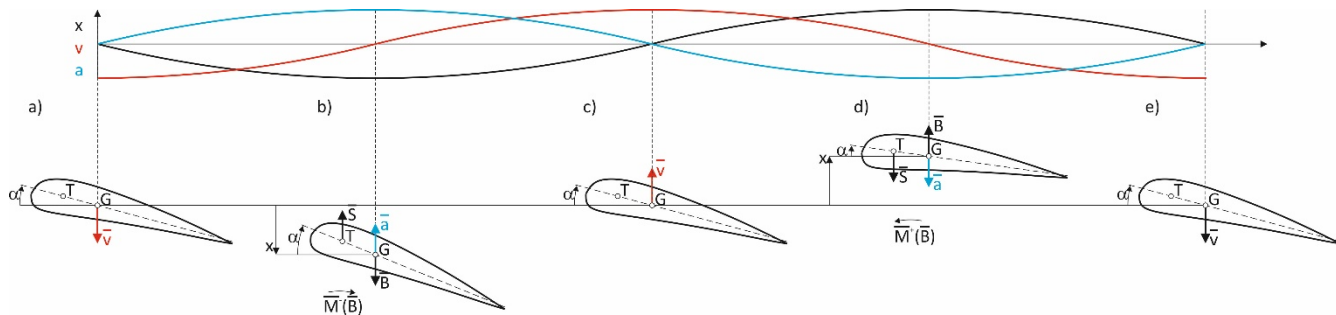
Istotne jest też, że kąt natarcia zmniejsza się w momencie gdy skrzydło odkształca się do góry, oraz zwiększa się w chwili gdy odkształca się w dół. Od wielkości kąta natarcia zależy siła nośna. W momencie gdy zwiększa się kąt natarcia generowany jest dodatkowy przyrost siły nośnej, który jest proporcjonalny do zmiany kąta, natomiast gdy kąt się zmniejsza to powstaje dodatkowa siła skierowana w dół. W obu przypadkach występująca siła działa w przeciwnym kierunku niż ruch skrzydła, w efekcie czego czysto gięte drgania nie powodują powstania drgań samowzbudnych. Podobna sytuacja występuje przy drganiach czysto skrętnych, gdyż w analogiczny sposób powstaje dodatkowy moment, który działa w przeciwnym kierunku niż obroty profilu skrzydła.

Aby wystąpiło zjawisko flatteru konieczne jest aby w tym samym momencie wystąpiły drgania gięte oraz skrętne, gdyż jedne powodują powstanie drgań drugiego rodzaju, co z kolei generuje pewną pętlę sprzężenia obu rodzajów drgań. Drgania giętno-skrętne nie są jeszcze automatycznie drganiami samowzbudnymi, ale mogą takimi być przy pewnych warunkach. Drgania giętno-skrętne przedstawiono na rys. 15.



Rys. 15. Mechanizm powstawania drgań giętno-skrętnych

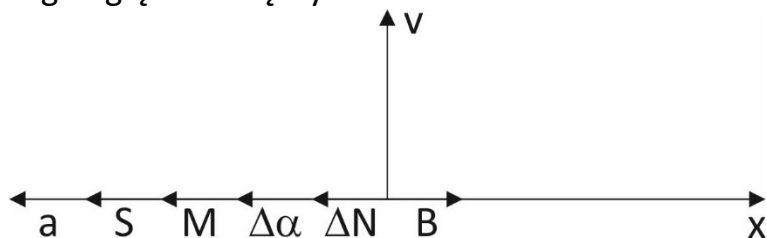
Rozpatrując przekrój skrzydła można wyróżnić dwa charakterystyczne punkty tj. G – środek ciężkości oraz T – środek sztywności. Oba punkty nie pokrywają się. W momencie gdy skrzydło ugina się i rozpoczyna z przyspieszeniem ruch ku dołowi, powstaje siła bezwładności, która jest skierowana w górę i ma punkt zaczepienia w środku ciężkości. Efektem działania tej siły jest powstanie momentu skręcającego, który jest proporcjonalny do wypadkowej siły działającej na pewnym ramieniu. Moment ten sprawia że skrzydło ulega skręceniu.



Rys. 15. Mechanizm powstawania drgań giętno-skrętynych

Przeanalizujemy poszczególne położenia przekroju skrzydła przedstawione na rys. 15. Na rys a) można zauważyć, że skrzydło jest w położeniu neutralnym i porusza się w dół. Przesunięcie i przyspieszenie jest równe zero natomiast prędkość osiąga wartość największą. W kolejnym etapie na rysunku b) skrzydło osiąga położenie najniższe. Prędkość wynosi zero natomiast przyspieszenie i przesunięcie jest maksymalne. Na skrzydło w przekroju działa siła sprężysta S która jest zaczepiona w środku sztywności i skierowana w górę. Natomiast siła bezwładności B zaczepiona w środku ciężkości przyjmuje zwrot przeciwny niż siła S . Obie te siły tworzą parę, która powoduje skręcanie profilu zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Kolejne położenie pokazane na rysunku c) to znowu położenie neutralne, ale skrzydło tym razem porusza się w górę. W położeniu na rysunku d) skrzydło osiąga najwyższe położenie, działające siły zmieniają zwroty w stosunku do przypadku b), w efekcie czego działa odwrotny moment i skrzydło skręca się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Ostatnie położenie to znowu położenie neutralne.

Na rysunku 16 zostały przedstawione zależności fazowe występujące w mechanizmie drgań giętno-skrętnych.



Rys. 16. Wykres wektorowy występujących wielkości

Rysunek 15 przedstawia wykres wektorowy omawianych zmiennych:

x – przesunięcie przekroju skrzydła,

v – prędkość przekroju skrzydła,

a – przyspieszenie przekroju skrzydła,

$\Delta\alpha$ – przyrost kąta obrotu przekroju skrzydła,

S – siła sprężystości,

B – siła bezwładności,

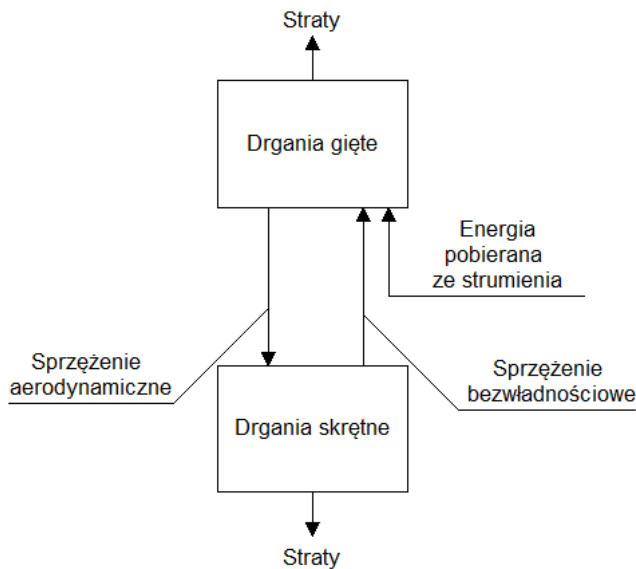
M – moment skręcający wywołany działaniem sił, który wywołuje obrót skrzydła o kąt $\Delta\alpha$.

Z racji tego, że częstotliwość drgań skrętnych jest większa od częstotliwości drgań giętnych, to przeciw skręcaniu opór skrzydła ma charakter sprężysty a nie bezwładny. Dlatego kąt α zmienia się o wartość $\Delta\alpha$ zgodnie w fazie z momentem M .

Kąt $\Delta\alpha$ przedstawia dodatni wzrost kąta natarcia w obranych kierunkach. Siła nośna zwiększa się o przyrost ΔN proporcjonalnie do zwiększenia kąta natarcia, czyli jest zgodna z nim w fazie. W efekcie tego zmiana ΔN jest również proporcjonalna do przyspieszenia.

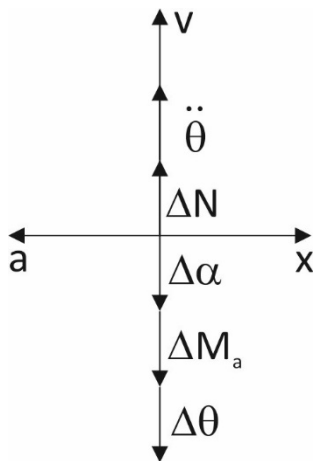
Taki związek drgań skrętnych i giętych skrzydła nie wyjaśnia jeszcze zjawiska drgań samowzbudnych. Aby je wyjaśnić, drgające w opisany sposób skrzydło należy teraz umieścić w strumieniu przepływającego powietrza.

Z dotychczasowej analizy wynika, że drgania gięte są przyczyną powstania drgań skrętnych poprzez okresową zmianę kąta natarcia, co z kolei wpływa na zmianę momentu aerodynamicznego. Zmiana tego momentu powoduje, że powstają drgania skrętne, które z kolei za pośrednictwem sprzężenia bezwładnościowego pobudzają drgania gięte. Można interpretować to jako układ o dwóch stopniach swobody drgań z występującym sprzężeniem bezwładnościowym. W taki sposób uzyskuje się zamknięty układ drgań samowzbudnych ze sprzężeniem zwrotnym, oraz przekształceniem energii strumienia powietrza w energię drgań.



Rys. 16. Układ zamknięty drgań skrętnych i giętych

Pomiędzy sprzężeniem bezwładnościowym a sprzężeniem aerodynamicznym, pomimo że dotyczą tych samych drgań, występuje znaczna różnica. Podczas drgań samowzbudnych, przy sprzężeniu bezwładnościowym moment skręcający działa proporcjonalnie do przyspieszenia ruchu zginającego się skrzydła, natomiast sprzężenie aerodynamiczne sprawia że zmiana momentu aerodynamicznego ΔM_a jest proporcjonalna do prędkości ruchu zginającego v .



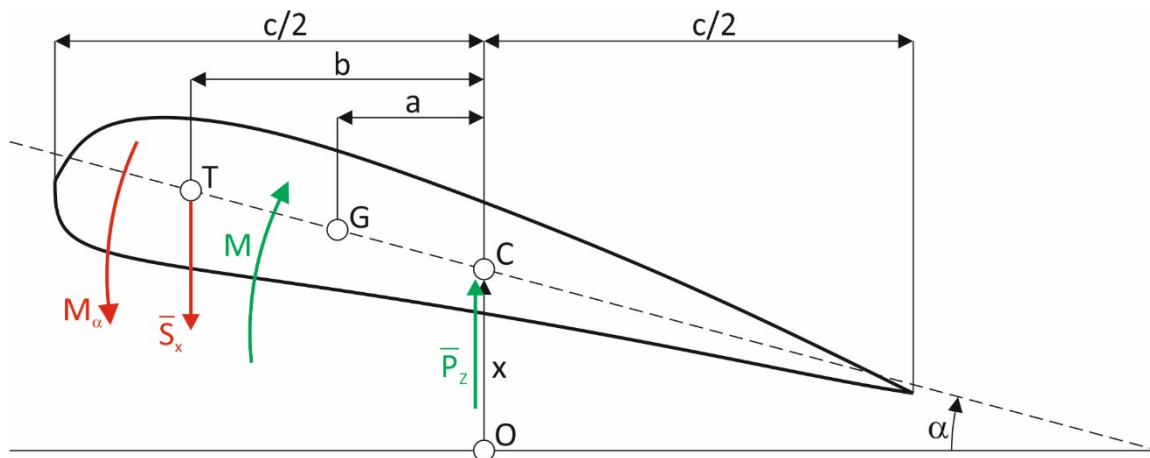
Rys. 17. Wykres wektorowy występujących wielkości podczas drgań samowzbudnych skrzydła

Zjawisko drgań samowzbudnych zachodzi, ponieważ występują odpowiednie warunki fazowe, czyli dodatkowa siła otrzymana ze sprzężenia zwrotnego jest zgodna w fazie z prędkością danego ruchu drgającego. Zobrazowane to zostało na rys 17. Podobnie jak na rysunku 15 przesunięcie x , prędkość v oraz przyspieszenie a nie zmienia się. Przez $\Delta \theta$ oznaczona została zmiana kąta natarcia wynikająca ze zmiany kąta skręcania $\Delta \alpha$, która jest o 180° przesunięta względem prędkości dlatego, że przy dodatniej prędkości przyrost kąta jest ujemny. ΔM_a oznacza dodatkowy moment aerodynamiczny, który

jest zgodny w fazie z $\Delta\theta$, jak również ze zmianą kąta skręcania $\Delta\alpha$. Przyspieszenie kątowe $\ddot{\theta}$ jest zgodne w fazie z prędkością v . Również przyrost siły ΔN , który jest uwarunkowany sprzężeniem bezwładnościowym, jest zgodny w fazie z prędkością v , dzięki czemu drgania samowzbudne są możliwe.

Innymi słowy dodatkowy moment aerodynamiczny ΔM_a sprzyja skręcaniu, a przyrost siły nośnej ΔN sprzyja zginaniu.

Przystępujemy teraz do analizy ilościowej flatteru skrętno-giętnego samego skrzydła bez lotki i rozpoczniemy od ustalenia różniczkowych równań ruchu. W rzeczywistości skrzydło zachowuje się w przybliżeniu tak, jak belka wspornikowa zamocowana do kadłuba. Dla uproszczenia przyjmiemy, że skrzydło jest ciałem sztywnym tak zawieszonym na sprężynach, że może się ono poruszać w górę i w dół oraz obracać się wokół swojej osi podłużnej.



Rys. 18. Przekrój skrzydła samolotu z dwoma charakterystycznymi punktami: środkiem ciężkości G i środkiem skreńca T

Na rysunku 15, początek współrzędnych O przyjęto w środku rozpiętości skrzydła w położeniu równowagi. Skrzydło odchyliło się od tego położenia (pokazano to na rysunku) o wielkości x i α . Poza środkiem rozpiętości C , również punkty G i T przekroju skrzydła odgrywają bardzo ważną rolę. Punkt G jest środkiem ciężkości i określa własności bezwładnościowe. Położenie punktu T określa własności sprężyste zawieszenia. Punkt T znany jest jako „środek skreńca” i zdefiniowany jest w następujący sposób: punkt T

jest to taki punkt na skrzydle, że przyłożona w nim pionowa siła wywołuje tylko przemieszczenie pionowe bez obrotu. Z drugiej strony T jest punktem, który pozostaje nieruchomy, gdy na skrzydło działa czysty moment skręcający. Te dwie własności punktu T występują zawsze razem, co można wykazać za pomocą twierdzenia Maxwella o wzajemności. Niech k_x będzie stałą sprężystości skrzydła dla wychyleń w górę i w dół, a k_α stałą sprężystości skrętnej skrzydła na jednostkę jego długości.

Niech P_Z będzie siłą nośną (funkcją x , α i czasu t), a M (również x , α i czasu t) niech oznacza moment wszystkich sil aerodynamicznych względem punktu O , przypadający na jednostkę rozpiętości, dodatni w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, $S_x = k_x(x + b\alpha)$ niech oznacza reakcję sprężystą przeciwdziałającą zginaniu (przemieszczeniu przekroju), $M_\alpha = k_\alpha\alpha$ niech oznacza reakcję sprężystą przeciwdziałającą skręcaniu (obrotowi przekroju). W takim przypadku różniczkowe równania ruchu mają postać:

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{x} + a\ddot{\alpha}) &= P_Z - S_x \\ I_G\ddot{\alpha} &= M - P_Z a - M_\alpha - S_x(b - a) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

lub

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{x} + a\ddot{\alpha}) + k_x(x + b\alpha) &= P_Z \\ I_G\ddot{\alpha} + k_\alpha\alpha + k_x(x + b\alpha)(b - a) &= M - P_Z a \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Występujące w tych równaniach wielkości $(x + a\alpha)$ i $(x + b\alpha)$ są odpowiednio pionowymi przesunięciami punktów G i T . Symbole m i I_G oznaczają masę i moment bez-

władności nie tylko samego skrzydła, ale również i części otaczającego powietrza. Zazwyczaj uwzględnia się cylinder powietrza o promieniu $c/2$. Choć wpływ ten jest mały w przypadku łopaty śmigła, jednakże jest on istotny w przypadku skrzydeł samolotu, których ciężar jest nie większy niż trzykrotny ciężar cylindra powietrza wokół nich.

Zmienna siła P_Z działająca na skrzydło jest tego samego rzędu co siły sprężyste i siły bezwładności. We wszystkich poprzednich rozważaniach siły wzbudzające (i siły tłumiące) były małe w porównaniu z siłami sprężystymi i bezwładności, w wyniku czego częstość rezonansowa była określona tylko stosunkiem k/m i była niezależna od siły wzbudzającej. Obecnie siła P_Z , będąca siłą tego samego rzędu co siła sprężystości, oddziałuje na częstość i występujący flutter będzie miał częstość zupełnie różną od którejkolwiek częstości drgań własnych konstrukcji w spokojnym powietrzu.

Dla przypadku ustalonego siła nośna P_Z (przypadająca na jednostkę długości skrzydła) równa jest $\frac{1}{2}V^2cC_Z$, a współczynnik siły nośnej C_Z jest proporcjonalny do kąta natarcia $\theta - (\dot{\alpha}/V)$ strumienia powietrza. W ostatnim wyrażeniu wyraz pierwszy jest oczywisty, drugi wynika stąd, że \dot{x} jest pionową składową prędkości powietrza przepływającego wokół skrzydła. Teoria ustaliła, że stałą proporcjonalności jest tu $2\pi\rho$, więc

$$P_Z = \frac{1}{2}V^2c2\pi\rho \left(\alpha - \frac{\dot{x}}{V} \right) = \pi\rho V^2c \left(\alpha - \frac{\dot{x}}{V} \right) \quad (6)$$

Zgodnie z prostą teorią opisującą skrzydło znajdujące się w podźwiewkowym, ustalonym przepływie siła nośna przyłożona jest w jednej czwartej cięciwy skrzydła i moment pochodzący od siły aerodynamicznej liczony względem środka ciężkości skrzydła wynosi

$$M = P_Z \frac{c}{4} = \pi \rho V^2 \frac{c^2}{4} \left(\alpha - \frac{\dot{x}}{V} \right) \quad (7)$$

Wstawiając wyrażenia (6) i (7) do układu równań (5) otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{x} + a\ddot{\alpha}) + k_x(x + b\alpha) &= \pi \rho V^2 c \left(\alpha - \frac{\dot{x}}{V} \right) \\ I_G \ddot{\alpha} + k_\alpha \alpha + k_x(x + b\alpha)(b - a) &= \pi \rho V^2 c \left(\frac{c}{4} - a \right) \left(\alpha - \frac{\dot{x}}{V} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

a po uporządkowaniu zmiennych zapiszemy ten układ równań w postaci

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + \pi \rho V c \dot{x} + k_x x + m a \ddot{\alpha} + (k_x b - \pi \rho V^2 c) \alpha &= 0 \\ \pi \rho V c \left(\frac{c}{4} - a \right) \dot{x} + k_x (b - a) x + I_G \ddot{\alpha} + \\ + \left[k_\alpha + k_x b (b - a) - \pi \rho V^2 c \left(\frac{c}{4} - a \right) \right] \alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

W celu analizy stateczności posłużymy się kryterium Routha, często stosowanym do analizy stateczności układów liniowych. W tym celu wykonamy transformację Laplace'a układu (9), otrzymując

$$\left. \begin{aligned} x(s)(ms^2 + \pi \rho V c s + k_x) + \alpha(s)(mas^2 + k_x b - \pi \rho V^2 c) &= 0 \\ x(s) \left[\pi \rho V c \left(\frac{c}{4} - a \right) s + k_x (b - a) \right] + \\ \alpha(s) \left[I_G s^2 + k_\alpha + k_x b (b - a) - \pi \rho V^2 c \left(\frac{c}{4} - a \right) \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Rugując z tych równań wielkości $x(s)$ i $\alpha(s)$ otrzymujemy równanie częstości:

$$\begin{aligned} & [ms^2 + \pi\rho Vcs + k_x] \left[I_G s^2 + k_\alpha + k_x b(b-a) - \pi\rho V^2 c \left(\frac{c}{4} - a \right) \right] - \\ & \left[k_x(b-a) + \pi\rho Vc \left(\frac{c}{4} - a \right) s \right] [mas^2 + k_x b - \pi\rho V^2 c] = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Po wymnożeniu i uporządkowaniu równanie częstości zapiszemy w następującej formie

$$\begin{aligned} & s^4 + \frac{\pi\rho Vc}{mI_G} \left(I_G + ma^2 - m \frac{ac}{4} \right) s^3 + \left[\frac{k_\alpha}{I_G} + \frac{k_x}{m} + \frac{k_x}{I_G} (b-a)^2 - \frac{\pi\rho V^2 c}{I_G} \left(\frac{c}{4} - \right. \right. \\ & \left. \left. a \right) \right] s^2 + \frac{\pi\rho Vc}{mI_G} \left[k_\alpha + k_x b \left(b - \frac{c}{4} \right) \right] s + \left[\frac{k_x k_\alpha}{mI_G} + \frac{\pi\rho V^2 k_x}{mI_G} c \left(b - \frac{c}{4} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Ogólna postać równania częstości to

$$s^4 + A_3 s^3 + A_2 s^2 + A_1 s + A_0 = 0 \quad (13)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{k_x k_\alpha}{mI_G} + \frac{\pi\rho V^2 k_x}{mI_G} c \left(b - \frac{c}{4} \right) \\ A_1 &= \frac{\pi\rho Vc}{mI_G} \left[k_\alpha + k_x b \left(b - \frac{c}{4} \right) \right] \\ A_2 &= \frac{k_\alpha}{I_G} + \frac{k_x}{m} + \frac{k_x}{I_G} (b-a)^2 - \frac{\pi\rho V^2 c}{I_G} \left(\frac{c}{4} - a \right) \\ A_3 &= \frac{\pi\rho Vc}{mI_G} \left(I_G + ma^2 - m \frac{ac}{4} \right) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

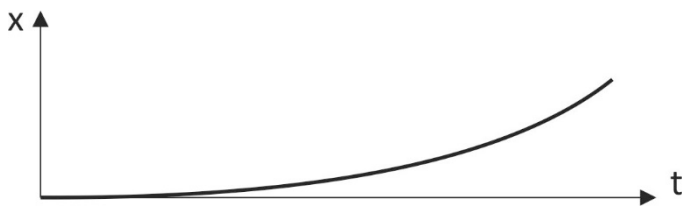
Jest to bardzo skomplikowane wyrażenie, w którym w zależności od wartości wielkości a i b (rys. 15) niektóre współczynniki mogą być ujemne. Rozpatrując najpierw współczynnik A_0 , widzimy, że drugi wyraz w tym nawiasie staje się ujemny dla $b < \frac{c}{4}$, tzn. wtedy, kiedy środek skręcania jest blisko środka ciężkości, co występuje w przypadku cienkiego symetrycznego profilu skrzydła. Układ jest niestateczny wtedy, kiedy A_0 jest ujemne, lub wyrażając to inaczej, kiedy

$$\pi\rho V^2 c \left(\frac{c}{4} - b \right) \geq k_\alpha \quad (15)$$

czyli

$$V^2 \geq \frac{4k_\alpha}{\pi\rho c(c-4b)} \quad (16)$$

Ostatnie wyrażenie ma bardzo prosty sens fizyczny: Jest to raczej statyczna niestateczność typu przedstawionego na rys. 16, niż prawdziwy flutter.



Rys. 16. Przebieg przemieszczenia układu w przypadku gdy jest on statycznie niestateczny

Wyobraźmy sobie niedrgające skrzydło tak umieszczone w przepływie, że nie występuje na nim żadna siła nośna (kąt natarcia równy zero). Wyobraźmy sobie dalej, że skrzydło to skrócono o kąt natarcia α , wskutek czego pojawiła się siła nośna równa $\pi\rho V^2 c\theta$, przyłożona w jednej czwartej cięciwy skrzydła. Ramię tej siły względem środka skręceń wynosi $c/4 - b$, a aerodynamiczny moment skręcający równa się

$$\pi\rho V^2 c\theta \left(\frac{c}{4} - b\right) \quad (17)$$

i równoważony jest przez moment sił sprężystości równy $k_\alpha\alpha$. Przy małych prędkościach lotu aerodynamiczny moment skręcający jest mniejszy od przeciwnie skierowanego momentu sił sprężystości i skrzydło powraca do położenia $\alpha = 0$. Jednakże przy pewnej prędkości obydwa momenty będą jednakowe dla każdej wartości α i będziemy mieli równowagę obojętną. Prędkość, przy której to następuje znajdujemy z równania (16) i nosi ona nazwę „prędkości rozbieżności skrętnej skrzydła” (dywergencji). Zjawisko statycznej równowagi obojętnej nosi w aerodynamice nazwę „rozbieżności skrętnej skrzydła” (dywergencji).

Inny przypadek niestateczności pojawia się wtedy, kiedy współczynnik A_2 , ze względu na swój ostatni człon, staje się ujemny. Występuje to wtedy, kiedy a jest małe lub kiedy środek ciężkości leży w pobliżu środka skrzydła. Prędkość krytyczna dla tego przypadku określona jest zależnością

$$V^2 \geq \frac{4k_\alpha + 4k_x \left[\frac{I_G}{m} + (b-a)^2 \right]}{\pi \rho c (c-4a)} \quad (17)$$

Prędkość ta może być większa lub mniejsza od prędkości wynikającej ze wzoru (15). Jeżeli jest ona mniejsza, to klasyczny flutter występuje przy prędkości niższej niż prędkość dywergencji.

Taka analiza flutteru możliwa jest jedynie dla niskich częstości (dla skrzydeł bardzo podatnych na skręcanie), ponieważ wyrażenia stosowane przez nas do opisu siły nośnej i momentu aerodynamicznego słuszne są tylko dla przepływu ustalonego. Przy drganiach o niskich częstościach, wypór zawsze zmienia się na skutek zmiany kąta natarcia, a więc mamy do czynienia z „kolejnym następowaniem stanów ustalonych”, dla których przytoczona analiza jest słuszna. W spotykanych w praktyce przypadkach szybkiego flutteru (rzędu 20 Hz) zależności te nie są dłużej słuszne, a analiza flutteru staje się tak bardzo skomplikowana, że część inżynierów rozpatruje ten problem jako odrębne zagadnienie.

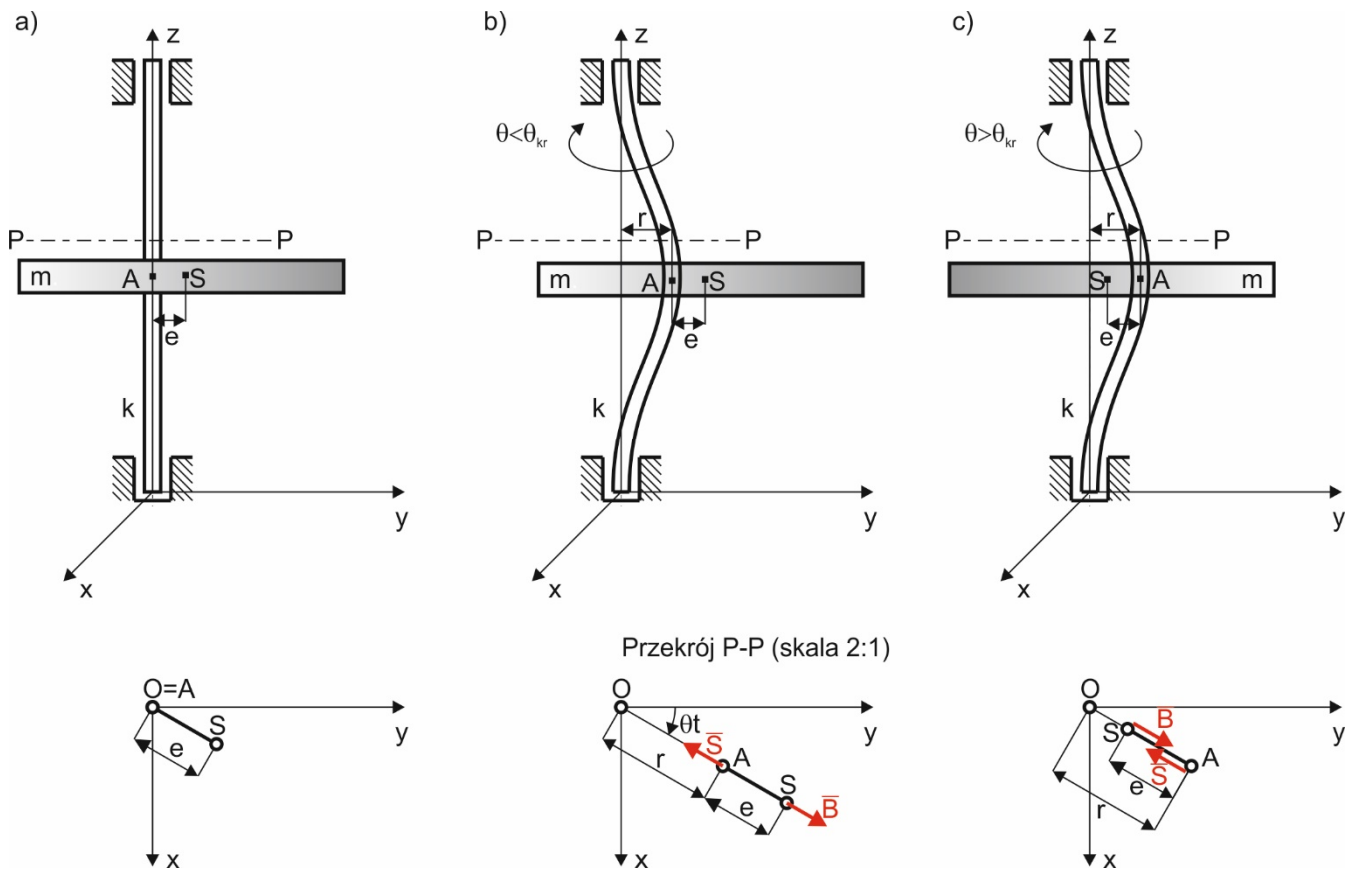
7. Wybrane zagadnienia dynamiki maszyn wirnikowych

7.1. Prędkości krytyczne

Rozważmy wał z wirnikiem zamodelowanym jako krążek o masie m , wirujący ze stałą prędkością kątową θ , którego środek masy S znajduje się w odległości e (nazywanej mimośrodem) od środka wału A .

Jeśli krążek obraca się dookoła osi wału, to na wał działa siła bezwładności \bar{B} (siła odśrodkowa). Tę wirującą siłę można rozłożyć na dwie prostopadłe składowe, z których każda zmienia się w sposób harmoniczny (z częstością θ) i ma tę samą amplitudę. Pod wpływem tych sił wał będzie wykonywał jednocześnie drgania w dwóch prostopadłych płaszczyznach. Drgania mogą stać się szczególnie gwałtowne podczas rezonansu, czyli wtedy, gdy prędkość kątowa wału θ będzie równa częstości drgań własnych ω nieruchomego krążka zamocowanego na sprężystym wale.

Na rys. 1. przedstawiono trzy stany układu: nieruchomy wał – rys. 1a, wał obracający się z prędkością θ mniejszą od tzw. prędkości krytycznej θ_{kr} – rys. 1b, wał obracający się z prędkością θ większą od tzw. prędkości krytycznej θ_{kr} – rys. 1c.



Rys. 1. Ilustracja zjawiska samocentrowania wału

O – oś łożysk,
 A – środek wału,
 S – środek masy krążka,

$r=OA$ – ugięcie wału w miejscu osadzenia krążka,
 $e=AS$ – mimośród,
 m – masa krążka,
 k – współczynnik sprężystości giętej wału.

Prędkości krytyczne to takie prędkości, przy których zachodzą gwałtowne drgania. Dla okrągłego wału, na którym umieszczonych jest kilka krążków i który osadzony jest w sztywnych łożyskach (dwóch lub więcej) prędkości krytyczne θ_{kr} pokrywają się zwykle z częstotliwościami własnymi nieobracającego się wału.

Dla układu przedstawionego na rys. 1 wyznaczmy teraz prędkość krytyczną wału postępując w prosty sposób. Na rysunku przedstawiono istotne punkty układu O, A i S, które znajdują się na jednej osi (później wyjaśni się dlaczego punkty leżą na jednej prostej). Załóżmy, że ta oś obraca się wokół punktu O z prędkością kątową θ , taką samą z jaką obraca się wał. Jeśli pominiemy wpływ grawitacji, to na krążek będą działać jedynie dwie siły:

- siła bezwładności \bar{B} przyłożona w środku masy krążka S, dążąca do ugięcia wału (skierowana na zewnątrz), której wartość to $B = m\theta^2(r + e)$, oraz

- siła sprężystości wału \bar{S} przyłożona w punkcie A, dążąca do wyprostowania wału (skierowana do środka), której wartość zależy od współczynnika sprężystości giętej wału k i wynosi $S = kr$.

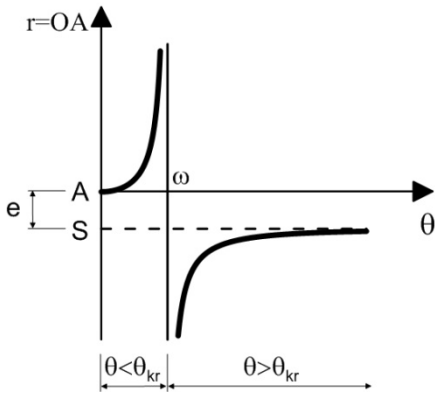
Wał znajduje się w ustalonym ruchu obrotowym, czyli musi zachodzić równowaga sił \bar{S} i \bar{B} . Siły te muszą zatem leżeć na jednej prostej (muszą tworzyć dwójkę zerową) i spełniać równanie:

$$kr = m\theta^2(r + e) \tag{1}$$

Rozwiązując powyższe równanie ze względu na r otrzymamy:

$$r = e \frac{m\theta^2}{(k-m\theta^2)} = e \frac{\theta^2}{(k/m-\theta^2)} = e \frac{\theta^2}{(\omega^2-\theta^2)} = e \frac{(\theta/\omega)^2}{1-(\theta/\omega)^2} \quad (2)$$

gdzie: $\omega = \sqrt{k/m}$ – częstość własna układu.



Rys. 2. Wzajemne położenie punktów A, S, O w funkcji prędkości kątowej wału

Z wykresu przedstawionego na rys. 2 wynika, że odkształcenie sprężyste wału r jest minimalne dla bardzo małych prędkości kątowych ($\theta \sim 0$), a staje się ono nieskończenie duże dla prędkości krytycznej (pamiętajmy, że rozważamy idealny przypadek bez tłumienia). Natomiast dla bardzo dużych prędkości kątowych punkt O zbliża się do S. Oznacza to, że przy bardzo dużych prędkościach kątowych środek masy S pozostaje prawie nieruchomy. Jest to zrozumiałe z fizycznego punktu widzenia, gdyż w przeciwnym przypadku siła bezwładności byłaby bardzo duża (dążyłaby do nieskończoności wraz ze wzrostem prędkości kątowej).

Z wykresu wynika jeszcze jeden ciekawy wniosek, mianowicie taki, że przy prędkościach mniejszych od krytycznej, środek masy S jest bardziej oddalony niż punkt A od osi łożysk O , zaś przy prędkościach większych od krytycznej dzieje się odwrotnie – środek masy krążka jeży bliżej osi łożysk niż punkt A . Zauważamy również, że dla każdej prędkości punkty S i A będą znajdować się po tej samej stronie punktu O . Innymi słowy: przy prędkościach mniejszych od krytycznej „cięższa” część krążka znajduje się na zewnątrz, zaś przy prędkościach wyższych od krytycznej znajduje się ona wewnątrz. To zjawisko nazywamy *samocentrowaniem* wału.

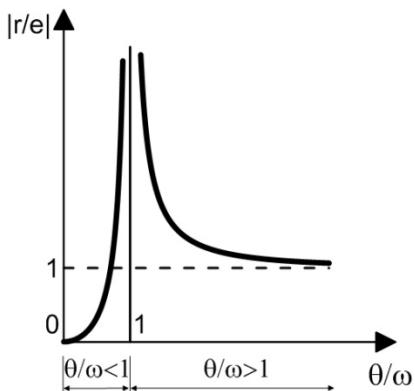
Jeśli chcemy wyznaczyć deformację względną wału (względem wartości mimośrodów e) podzielimy ostatnie równanie przez e , otrzymując

$$\frac{r}{e} = \frac{(\theta/\omega)^2}{1 - (\theta/\omega)^2} \quad (3)$$

Następnie podzielimy licznik i mianownik przez $(\theta/\omega)^2$

$$\frac{r}{e} = \frac{1}{\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2 - 1} \quad (4)$$

otrzymując deformację względną r/e w funkcji bezwymiarowej częstości θ/ω .

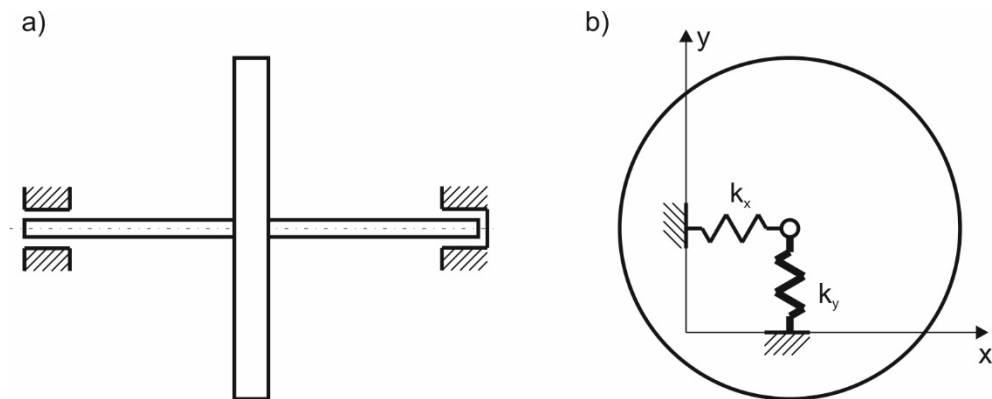


Rys. 3. Deformację względną wału r/e w funkcji bezwymiarowej częstości θ/ω

Wykres przedstawiony na rys. 3 jest inną prezentacją zjawisk wyjaśnianych poprzednio.

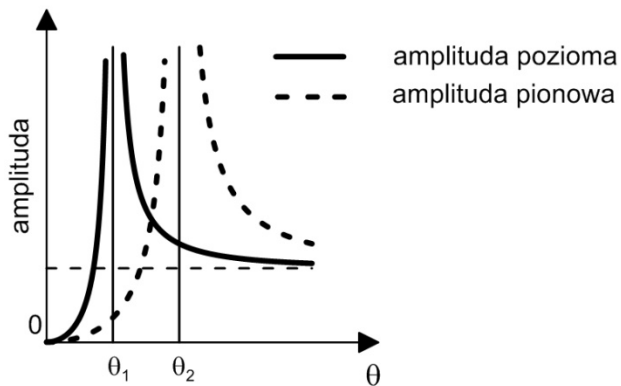
W omawianym dotychczas przypadku zakładaliśmy, że łożyska są sztywne. Jeśli byłoby inaczej, a podatność łożysk byłaby taka sama we wszystkich kierunkach, powyższe rozważania nadal są słuszne. Znaczenie współczynnika sprężystości k pozostaje bez zmian, przy czym jego wartość będzie mniejsza (ze względu na podatność łożysk) co powoduje zmniejszenie prędkości krytycznej wału.

Nieco inna będzie sytuacja, jeśli sztywność łożyska na różnych kierunkach nie jest jednakowa. Taka sytuacja często ma miejsce w układzie, w którym wał obraca się wokół poziomej osi, jak to przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Wał podparty łożyskami o większej sztywności w kierunku pionowym niż poziomym

Zwykle sztywność w kierunku pionowym jest większa niż w poziomym ($k_y > k_x$). Dlatego, podczas gdy przy prędkości kątowej θ_1 występuje rezonans na kierunku poziomym, amplituda ruchu na kierunku pionowym jest mała (rys. 5). Środek wału A porusza się wówczas po elipsie wydłużonej w kierunku poziomym. Przy większej prędkości kątowej θ_2 występuje rezonans na kierunku pionowym i środek wału A porusza się po torze eliptycznym wydłużonej w kierunku pionowym. Zatem przy prędkościach krytycznych środek wału prawie nie wiruje, ale porusza się po torach zbliżonych do linii prostej.

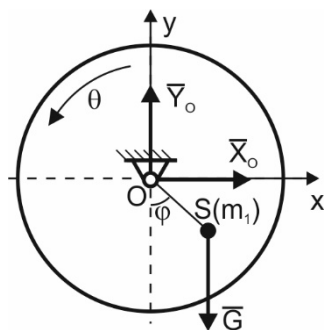


Rys. 5. Charakterystyka rezonansowa wału podpartego łożyskami o większej sztywności w kierunku pionowym niż poziomym

W przypadku bardziej skomplikowanych układów można wyznaczyć prędkości krytyczne stosując metodę współczynników wpływu znaną z wytrzymałości materiałów.

7.2. Reakcje dynamiczne w łożyskach

Omawiając tematykę wyważania wirników rozpoczniemy rozważania od najprostszego przykładu. Przeanalizujemy ruch układu przedstawionego na rys. 6. Jest to obracający się ze stałą prędkością kątową θ krążek niewyważony, którego środek masy znajduje się w punkcie $S(m_1)$.



Rys. 6. Krążek niewyważony i reakcje łożysk

Dynamiczne równania ruchu środka masy krążka to:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_S = X_O \\ m_1 \ddot{y}_S = Y_O - G \end{cases} \quad (5)$$

Z geometrii wynika, że:

$$\begin{cases} x_S = e \sin \varphi \\ y_S = -e \cos \varphi \end{cases} \quad (6)$$

gdzie $e=OS$. Różniczkując (6) otrzymamy

$$\begin{cases} \dot{x}_S = e\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{y}_S = e\dot{\varphi}\sin\varphi \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_S = e\ddot{\varphi}\cos\varphi - e\dot{\varphi}^2\sin\varphi \\ \ddot{y}_S = e\ddot{\varphi}\sin\varphi + e\dot{\varphi}^2\cos\varphi \end{cases} \quad (8)$$

Oznaczając prędkość kątową jako $\dot{\varphi} = \theta$ i przyspieszenie kątowe jako $\ddot{\varphi} = \varepsilon$, określono reakcje w łożysku w punkcie O:

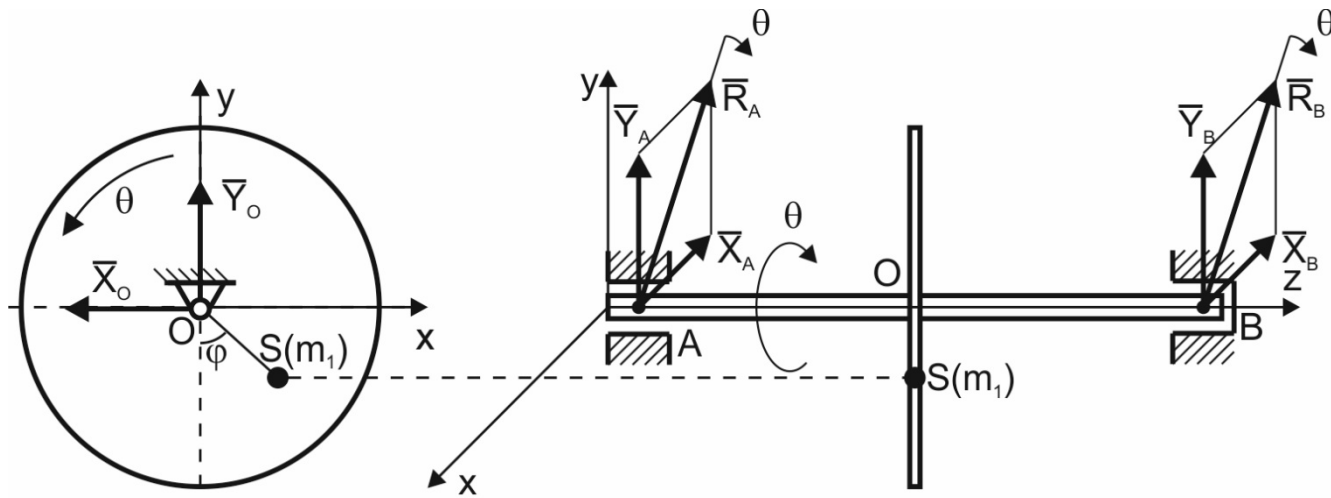
$$\begin{cases} X_O = m_1e(\varepsilon\cos\varphi - \theta^2\sin\varphi) \\ Y_O = m_1e(\varepsilon\sin\varphi + \theta^2\cos\varphi) + G \end{cases} \quad (9)$$

Reakcje te mają charakter dynamiczny, co niekorzystnie wpływa na żywotność łożyska. Wyrażenia $m_1e(\varepsilon\cos\varphi - \theta^2\sin\varphi)$ oraz $m_1e(\varepsilon\sin\varphi + \theta^2\cos\varphi)$ to rzuty siły bezwładności pochodzącej od niewyważenia na osie x i y. Reakcje miałyby charakter statyczny ($X_O = 0$ i $Y_O = G$) jeśli prędkość i przyspieszenie kątowe byłyby równe zero, lub jeśli nie występowałoby niewyważenie. Pierwszy przypadek z oczywistych względów należy pominąć – wymagałoby to unieruchomienia układu. Należy więc dążyć do zredukowania niewyważenia. Niewyważeniem jest tu m_1e czyli iloczyn masy m_1 i mimośrodowego przesunięcia środka masy e . W praktyce niewyważenie można zmniejszyć przez zmniejszenie wartości e .

7.3. Wyważenie statyczne

Rozważony w poprzednim punkcie przypadek jest bardzo prosty z tego względu, iż nie bierzemy pod uwagę „szerokości” krążka, traktując go jako bardzo cienki. Rozważając dalej omawiany układ narysujemy go w innej płaszczyźnie (rys. 7). Założymy również dla przejrzystości, że prędkość kątowna krążka θ jest stała, czyli $\varepsilon = 0$. Pominiemy również część statyczną reakcji pochodzącą od ciężaru zakładając $G = 0$. Wówczas reakcje w łożyskach wyznaczone z zależności (9) będą równe

$$\begin{cases} X_O = -m_1 e \theta^2 \sin \varphi \\ Y_O = m_1 e \theta^2 \cos \varphi \end{cases} \quad (10)$$

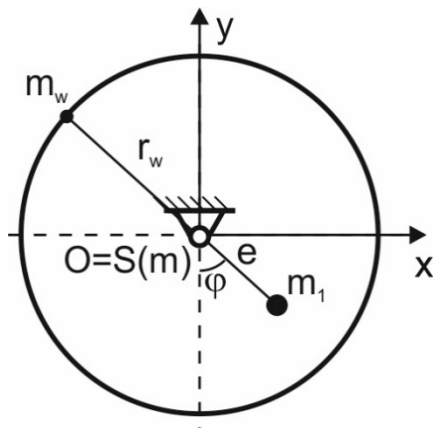


Rys. 7. Niewyważony wirnik o małej szerokości zamodelowany krążkiem i reakcje dynamiczne łożysk

Widać wówczas, że w rzeczywistości łożyska są rozstawione w punktach A i B i będą w nich występować reakcje, których suma rzutów na osie x i y będzie określona przez (10). Reakcje \vec{R}_A i \vec{R}_B wirują wraz z wałem z prędkością kątową teta θ . Wyważenie takiego układu będzie polegało na umieszczeniu masy wyważającej po przeciwnej stronie niewyważenia. Jeśli chcemy umieścić masę wyważającą m_w w odległości r_w od osi wału, to wielkość tej masy określimy z równania

$$m_w r_w = m_1 e \quad (11)$$

W praktyce często umieszcza się masę wyważającą na obwodzie krążka (rys. 8).

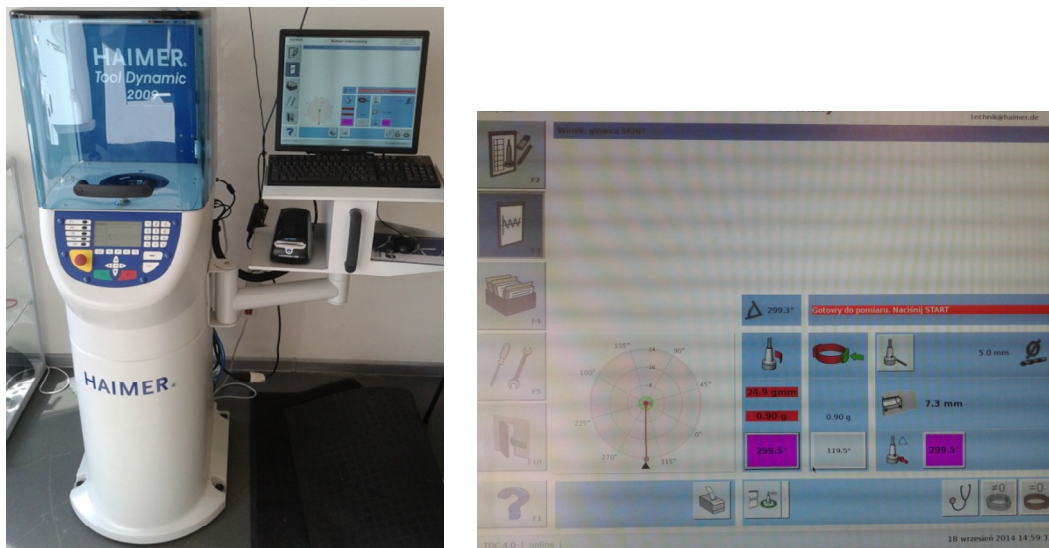


Rys. 8. Wyważenie statyczne wirnika o małej szerokości

Przedstawiony tutaj przykład to wyważenie statyczne układu. Może ono być stosowane w przypadku krążków o małej szerokości. Warunkiem wystarczającym wyważenia statycznego jest sprowadzenie środka masy układu do środka obrotu, czyli

$$\begin{cases} x_S = 0 \\ y_S = 0 \end{cases} \quad (12)$$

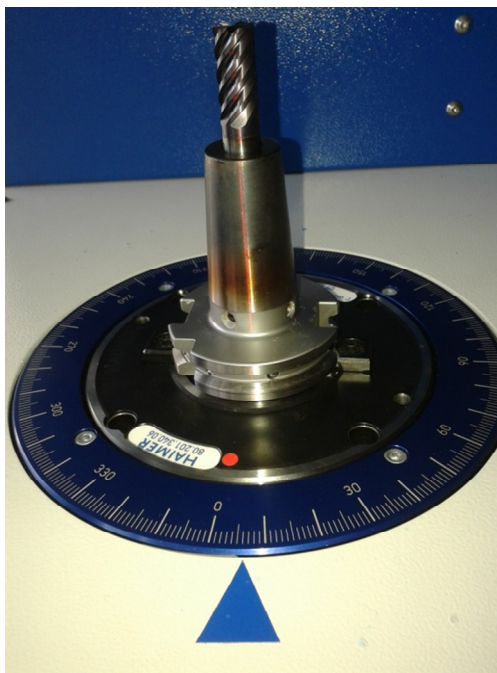
Wybrane elementy poddawane wyważeniu statycznemu przedstawiono na trzech kolejnych rysunkach. Posłużono się przykładami wyważania narzędzi do obróbki mechanicznej. Na rys. 9 przedstawiono wyważarkę do narzędzi maszyn.



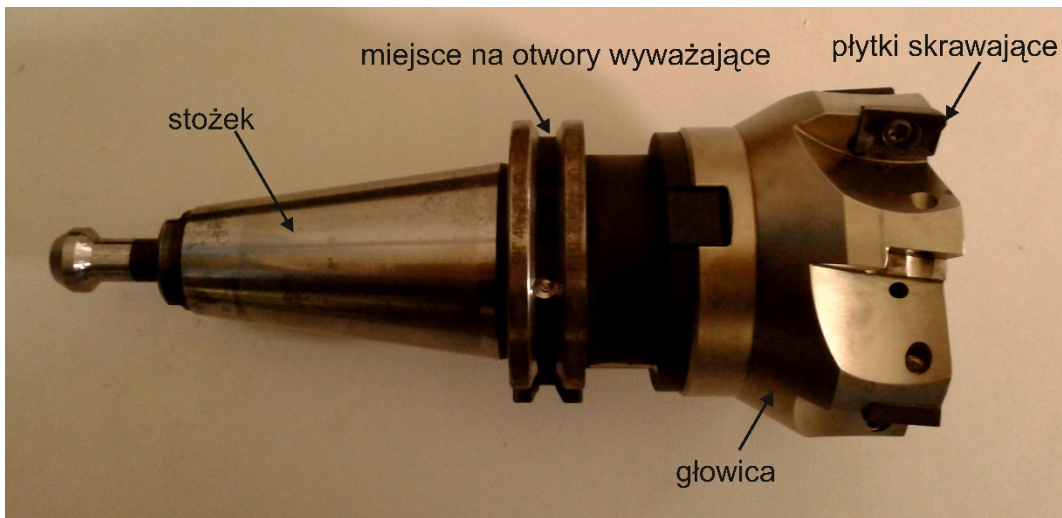
Rys. 9. Wyważarka do narzędzi: a) widok ogólny, b) widok pulpitu

Wyważarka służy do wyważania statycznego, które odbywa się na podstawie pomiarów dokonywanych podczas obrotów narzędzia. Po przeprowadzeniu procedury pomiarowej na pulpicie wyświetlana jest informacja o wielkości niewyważenia w gmm (gramomilimetry) oraz jego położeniu kątowym w stopniach. Podane są również dwa warianty wyważenia. Pierwszy polega na dodaniu masy – wówczas podawana jest masa ciężarka

oraz położenie kątowe, w którym powinien być on zamocowany, drugi polega na nawierceniu otworu wyważającego – wówczas podawane jest położenie otworu wyważającego, jego głębokość oraz średnica wiertła jakiego należy użyć do jego wykonania. Na rys. 10 zaprezentowano wyważarkę z zamontowaną głowicą wiertarską, natomiast na rys. 11 pokazano głowicę frezarską z nawierconym otworem wyważającym.



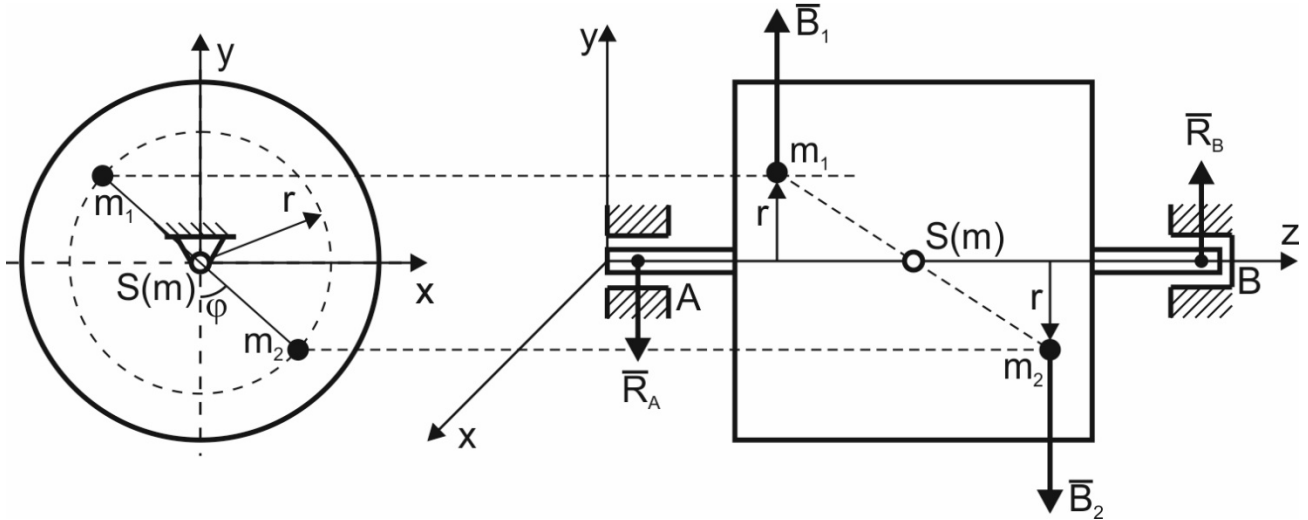
Rys. 10. Wyważarka do narzędzi z głowicą wiertarską



Rys. 11. Głowica frezarska z nawierconym otworem wyważającym

7.4. Wyważenie dynamiczne

W przypadku wirników o wydłużonym kształcie, wyważenie statyczne jest niewystarczające (poza szczególnymi przypadkami). W celu wyjaśnienia istoty problemu założmy idealny wirnik, czyli symetryczny osiowo z dodanymi masami powodującymi niewyważenie w taki sposób, że środek masy pozostaje na osi obrotu (rys. 12). Założmy, że wirnik obraca się ze stałą prędkością kątową θ wokół osi z .



Rys. 12. Dynamicznie niewyważony wirnik i obracające się przeciwnie skierowane reakcje łożysk

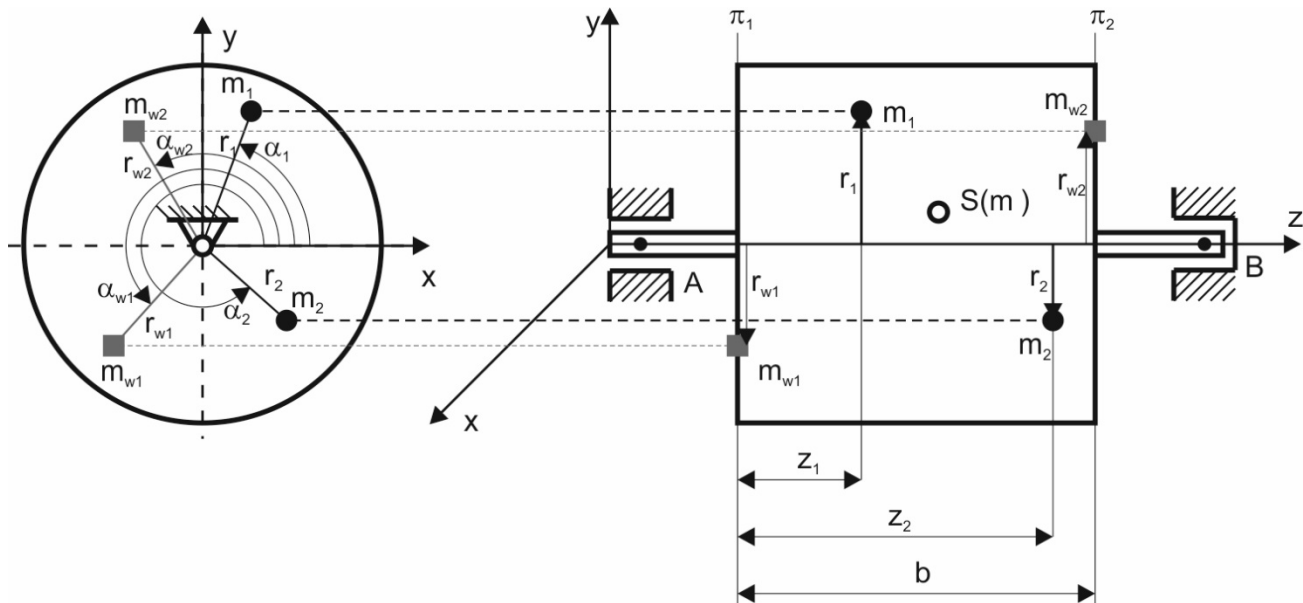
Warunek wyważenia statycznego (12) jest spełniony, ale pomimo tego reakcje w łożyskach będą mieć charakter dynamiczny. Siły bezwładności \bar{B}_1 i \bar{B}_2 stanowią parę sił, która może być zrównoważona tylko przez parę sił reakcji łożysk \bar{R}_A i \bar{R}_B . Reakcje w łożyskach wirują wraz z wałem z prędkością kątową θ , czyli stanowią obciążenie dynamiczne. Niewyważenie tego rodzaju może być stwierdzone tylko podczas ruchu i w związku z tym mówimy, że wirnik jest niewyważony dynamicznie.

Powiemy, że wirnik jest wyważony dynamicznie jeśli jest wyważony statycznie (spełniona jest zależność (12)) i jednocześnie odpowiednie masowe momenty dewiacji są równe zero, czyli

$$\left. \begin{aligned} S_{yz} = \sum_i^n m_i x_i = 0 \\ S_{xz} = \sum_i^n m_i y_i = 0 \\ I_{xz} = \sum_i^n m_i x_i z_i = 0 \\ I_{yz} = \sum_i^n m_i y_i z_i = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{warunki wyważenia} \\ \text{statycznego} \\ \text{warunki wyważenia} \\ \text{dynamicznego} \end{array} \quad (13)$$

gdzie S_{xz} i S_{yz} to masowe momenty statyczne, I_{xz} i I_{yz} to masowe momenty dewiacji (odśrodkowe).

Wyważanie dynamiczne przeprowadza się na urządzeniach nazywanych wyważarkami. Efekt wyważenia można osiągnąć dodając (lub odejmując) co najmniej dwie masy wyważające. Ze względów praktycznych masy dodaje się (lub odejmuje) w specjalnie przeznaczonych do tego miejscach, tzw. płaszczyznach wyważania prostopadłych do osi obrotu. Często również promienie wyważania są z góry określone, np. w przypadku wyważania kół samochodowych. Aby omówić proces wyważania, weźmiemy teraz pod uwagę bardziej ogólny przypadek, w którym obydwie warunki (12) i (13) nie są spełnione. Do symetrycznego osiowo wirnika przedstawionego na rys. 13, dodane zostały masy m_1 i m_2 powodujące niewyważenie dynamiczne. Wybierzmy płaszczyzny wyważania π_1 i π_2 w których mają zostać umieszczone masy wyważające m_{w1} i m_{w2} .



Rys. 13. Przykład dynamicznego wyważenia wirnika

W procesie wyważania muszą zostać określone wielkości mas wyważających m_{w1} i m_{w2} , promienie wyważenia r_{w1} i r_{w2} oraz położenia kątowe mas wyważających α_{w1} i α_{w2} . Wymienione wielkości muszą spełniać warunki (13), z których wynika układ równań

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 r_1 \cos \alpha_1 + m_2 r_2 \cos \alpha_2 + m_{w1} r_{w1} \cos \alpha_{w1} + m_{w2} r_{w2} \cos \alpha_{w2} = 0 \\ m_1 r_1 \sin \alpha_1 + m_2 r_2 \sin \alpha_2 + m_{w1} r_{w1} \sin \alpha_{w1} + m_{w2} r_{w2} \sin \alpha_{w2} = 0 \\ m_1 r_1 (z_1 + l) \cos \alpha_1 + m_2 r_2 (z_2 + l) \cos \alpha_2 + m_{w1} r_{w1} l \cos \alpha_{w1} + \\ \quad m_{w2} r_{w2} (b + l) \cos \alpha_{w2} = 0 \\ m_1 r_1 (z_1 + l) \sin \alpha_1 + m_2 r_2 (z_2 + l) \sin \alpha_2 + m_{w1} r_{w1} l \sin \alpha_{w1} + \\ \quad m_{w2} r_{w2} (b + l) \sin \alpha_{w2} = 0 \end{array} \right. \quad (14)$$

Podany układ równań pozwala na wyznaczenie czterech niewiadomych. Zakładając np. promienie r_{w1} i r_{w2} możemy wyznaczyć pozostałe parametry mas wyważających, czyli m_{w1} , m_{w2} , α_{w1} i α_{w2} .

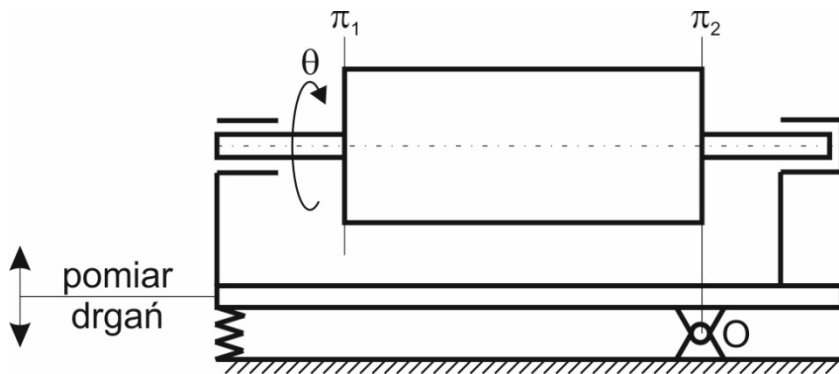
Dla przejrzystości przykładu przyjmijmy konkretny stan niewyważenia, stosunkowo łatwy do analizy, czyli np.: $m_1 = 0.01$ [kg], $m_2 = 0.02$ [kg], $r_1 = 0.1$ [m], $r_2 = 0.1$ [m], $\alpha_1 = 0$ [rad], $\alpha_2 = \frac{3}{2}\pi$ [rad], $z_1 = 0$ [m], $z_2 = 1$ [m]. Ponadto przyjmijmy szerokość wirnika $b = 1$ [m] oraz promienie wyważenia $r_{w1} = 0.1$ [m] i $r_{w2} = 0.1$ [m]. Z rozwiązania układu równań wynika, że są możliwe cztery sposoby wyważenia układu.

Tabela. 1. Warianty doboru parametrów wyważenia wirnika

	m_{w1} [kg]	m_{w2} [kg]	α_{w1} [rad]	α_{w2} [rad]
wariant 1	0.01	0.02	π	$\pi/2$
wariant 2	0.01	-0.02	π	$3\pi/2$
wariant 3	-0.01	0.02	0	$\pi/2$
wariant 4	-0.01	-0.02	0	$3\pi/2$

Wariant pierwszy polega na dodaniu mas wyważających, wariant 4 polega na ich odjęciu. W wariacie 2 i 3 jedna z mas jest dodawana a druga odejmowana.

Równania rozwiązano zakładając znajomość stanu niewyważenia, czyli wartości niewyważenia oraz jego położenia. W praktyce są to wielkości nieznane i wymagane jest ich określenie. Do tego celu stosuje się wyważarki dynamiczne. Prześledzimy teraz zasadę działania takiego urządzenia, które zostało schematycznie przedstawione na rys. 14.

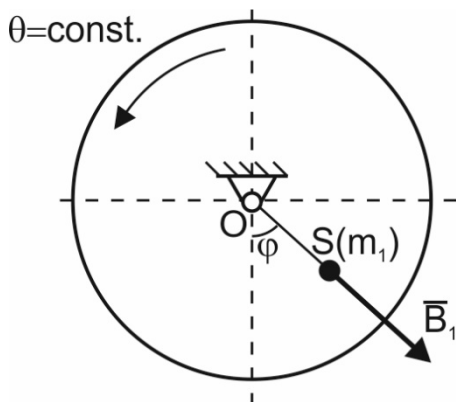


Rys. 14. Schemat wyważarki dynamicznej

Wał jest ułożyskowany w ramie zamocowanej przegubowo w taki sposób, że jedna z płaszczyzn wyważania przechodzi przez oś obrotu ramy. Drugi koniec ramy jest podparty sprężystością. Jeśli wirnik zostanie wprowadzony w ruch obrotowy wokół własnej osi, wówczas siły bezwładności niewyważonych mas będą powodować wychylenie się ramy wokół punktu O. Wychylenie ramy będzie wywołane jedynie przez siły bezwładności niewyważenia przypadającego na płaszczyznę korekcji π_1 .

O wartości niewyważenia można wnioskować na podstawie amplitudy drgań. Amplituda drgań A jest proporcjonalna do amplitudy siły wymuszającej pochodzącej od niewyważenia (siły bezwładności). Będziemy rozważać kolejno trzy przypadki, na podstawie których wyznaczymy parametry niewyważenia.

a) Drgania wywołane istniejącym niewyważeniem



Rys. 15. Pierwszy etap wyważenia – wirnik z początkowym niewyważeniem

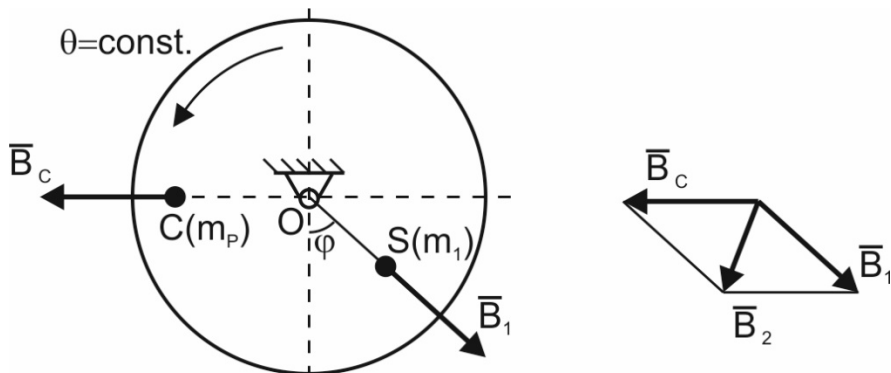
W pierwszym przypadku amplituda drgań A_1 jest proporcjonalna do amplitudy siły wymuszającej B_1

$$A_1 = KB_1 \quad (15)$$

gdzie A_1 to maksymalna amplituda przemieszczenia (występująca przy prędkości rezonansowej), $B_1 = m_1\theta^2e$ to amplituda siły bezwładności, K to współczynnik proporcjonalności. Współczynnik K nie jest znany. Podobnie nie są znane parametry niewyważenia, czyli m_1 , $OS = e$, φ . W takim przypadku należy zarejestrować jedynie amplitudę przemieszczenia A_1 .

b) *Drgania wywołane istniejącym niewyważeniem oraz masą próbną w punkcie C*

W dowolnym miejscu, np. w punkcie C należy zmocować dowolną ale znaną masę próbną m_p w dowolnej lecz znanej odległości $OC = r_p$ jak pokazano na rys. 16.



Rys. 16. Drugi etap wyważania – wirnik z masą próbną po lewej stronie

Po ponownym uruchomieniu wirnika należy odczytać amplitudę A_2 , która jest proporcjonalna do amplitudy siły wymuszającej B_2

$$A_2 = KB_2 \quad (16)$$

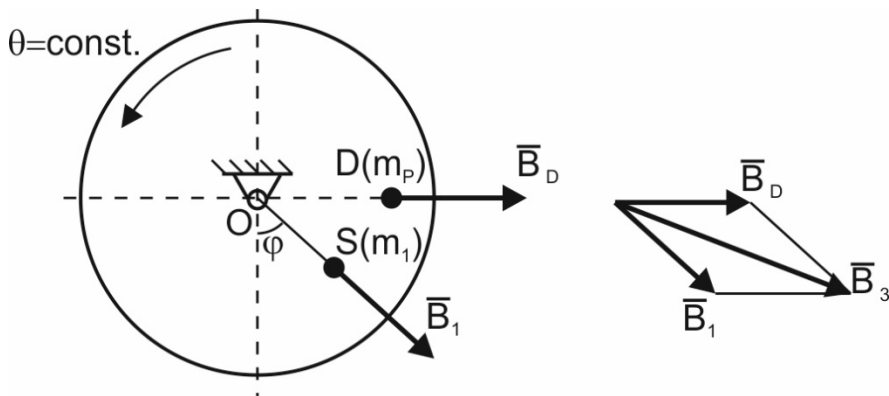
gdzie

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_1 + \vec{B}_c \quad (17)$$

to wypadkowa siła bezwładności.

c) Drgania wywołane istniejącym niewyważeniem oraz masą próbną w punkcie D

Masę próbną m_p należy przenieść na przeciwną stronę wirnika i zamocować w punkcie D ($OD = r_p$) jak pokazano na rys. 17.



Rys. 17. Trzeci etap wyważania – wirnik z masą próbną po prawej stronie

Po ponownym uruchomieniu wirnika należy odczytać amplitudę A_3 , która jest proporcjonalna do amplitudy siły wymuszającej B_3

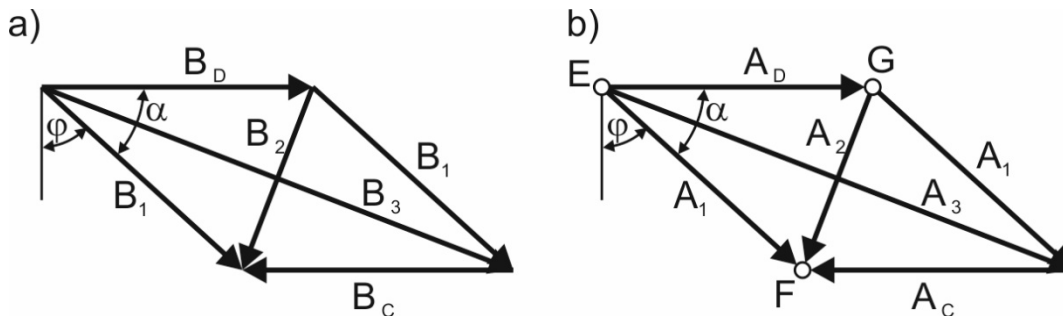
$$A_3 = KB_3 \quad (18)$$

gdzie

$$\bar{B}_3 = \bar{B}_1 + \bar{B}_D \quad (19)$$

to wypadkowa siła bezwładności.

Otrzymane podczas trzech kolejnych prób wyniki są wystarczające do wyznaczenia parametrów niewyważenia. Siły \bar{B}_1 , \bar{B}_2 , \bar{B}_3 , \bar{B}_C i \bar{B}_D tworzą plan sił przedstawiony na rysunku 18a. Podobny proporcjonalny plan tworzą amplitudy A_1 , A_2 , A_3 , A_C i A_D (rys 18b).



Rys. 18. a) plan sił, b) plan amplitud

Stosując twierdzenie o przekątnych równoległoboku zapiszemy:

$$2A_D^2 + 2A_1^2 = A_2^2 + A_3^2 \quad (20)$$

a stąd mamy

$$A_D = \sqrt{\frac{A_2^2 + A_3^2 - 2A_1^2}{2}} \quad (21)$$

Amplituda A_D jest proporcjonalna do amplitudy siły wymuszającej B_D

$$A_D = KB_D \quad (22)$$

Stąd można wyznaczyć współczynnik proporcjonalności

$$K = \frac{A_D}{B_D} \quad (23)$$

Korzystając z wzorów (15) i (23) wyznaczono

$$B_1 = \frac{A_1}{K} = \frac{A_1}{A_D} B_D \quad (24)$$

Amplituda siły $B_1 = m_1 \theta^2 e$ wynika z niewyważenia, amplituda siły $B_D = m_P \theta^2 r_P$ wynika z dodatkowej masy próbnej. Zatem z wzoru (24) można wyznaczyć wartość niewyważenia:

$$m_1 \theta^2 e = \frac{A_1}{A_D} m_P \theta^2 r_P \quad (24)$$

$$m_1 e = \frac{A_1}{\sqrt{\frac{A_2^2 + A_3^2 - 2A_1^2}{2}}} m_P r_P \quad (25)$$

Z trójkąta EFG stosując wzór cosinusów wyznaczmy kąt α

$$A_2^2 = A_1^2 + A_D^2 - 2A_1 A_D \cos \alpha \rightarrow \alpha = \arccos \frac{A_3^2 - A_2^2}{4A_1 \sqrt{\frac{A_2^2 + A_3^2 - 2A_1^2}{2}}} \quad (26)$$

a następnie kąt φ określający położenie kątowe niewyważenia

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (27)$$

Powyższa teoria pozwala wyznaczyć wielkość niewyważenia oraz jego położenie kąto-
we. Znając te wielkości można w odpowiednim miejscu (po przeciwnej stronie do nie-
wyważenia) umieścić masę wyważającą m_W taką, że:

$$m_W = \frac{m_1 e}{r_W} = \frac{A_1}{\sqrt{\frac{A_2^2 + A_3^2 - 2A_1^2}{2}}} m_P \frac{r_P}{r_W} \quad (28)$$

gdzie r_W to promień, na którym umieszcza się masę wyważającą.

Praktyczne rozwiązania układów do wyważania wymagają układu, za pomocą którego
można mierzyć położenie kątowe wału, aby było wiadomo, gdzie umieszcza się masy
próbne oraz gdzie umieścić masę wyważającą.

Po wyważeniu układu w płaszczyźnie π_1 należy odwrócić wał i dokonać wyważenia
w płaszczyźnie π_2 .

Omówione postępowanie można rozszerzyć na dowolną ilość niewyważonych mas, przy
czym każde niewyważenie sztywnego wirnika może być usunięte przez umieszczenie
masy wyważającej (ewentualnie odjęcie masy) w każdej z dwóch płaszczyzn wirnika.

7.5. Wyważenie odkształcalnych wirników

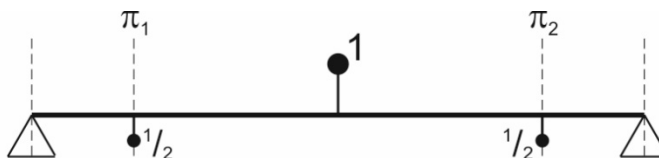
W poprzednich punktach omawialiśmy zagadnienia wyważania wirników sztywnych, tzn. takich, które nie odkształcają się. Założenie takie jest słuszne pod warunkiem, że prędkości kątowe wirnika są znacznie niższe od pierwszej prędkości krytycznej. Jeśli prędkość kątowa wirnika przekracza połowę pierwszej prędkości krytycznej wirnik odkształca się na tyle, że nie można już pomijać tego zjawiska. Oprócz sił odśrodkowych związanych z początkowym mimośrodem, pojawiają się nowe siły tego typu, związane z odkształceniami wału.

Aby to wykazać rozważmy sytuację przedstawioną na rys. 19, kiedy w środku symetrycznego wirnika umieszczamy niewyważenie, którego skutkiem jest jednostkowa siła odśrodkowa. Jeśli wirnik byłby sztywny, to w każdym z dwóch łożysk wystąpiłaby reakcja równa połowie tej siły. Jeśli jednak wirnik jest odkształcalny to jednostkowa siła bezwładności wywołuje ugięcie osi wirnika i przesunięcie jej z początkowego położenia. Na skutek tego obraca się wygięta linia środkowa i powstają dodatkowe siły odśrodkowe, które zmieniają wartości sił reakcji w łożyskach.

Wyważenie można przeprowadzić umieszczając masę wyważającą naprzeciwko niewyważenia początkowego, ale wygodniej jest umieścić masy wyważające w dwóch płaszczyznach w pobliżu końców wirnika. Załóżmy, że mamy do czynienia z wydłużonym wirnikiem o stałym przekroju, a płaszczyzny wyważania π_1 i π_2 są oddalone od końców wirnika o $1/6$ całkowitej długości wirnika.

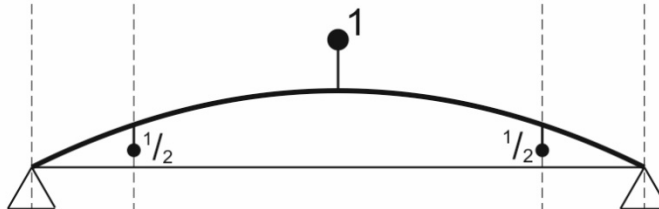
a)

prędkość znacznie
mniejsza od pierwszej
prędkości krytycznej



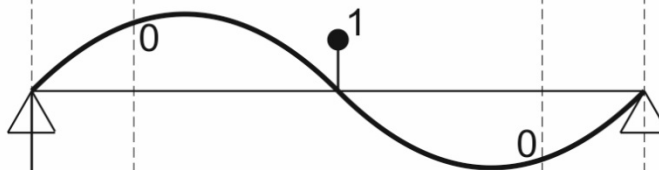
b)

pierwsza
prędkość
krytyczna



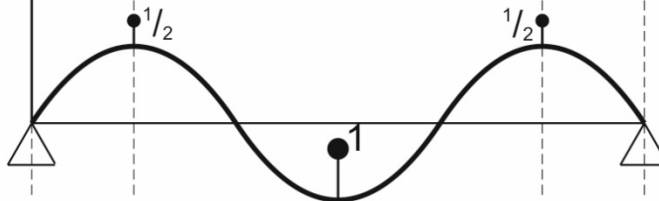
c)

druga
prędkość
krytyczna



d)

trzecia
prędkość
krytyczna



Rys. 19. Położenie mas wyważających zależnie od prędkości odkształcalnego wirnika

Sztywny wirnik (można go tak traktować jeśli prędkość kątowna jest znacznie niższa od pierwszej prędkości krytycznej) będzie wyważony, jeśli w każdej płaszczyźnie wyważenia umieścimy połowę jednostkowego wyważenia (rys. 19a)). Kiedy wirnik obraca się z prędkością równą pierwszej prędkości krytycznej (rys. 19b)) jego linia ugięcia ma kształt połowy sinusoidy (kształt nie zależy od początkowego niewyważenia) o amplitudzie tak dużej, że niewyważenie jest znacząco większe od początkowego niewyważenia jednostkowego. Istotne jest, że kształt linii ugięcia jest taki, że odkształcenia wirnika w płaszczyznach wyważenia są o połowę mniejsze niż w jego środku. Zatem wirnik będzie wyważony jeśli w płaszczyznach wyważenia będą umieszczone dodatkowe wyważenia, które dadzą w sumie wyważenie równe jednostkowemu. Uzasadnienie tego faktu jest następujące. Wirnik będący w rezonansie znajduje się w stanie równowagi obojętnej, czyli siły odśrodkowe równoważone są przez siły sprężystości wału. Jeżeli pojawi się przyrost ugięcia środka wału o δ pod wpływem niewyważenia, to praca wykonana przez niewyważenie będzie wynosić $\delta \cdot 1$. Natomiast praca wykonana przez każde z wyważen będzie wnosić $1/2 \delta \cdot 1$ i wirnik pozostanie w stanie równowagi obojętnej.

Przy drugiej prędkości krytycznej wirnik odkształca się w ten sposób, że niewyważenie pozostaje nieruchome. Zatem wyważanie nie jest potrzebne (rys. 19c). Z kolei przy trzeciej prędkości krytycznej (rys. 19d) wyważenia muszą być umieszczone po przeciwnej stronie w stosunku do wyważen stosowanych dla małych prędkości .

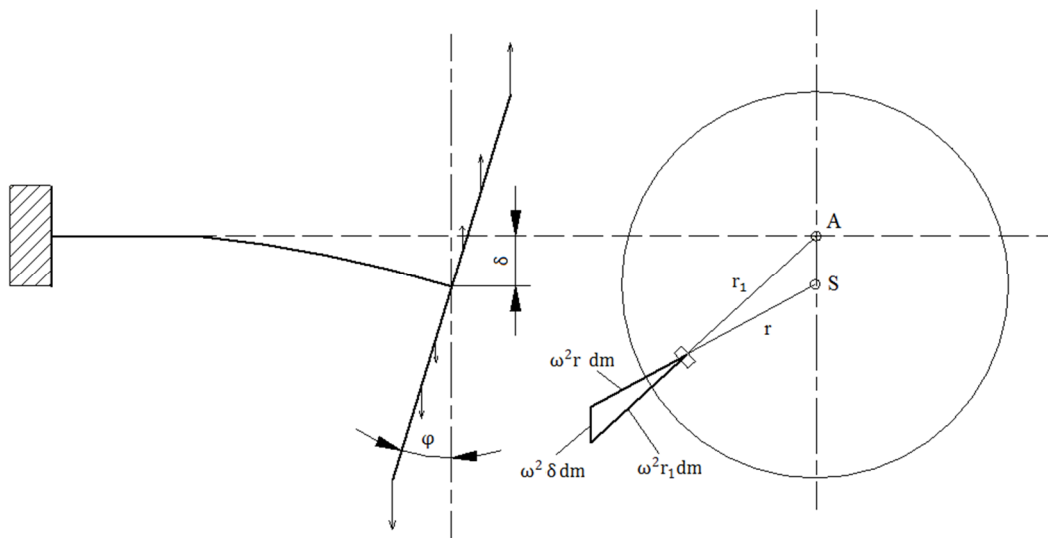
Na podstawie analizy tego przykładu dochodzimy do wniosku, że wyważenie odkształcalnego wirnika w dwóch płaszczyznach jest możliwe, ale tylko dla jednej prędkości. Przy każdej innej prędkości wirnik będzie ponownie niewyważony. Jednak w dużej liczbie przypadków takie wyważenie jest wystarczające, ponieważ w licznych zastosowaniach maszyny wirnikowe pracują ze stałymi prędkościami kątowymi.

W przypadku długich i elastycznych wirników stosuje się wyważanie w większej liczbie płaszczyzn, że względu na to, iż wyważanie w dwóch płaszczyznach, choć teoretycznie możliwe, wymagałoby zastosowania niedopuszczalnie dużych mas.

7.6. Wybrane zaawansowane zagadnienia

Dotychczas zwykle analizowaliśmy wirniki, w których krążek znajdował się pośrodku pomiędzy podporami (łożyskami). Jednak nie zawsze mamy do czynienia z takim umiejscowieniem krążka. Może on być przesunięty w kierunku jednego z łożysk lub znajdować się na końcu wału podpartego wspornikowo. Prędkości krytyczne będą wtedy ulegać zmianie w zależności od położenia krążka. Sytuacja zmienia się również wraz ze wzrostem szerokości krążka.

Rozważmy wirujący odkształcalny i wyważony wał podparty jak na rysunku 1. Przyjmijmy założenie o równości prędkości kątowej środka wału A i prędkości kątowej samego wału. W wyniku obciążenia wału przez krążek, ulega on ugięciu, a krążek ulega odchyleniu od pionu o kąt φ . Wszystkie punkty krążka będą zataczać okręgi prostopadłe do osi podparcia. Podczas wirowania układ występują siły odśrodkowe „prostujące” wał, które nie leżą w jednej płaszczyźnie (siły są reprezentowane przez strzałki na rys. 1).



Rys. 20. Rozkład sił odśrodkowych

Wybierając punkt K o elementarnej masie dm wyznaczmy siłę odśrodkową działającą na niego. Wyraża się ona równaniem:

$$B = \omega^2 r_1 dm \quad (29)$$

Ma ona dwie składowe: jedną na kierunku prostej przechodzącej przez środek wału A , o wartości $\omega^2 r dm$ i drugą umieszczoną promieniowo, pionowo w dół o wartości $\omega^2 \delta dm$. Moment całkowity od sił odśrodkowych określa wzór (2), który jest sumą momentów pochodzących od sił bezwładności elementarnych mas dm :

$$M = \omega^2 \varphi \int y^2 dm = \omega^2 \varphi I_K \quad (30)$$

gdzie: y – to ramię siły B w kierunku pionowym, φ – to kąt odchylenia krążka od pionu, I_K – to moment bezwładności krążka względem średnicy.

Prędkość krytyczna ruchu wału wystąpi wtedy gdy przemieszczenie δ i odchylenie φ spowodują: siła odśrodkowa $P = m\omega^2 \delta$ i moment $M = \omega^2 \varphi I_K$. Przyjmując sztywność wału równą EI oraz długość równą l i korzystając z zależności z wytrzymałości materiałów możemy określić przemieszczenie końca wału δ i odchylenie krążka φ (będące takie jak kąt obrotu wału w miejscu osadzenia krążka). Analizowany układ ma dwa stopnie swobody, ponieważ wymienione wielkości są od siebie niezależne. Wyprowadzenie równania częstości wymaga więc przeprowadzenia znanego postępowania dla układu o dwóch stopniach swobody.

Częstość własną określa równanie:

$$\omega^4 + \omega^2 \frac{12EI}{mI_K l^3} \left(\frac{ml^3}{3} - I_K \right) - \frac{12E^2 I^2}{mI_K l^4} = 0 \quad (31)$$

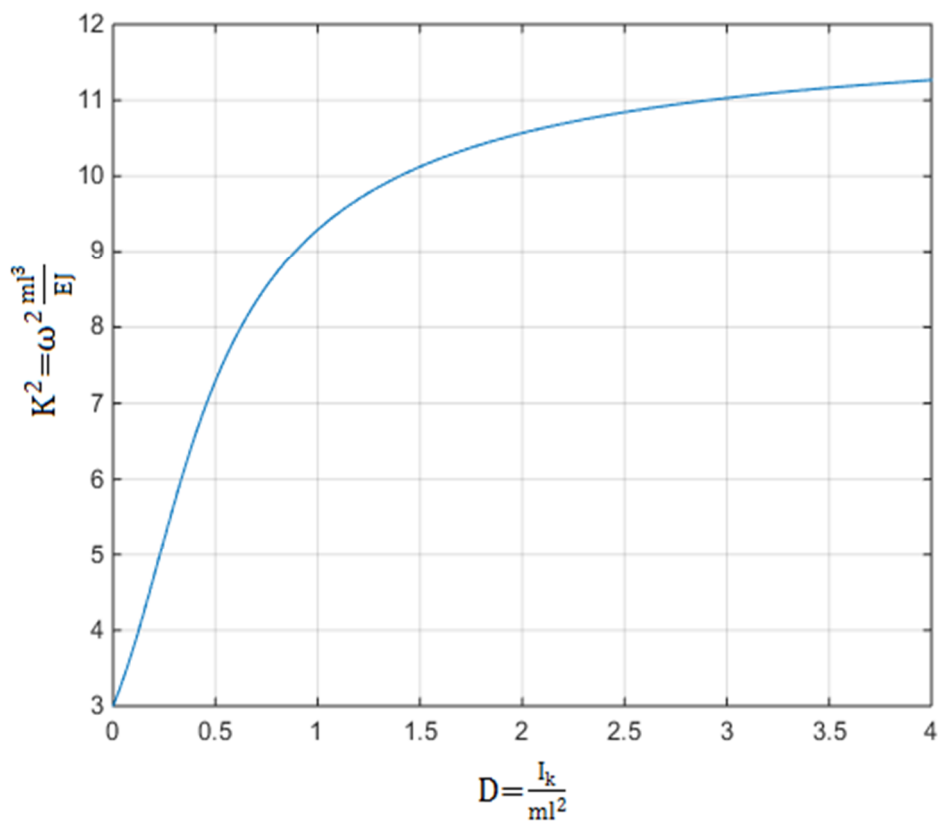
Stosując podstawienia: $K = \omega \sqrt{\frac{ml^3}{EI}}$ i $D = \frac{I_K}{ml^2}$ otrzymamy

$$K^4 + K^2 \left(\frac{4}{D} - 12 \right) - \frac{12}{D} = 0 \quad (32)$$

Kwadrat bezwymiarowej częstości własnej określa równanie:

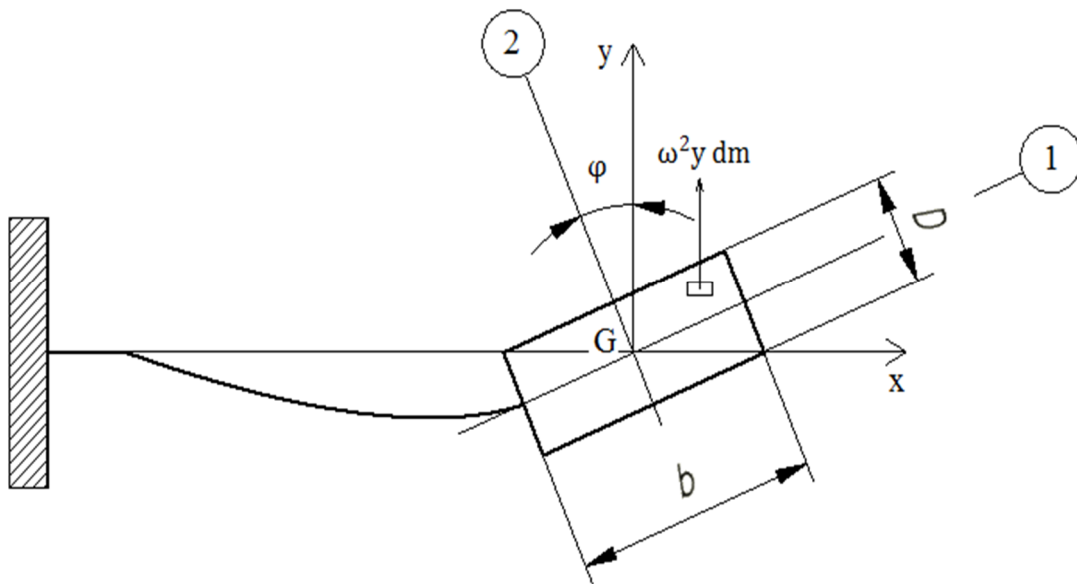
$$K^2 = \left(6 - \frac{2}{D} \right) \pm \sqrt{\left(6 - \frac{2}{D} \right)^2 + \frac{12}{D}} \quad (33)$$

Analizujemy jedynie dodatnie rozwiązanie równania (33). Zależność współczynnika K^2 w funkcji „efektu krążka” D przedstawia wykres rysunek 2. Możemy z niego wywnioskować, że dla krążka o niewielkim promieniu (krążka o skupionej masie) jego efekt D będzie bliski zeru. Częstość wyniesie wówczas: $\omega^2 = \frac{3EI}{ml^3}$. W przeciwnym przypadku, gdy promień krążka staje się nieskończenie duży, jednocześnie $I_K \rightarrow \infty$, pochylenie końca wału osiągnie wartość: $\varphi = 0$. Oznacza to, że krążek nie pochyli się w żadną ze stron, ponieważ wał nie będzie mógł wywołać odpowiedniego momentu M , aby to uczynić. Wał zostanie wtedy przeszywniony.



Rys. 21. Zależność bezwymiarowej częstości drgań własnych K^2 od efektu krążka D

W dotychczasowej analizie krążek uznawaliśmy jako nieskończenie cienki płat. Jeśli uwzględnimy szerokość krążka (krążek będzie stawał się walcem), moment od sił odśrodkowych będzie odchyłał krążek w przeciwną stronę, a nie jak na rys. 20. Taką sytuację przedstawia rys. 22.



Rys. 22. Krążek w formie walca

Przy założeniu, że środek ciężkości pokrywa się z osią obrotu, wzdłuż osi x wystąpi jedynie moment od sił odśrodkowych. Wypadkowa siła odśrodkowa wzdłuż osi y jest równa: $\omega^2 y dm$, a moment od niej pochodzący względem środka masy wynosi: $\omega^2 x y dm$. Całkowity moment od sił odśrodkowych obliczymy jako:

$$M = \omega^2 \int x y dm \quad (34)$$

Momenty bezwładności względem 1 i 2 osi bezwładności, dla krążka o średnicy D i grubości b wynoszą odpowiednio: $I_1 = \frac{mD^2}{8}$ i $I_2 = \frac{mD^2}{16} + \frac{mb^2}{12}$. Całkę z wyrażenia (6) opisuje równanie (7), dla małych kątów możemy przyjąć, że wartość funkcji sinus danego kąta jest w przybliżeniu równa samemu kątowi, stąd:

$$\int x y dm = \frac{I_1 - I_2}{2} \sin(2\varphi) \approx (I_1 - I_2) \varphi \quad (35)$$

Ostatecznie moment żyroskopowy wyniesie:

$$\omega^2 (I_1 - I_2) \varphi = \left(\frac{mD^2}{16} - \frac{mb^2}{12} \right) \omega^2 \varphi \quad (36)$$

Zwiększanie grubości krążka b spowoduje, że wartość momentu żyroskopowego będzie ujemna. Zależność (36) jest słuszna tylko dla takiego zamontowania krążka na wale, że dochodzi on do jego połowy. W przeciwnym razie należy zmienić współczynniki w nawiasie. Efekt żyroskopowy, bo taką nazwę nosi to zjawisko, nie jest do końca słuszne w kontekście pojęcia samego żyroskopu. Założona została równość prędkości kątowych krążka i wału co jest sprzeczne z ideą układu żyroskopowego.

Efekt żyroskopowy sprawia, że w układzie występują dwie różne częstotliwości własne: niższa i wyższa. Jest to zależne od kierunków obrotu osi wału i samego wału.

W przedstawionych układach (rys. 20 i rys. 22) jednym z głównych założeń była równość prędkości obrotowej krążka i prędkości obrotowej odkształconej osi wału wokół osi nieodkształconej. W rzeczywistości jednak nie zawsze są one sobie równe. Prędkość kątową krążka oznaczmy teraz przez Ω , natomiast prędkość wirowania osi wału przez ω . Możemy wyróżnić dwa wektory krętu: pierwszy równy $I_b\Omega$ (pochodzi od obrotu krążka, I_b - to moment bezwładności krążka względem odkształconej osi wału) i drugi równy $I_k\theta\omega$ (jest związany z obrotem wału odkształconego wokół nieodkształconej osi, dla cienkiego krążka $I_k = \frac{1}{2}I_b$, θ - to kąt odchylenia wału od nieodkształconej osi). Suma przedstawionych wektorów krętu wyraża kręt całkowity. Obliczamy ją rozkładając poszczególne wektory na składowe. Składowa równoległa ma stałą wartość więc szybkość jej zmian będzie równa zero. Składowa prostopadła dla małych kątów θ jest równa:

$$I_b\Omega\theta - I_k\theta\omega = I_k\theta(2\Omega - \omega) \quad (37)$$

Wektor ten w każdej chwili czasu zatacza kąt ωdt . Przyrost składowej wektora krętu wyniesie wobec tego:

$$I_k\theta(2\Omega - \omega)\omega dt \quad (38)$$

Szybkość zmian wektora krętu odzwierciedlająca moment działający na krążek wynosi:

$$I_k\theta(2\Omega - \omega)\omega \quad (39)$$

Na krążek działa jeszcze siła odśrodkowa (y określa odchylenie końca wału od jego nieodkształconej osi):

$$B = m\omega^2 y, \quad (40)$$

Do określenia odkształceń wału potrzebna jest znajomość sprężystych właściwości wału określone przez współczynniki wpływu (patrz literatura z wytrzymałości materiałów lub drgań mechanicznych). Dla wału zamocowanego wspornikowo będą one równe:

α

Definiują one ugięcie y i odchylenie θ wywołane przez: jednostkową siłę, lub jednostkowy moment. Odkształcenia wału opisuje układ równań jednorodnych:

l

$$\begin{cases} y = \alpha_{11} m\omega^2 y - \alpha_{12} I_k \omega (2\Omega - \omega) \theta \\ \theta = \alpha_{12} m\omega^2 y - \alpha_{22} I_k \omega (2\Omega - \omega) \theta \end{cases} \quad (42)$$

3

3

Równanie częstości wyznaczmy z układu (42), opisuje je wzór:

$$(-m\alpha_{11}\alpha_{12}I_k + m(\alpha_{12})^2I_k)\omega^4 + (m\alpha_{11}\alpha_{22}I_k2\Omega - m(\alpha_{12})^2I_k)\omega^3 + (\alpha_{22}I_k + m\alpha_{11})\omega^2 + (-\alpha_{22}I_k2\Omega)\omega - 1 = 0 \quad (43)$$

,

α

1

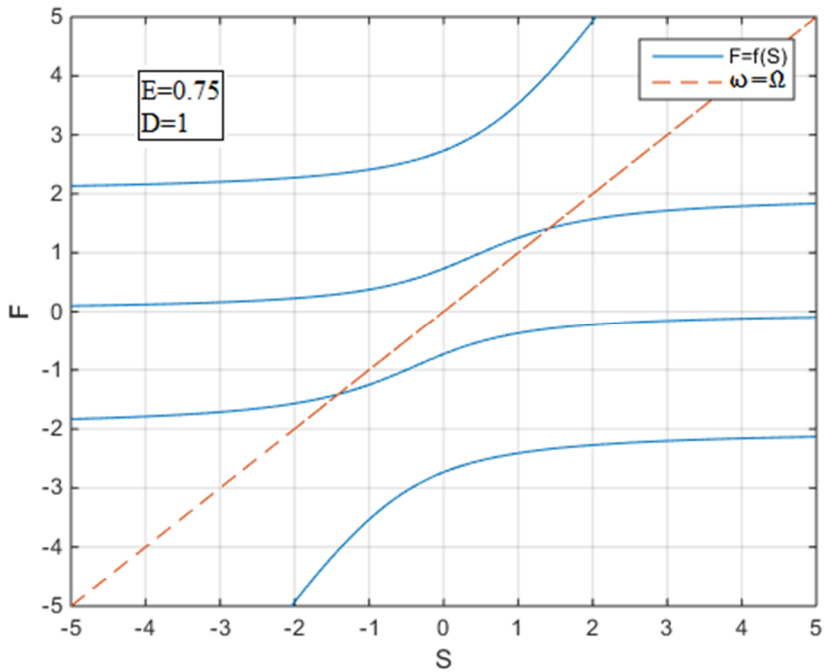
2

Po uproszczeniu równanie (43) przyjmie postać:

$$F^4 - 2SF^3 + \frac{D+1}{D(E-1)}F^2 - \frac{2S}{E-1}F - \frac{1}{D(E-1)} = 0 \quad (44)$$

gdzie: $F = \omega\sqrt{\alpha_{11}m}$ - to bezwymiarowa częstość, $D = \frac{I_k\alpha_{22}}{m\alpha_{11}}$ - to wpływ krążka, $E = \frac{(\alpha_{12})^2}{\alpha_{11}\alpha_{22}}$ - to współczynnik sprzężenia statycznego, a $S = \Omega\sqrt{\alpha_{11}m}$ - to bezwymiarowa prędkość.

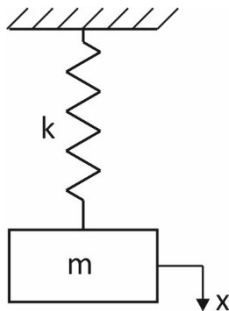
Równanie (44) pozwala stwierdzić, że w układzie występują cztery częstości własne. W wyjątkowych przypadkach np. dla nieobrcającego się wału ($S = 0$) istnieć będą tylko dwie częstości drgań własnych. Zależność bezwymiarowej częstości od bezwymiarowej prędkości przedstawia wykres rys. 23. Gdy $\omega = \Omega$ (przypadek z rys. 21) obroty osi będą wywołane niewyważeniem. Zachodzi wówczas zjawisko rezonansu, wielkość amplitudy jest proporcjonalna do niewyważenia krążka.



Rys. 23. Częstości własne krążka zamocowanego na wale osadzonym wspornikowo

8. Drgania parametryczne

Drgania parametryczne są to drgania mechaniczne układu wywołane okresową zmianą jego parametrów. Aby to lepiej zrozumieć rozważmy prosty przykład. Znane jest zagadnienie drgań układu masowo-sprężystego pokazanego na rysunku.



Równanie ruchu takiego układu to

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1)$$

Parametry układu czyli masa m i współczynnik sprężystości sprężyny k są stałe i w układzie nie wystąpią drgania parametryczne.

Jeśli masa i współczynnik sprężystości sprężyny byłyby okresowo zmienne, wówczas równanie ruchu można by zapisać następująco

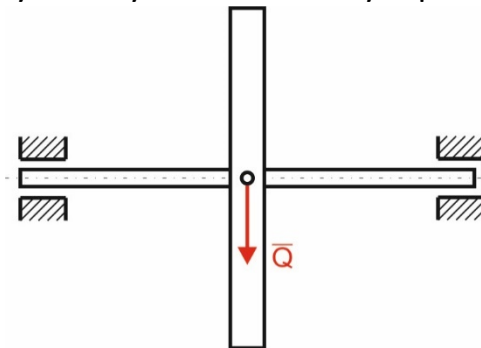
$$m(t)\ddot{x} + k(t)x = 0 \tag{2}$$

gdzie postaci zależności czasowych parametrów mogą być różnego typu. Parametr może zmieniać się okresowo w sposób skokowy lub płynnie zgodnie z zależnością typu $m(t) = m + \Delta m \sin(\omega t)$ i $k(t) = k + \Delta k \sin(\omega t)$, gdzie m oraz k to wartości średnie parametrów, Δm oraz Δk to amplitudy zmian parametrów.

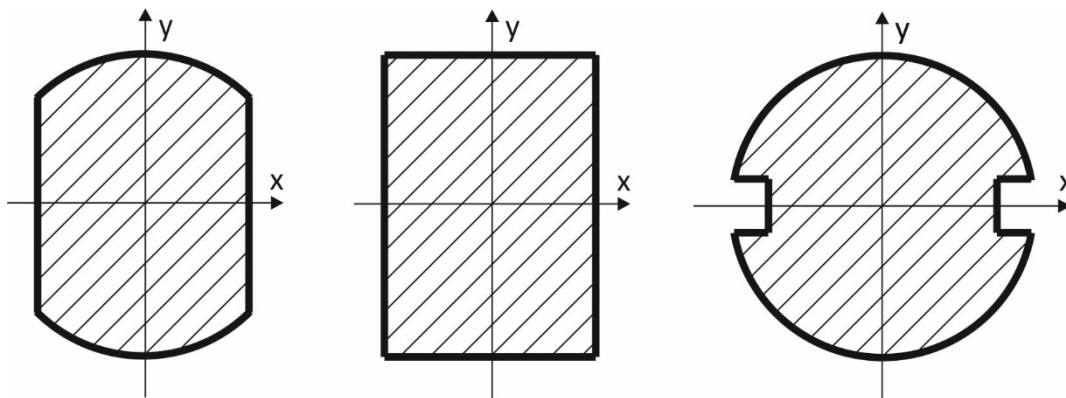
Aby wystąpiły drgania parametryczne wystarczy, aby jeden parametr układu był okresowo zmienny.

8.1. Drgania parametryczne wału

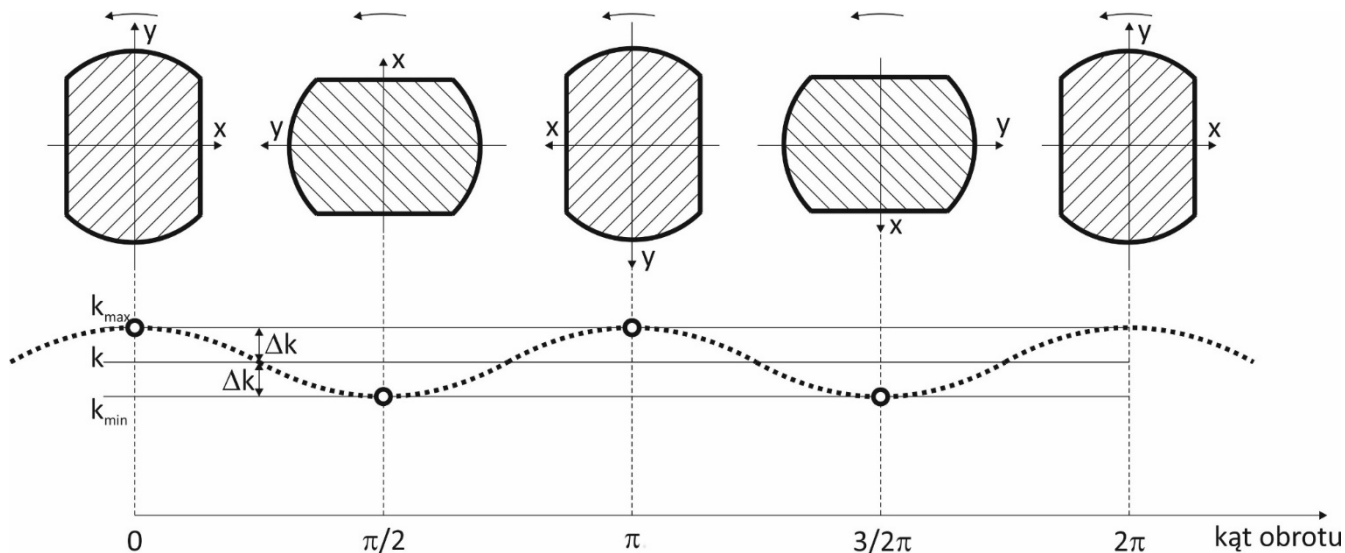
Rozważmy prosty, idealnie wyważony wał z osadzonym pośrodku krążkiem o ciężarze \bar{Q} .



Założmy ponadto, że jego przekrój poprzeczny nie jest kołowy, ale ma jeden z kształtów przedstawionych na rysunku. Przekrój poprzeczny wału ma dwie osie główne (x i y), względem których momenty bezwładności przekroju przyjmują wartość maksymalną i minimalną. Z kolei sztywność wału zależy od tych momentów bezwładności przekroju.



W związku z tym podczas pierwszej ćwiartki obrotu sztywność wału w płaszczyźnie pionowej zmienia się od wartości maksymalnej do minimalnej. Podczas kolejnej ćwiartki obrotu zmienia się od wartości minimalnej do maksymalnej. W czasie obrotu o dwie kolejne ćwiartki cykl zmian sztywności powtórzy się. Tak więc podczas jednego pełnego obrotu sztywność wału w płaszczyźnie pionowej dwukrotnie osiągnie wartość maksymalną i dwukrotnie minimalną. Zatem częstość zmian sztywności ω_k jest dwukrotnie większa niż częstość obrotów wału θ .



Maksymalna wartość współczynnika sprężystości wynosi $k + \Delta k$, zaś wartość minimalna to $k - \Delta k$, gdzie k to wartość średnia współczynnika sprężystości, natomiast Δk jest amplitudą zmian tego współczynnika.

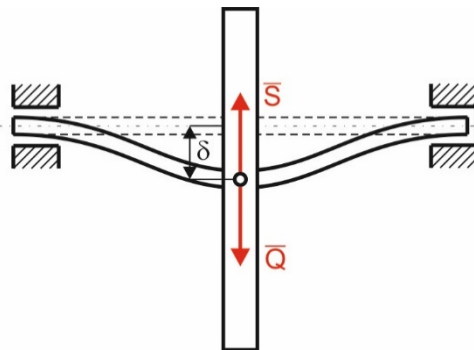
Współczynnik sprężystości wału jest okresową funkcją kąta obrotu, którą można w przybliżeniu przyjąć jako funkcję harmoniczną. Przy założeniu stałej prędkości kątowej wału θ można zapisać funkcję opisującą zmiany współczynnika sprężystości wału w czasie jako

$$k(t) = k + \Delta k \cos(\omega_k t) = k + \Delta k \cos(2\theta t) \quad (3)$$

gdzie $\omega_k = 2\theta$.

Założmy na początku, że wał obraca się z bardzo małą prędkością kątową θ . Ciężar krążka wywołuje wówczas deformację statyczną wału δ skierowaną w dół. Na krążek działają tylko dwie siły:

- siła ciężkości o wartości $Q = mg$ skierowana w dół
- siła sprężystości o wartości $S = [k + \Delta k \cos(2\theta t)]\delta$ skierowana w górę.



Pomiędzy siłą ciężkości a składową stałą siły sprężystości zachodzi równowaga opisana równaniem

$$m.g = k\delta \quad (4)$$

z którego wynika wielkość deformacji statycznej wału $\delta = \frac{m.g}{k}$. Pozostaje jeszcze skierowana w górę składowa zmienna siły sprężystości o wartości

$$\Delta k \cos(2\theta t) \delta = \frac{\Delta k}{k} m.g \cos(2\theta t) \quad (5)$$

która stanowi siłę wymuszającą drgania. Amplituda tej siły zależy od amplitudy zmian współczynnika sprężystości Δk . Wynika z tego, że zmienność parametru jakim jest sprężystość wału jest przyczyną drgań układu, dlatego drgania takie nazywamy parametrycznymi.

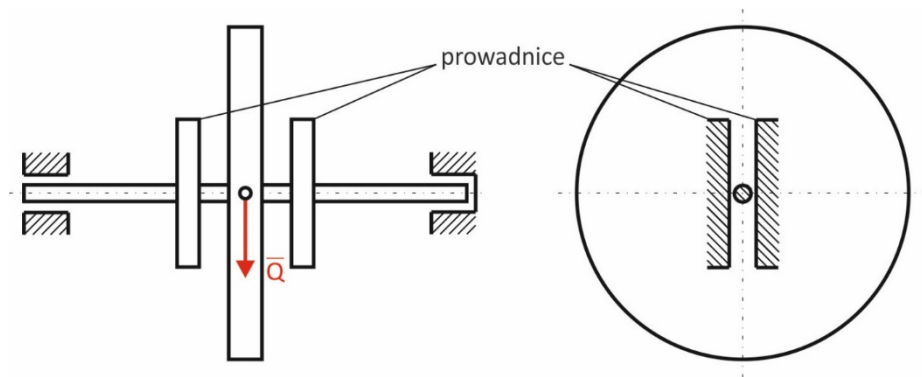
Aby zapobiegać tego rodzaju drganiom należałoby tak skonstruować wał, aby miał kołowy przekrój. W praktyce jednak, ze względów konstrukcyjnych, w wałach wykonuje się rowki na wpusty czy wielowypusty, które są przyczyną zmiennej sztywności wału.

Jeżeli wał obraca się z prędkością kątową $\theta = \frac{1}{2} \omega_0$, równą połowie prędkości krytycznej związanej z częstością własną układu wał-krążek, można spodziewać się wzrostu drgań. Innymi słowy częstość zmian sprężystości pokrywa się z częstością własną układu, czyli $\omega_k = \omega_0$ i wówczas składowa zmienna siły sprężystości pobudza drgania rezonansowe układu.

Rozważmy jeszcze raz idealnie wyważony wał o przekroju kołowym z osadzonym pośrodku krążkiem o ciężarze \bar{Q} . Ze względu na sposób osadzenia krążka za pomocą wpustu, w środkowej części wału jest wykonany rowek na wpust.



Jak już wiemy, sztywność takiego wału jest zmienna w funkcji kąta jego obrotu, i powoduje to powstanie drgań parametrycznych. Po dwóch stronach krążka zastosowano prowadnice, które blokują odkształcenia wału na kierunku poziomym, ale umożliwiają ślizganie się wału bez tarcia na kierunku pionowym. Krążek zamocowany na tak odkształcalnym wale jest układem drgającym o jednym stopniu swobody.



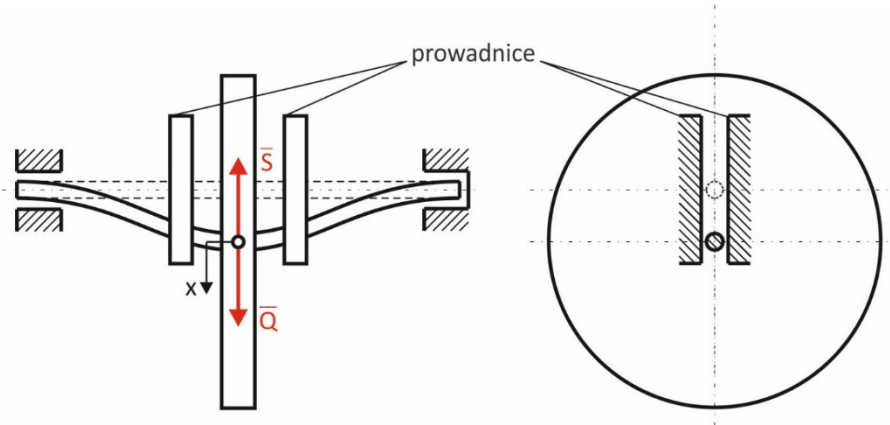
Równanie ruchu krążka na kierunku pionowym można zapisać w postaci

$$m\ddot{x} = Q - S \quad (6)$$

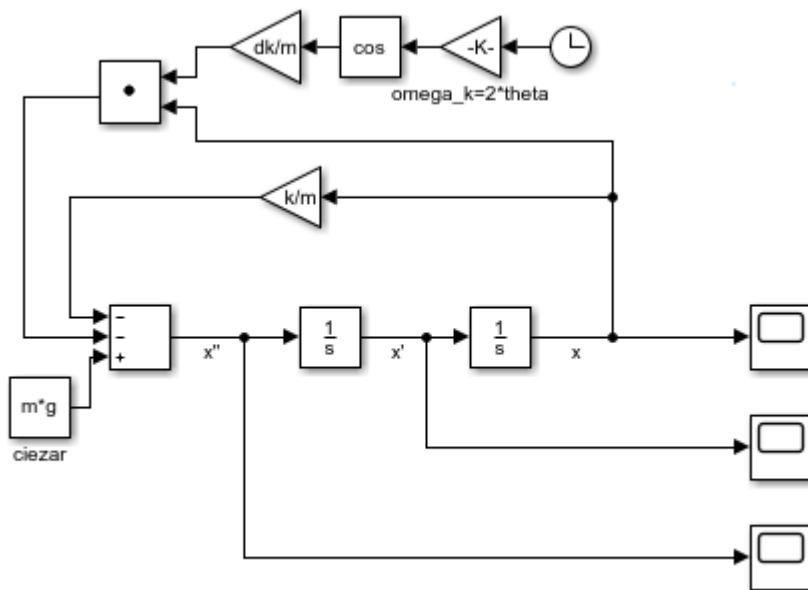
gdzie $Q = mg$ oraz $S = [k + \Delta k \cos(\omega_k t)]x$. Uwzględniając wartości tych sił w równaniu (6) zapiszemy

$$m\ddot{x} + [k + \Delta k \cos(\omega_k t)]x = mg \quad (7)$$

Widać, że równanie opisujące ruch krążka ma postać równania drgań parametrycznych, w którym masa jest stała ale współczynnik sprężystości jest okresową funkcją czasu.

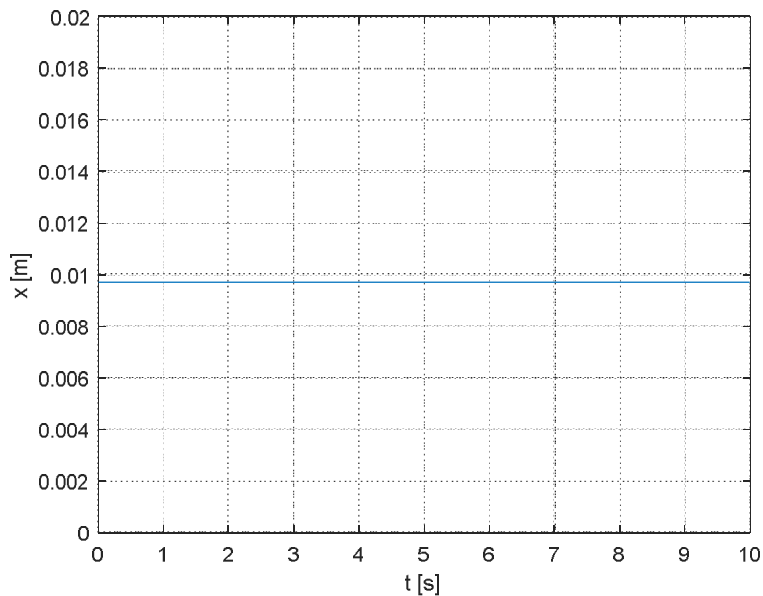


Schemat blokowy rozwiązania równania różniczkowego (7) pokazano na rysunku.



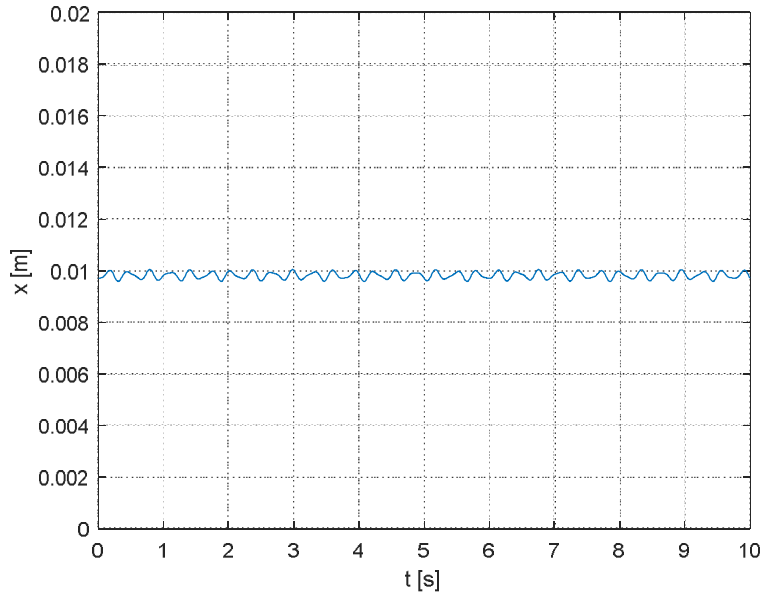
W symulacji drgań układu przyjęto następujące dane układu: $m = 1$ [kg], $k = 1000$ [N/m], $\Delta k = 10$ [N/m]. Amplituda zmian współczynnika sprężystości wynosi 1 % wartości średniej tego współczynnika. Warunki początkowe przyjęto jako: $\dot{x}(0) = 0$, $x(0) = \frac{m \cdot g}{k + \Delta k} = \delta = 0.0097$ [m]. Przyjęto więc warunki początkowe, gdzie $x(0)$ jest równe deformacji statycznej nieobracającego się wału ustawionego w pozycji kątowej odpowiadającej największej sztywności. Takie przyjęcie warunków początkowych powoduje, że w rozwiązaniu równania (7) nie wystąpią drgania własne wywołane nagłym obciążeniem wału przez krążek.

Na rysunku pokazano rozwiązanie równania (7) przy prędkości kątowej wału równej $\theta = 0$ [rad/s].



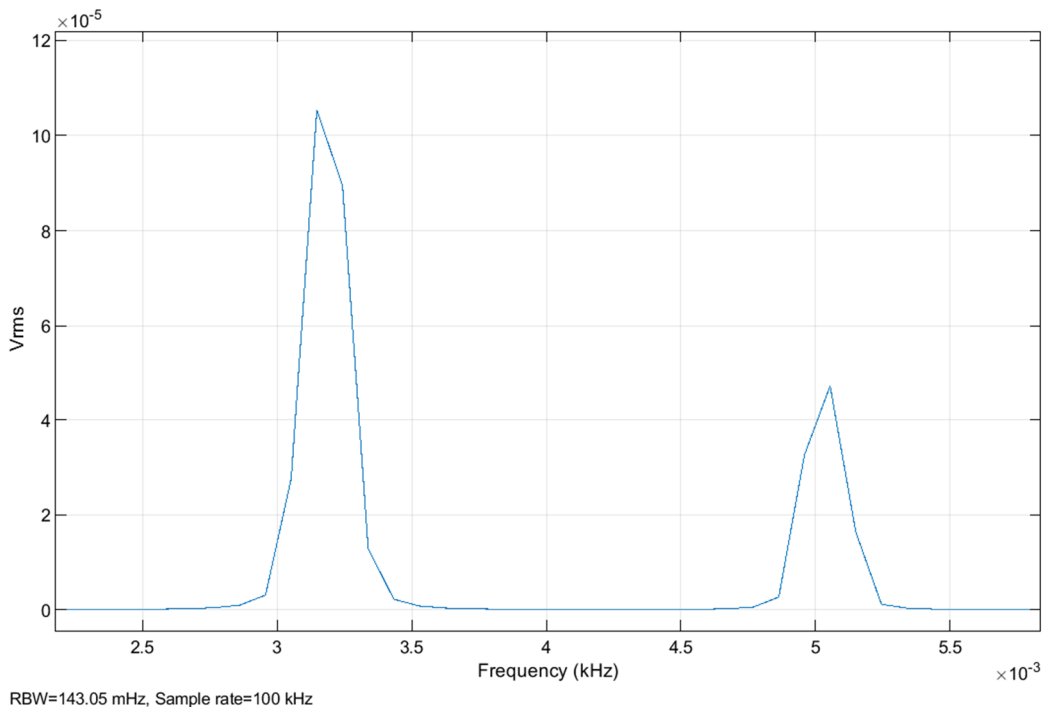
Wykres prezentuje rozwiązania statyczne, czyli ugięcie wału wywołane ciężarem krążka.

Następnie rozwiązano równanie (7) przy prędkości kątowej wału równej $\theta = 10$ [rad/s], a przebieg drgań wału pokazano na rysunku.



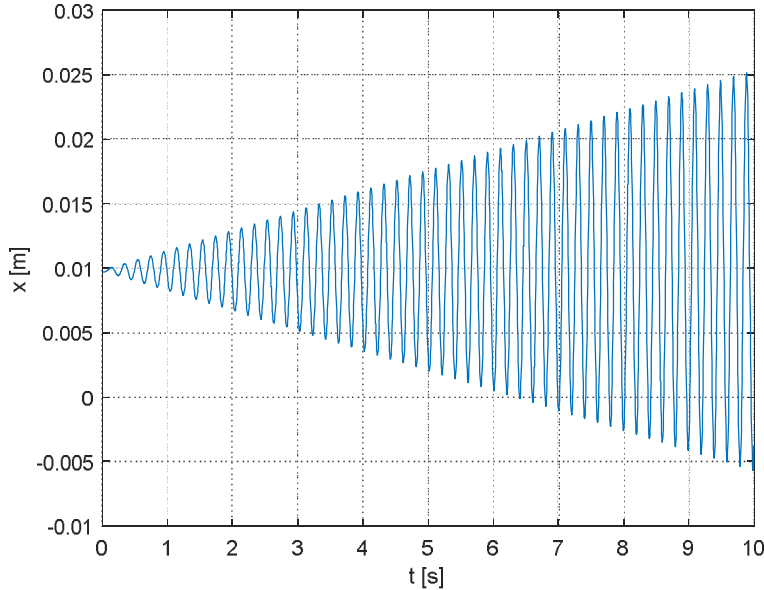
Rozwiązanie przedstawia drgania, które trudno jest zinterpretować. Można jedynie powiedzieć, że nie stwierdza się niestabilności rozwiązania.

W bardziej szczegółowej analizie pomocne jest widmo przemieszczeń, które przedstawiono na kolejnym rysunku.



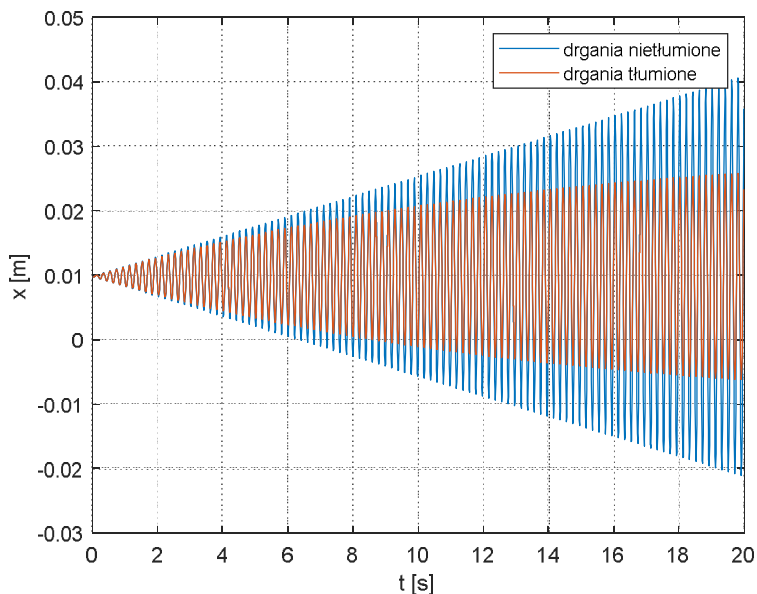
W widmie widoczne są prążki odpowiadające częstotliwościom 3,15 Hz i 5,055 Hz co odpowiada częstotliwościom około 10 [rad/s] i 31.5 [rad/s]. Pierwsza jest związana z częstotliwością obrotów wału θ , natomiast druga z częstotliwością jego drgań własnych $\sqrt{k/m}$. Widmo zawiera jeszcze składową stałą o częstotliwości 0 Hz, odpowiadającą statycznemu odkształceniu wału, ale wykres nie obejmuje tego zakresu.

Następnie rozwiązano równanie (7) przyjmując prędkość kątową wału $\theta = \sqrt{1000}/2 \cong 15.81$ [rad/s], która odpowiada połowie prędkości krytycznej wału $\theta_{kr} = \omega_0 = \sqrt{k/m} = \sqrt{1000}$.



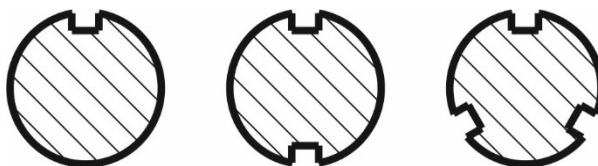
Częstość zmian sprężystości wału $\omega_k = 2\theta$ jest równa prędkości krytycznej wału co wyjaśnia powstanie drgań rezonansowych.

W rzeczywistych układach występuje tłumienie, dlatego drgania rezonansowe nie narażają do nieskończoności, lecz ustalają się na pewnym poziomie. Pokazano to na kolejnym rysunku, który przedstawia drgania rezonansowe nietłumione oraz tłumione ze współczynnikiem tłumienia wiskotycznego $c = 0.15$ [kg/s].



W zaprezentowanym przykładzie przyjęto stosunek amplitudy zmian współczynnika sprężystości do średniej wartości tego współczynnika równy $\frac{\Delta k}{k} = 0.01$. W rzeczywistych układach ten stosunek jest często większy i może wynosić nawet 0.1, co znaczenie wzmacnia znaczenie zjawiska drgań parametrycznych.

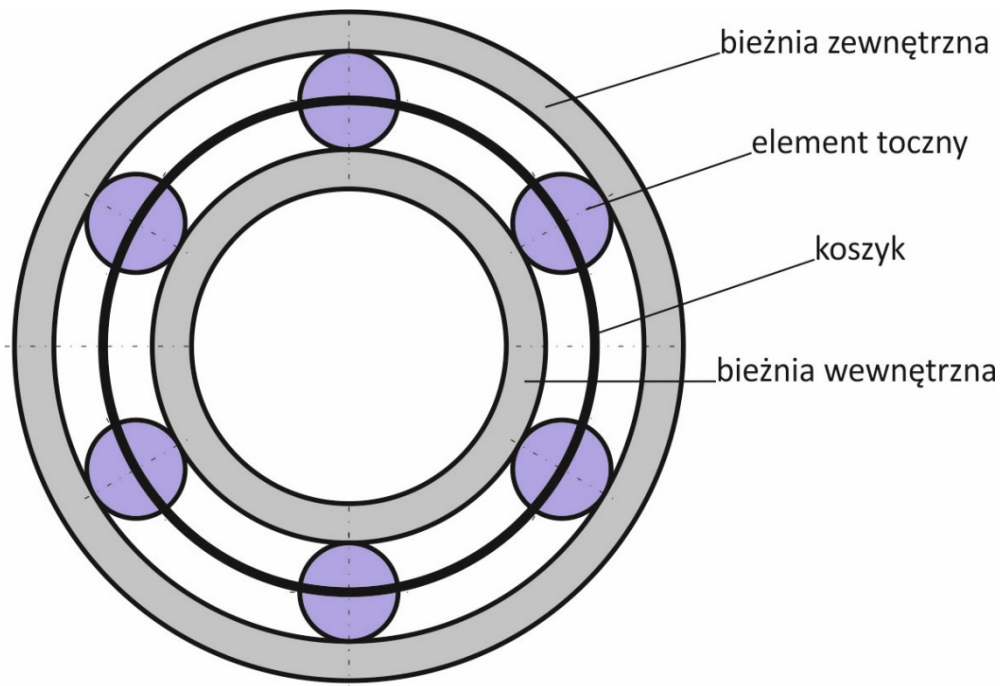
Na zakończenie rozważmy jeszcze kilka wybranych przekrojów pokazanych na rysunku.



W przypadku przekroju z jednym wcięciem współczynnik sprężystości wału zmienia się dwa razy na obrót. Taka sama sytuacja jest w przypadku przekroju z dwoma wcięciami rozstawionymi na obwodzie co 180 stopni, przy czym inna jest tu amplituda zmiany współczynnika sprężystości. Jednak w przypadku trzech wcięć rozstawionych na obwodzie co 120 stopni współczynnik sprężystości wału będzie stały niezależnie od jego ustawienia kąтового. Tak samo jest w przypadku przekrojów mających liczbę wcięć będącą całkowitą wielokrotnością liczby 3, przy czym wcięcia muszą być rozmieszczone regularnie.

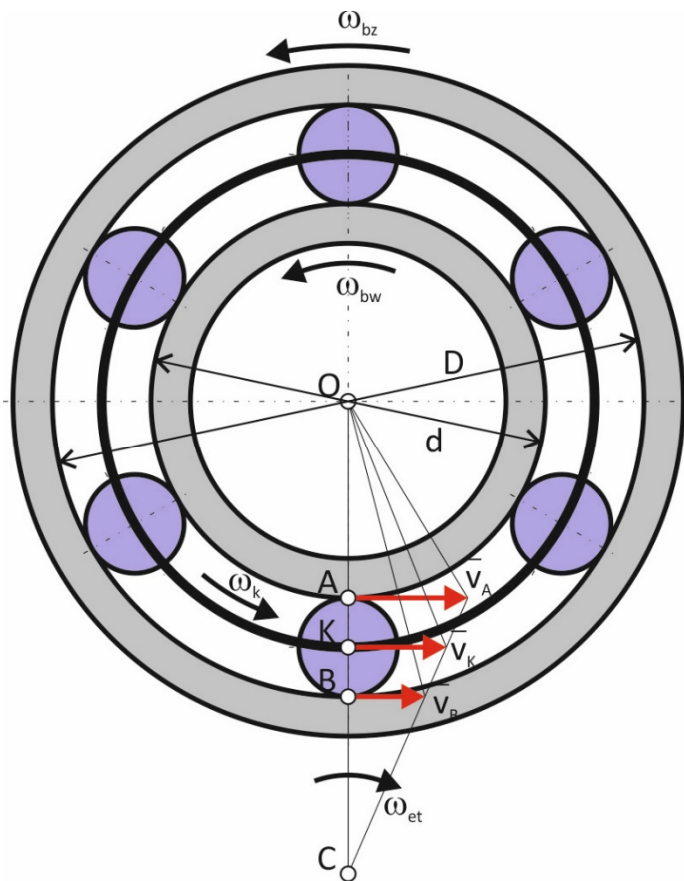
8.2. Drgania parametryczne łożyska tocznego

W poniższej analizie zajmiemy się łożyskiem tocznym zwykłym poprzecznym. Podstawowe elementy konstrukcyjne takiego łożyska przedstawiono na rysunku.



Podczas pracy takiego łożyska bieżnia zewnętrzna i/lub wewnętrzna oraz koszyk wykonują ruchu obrotowy, natomiast elementy toczne są w ruchu płaskim.

Opiszemy kinematykę łożyska zakładając najbardziej ogólny przypadek, czyli taki w którym zarówno bieżnia wewnętrzna jak i zewnętrzna są w ruchu.



ω_{bz} - prędkość kątowna bieżni zewnętrznej
 ω_{bw} - prędkość kątowna bieżni wewnętrznej
 ω_{et} - prędkość kątowna elementu tocznego
 ω_k - prędkość kątowna koszyka

A - punkt styku bieżni wewnętrznej z elementem tocznym

B - punkt styku bieżni zewnętrznej z elementem tocznym

C - chwilowy środek prędkości elementu tocznego

K - środek elementu tocznego

D - średnica bieżni zewnętrznej

d - średnica bieżni wewnętrznej

Znane są średnice bieżni zewnętrznej i bieżni wewnętrznej (D i d) oraz ich prędkości kątowe (ω_{bz} i ω_{bw}). Prędkości punktów A i B przypisanych odpowiednim bieżniom wynoszą

$$v_A^{(bw)} = \omega_{bw} \frac{d}{2} \quad (8)$$

$$v_B^{(bz)} = \omega_{bz} \frac{D}{2} \quad (9)$$

Jeśli przypiszemy te punkty do elementu tocznego, możemy zapisać

$$v_A^{(et)} = v_A^{(bw)} = \omega_{bw} \frac{d}{2} \quad (10)$$

$$v_B^{(et)} = v_B^{(bz)} = \omega_{bz} \frac{D}{2} \quad (11)$$

Z rozkładu prędkości punktów przypisanych do elementu tocznego wyznaczymy położenie chwilowego środka prędkości C tego elementu oraz jego prędkość kątową:

$$\frac{v_A^{(et)}}{AC} = \frac{v_B^{(et)}}{BC} \quad (12)$$

Z geometrii wynika, że $CA = BA + CB$ oraz $AB = \frac{D-d}{2}$. Niewiadoma wielkość CB wyznaczona z zależności (12) z uwzględnieniem podanych zależności geometrycznych oraz równań (10) i (11) wynosi

$$CB = \frac{\omega_{bz}D}{\omega_{bw}d - \omega_{bz}D} \frac{D-d}{2} \quad (13)$$

Prędkość kątowna elementu tocznego wynosi

$$\omega_{et} = \frac{v_B^{(et)}}{BC} = \frac{\omega_{bw}d - \omega_{bz}D}{D-d} \quad (14)$$

Odległość chwilowego środka prędkości C od środka łożyska O wynosi

$$OC = OB + BC = \frac{D}{2} + \frac{\omega_{bz}D}{\omega_{bw}d - \omega_{bz}D} \frac{D-d}{2} \quad (15)$$

Wyznamy jeszcze prędkość kątowną koszyka. W tym celu wyznaczymy prędkość punktu K przypisanego elementowi tocznemu jako

$$v_K^{(et)} = \omega_{et}CK = \omega_{et}(CB + BK) \quad (16)$$

Z kolei prędkość punktu K przypisanego koszykowi jest równa

$$v_K^{(k)} = \omega_k OK = \omega_k(OA + AK) \quad (17)$$

Wielkości BK i AK są równe promieniowi elementu tocznego $r_{et} = \frac{D-d}{4}$. Uwzględniając, że $v_K^{(k)} = v_K^{(et)}$ zapiszemy równanie

$$\omega_k(OA + AK) = \omega_{et}(CB + BK) \quad (18)$$

z którego, przy uwzględnieniu równań (13) i (14), wyznaczymy prędkość kątowną koszyka

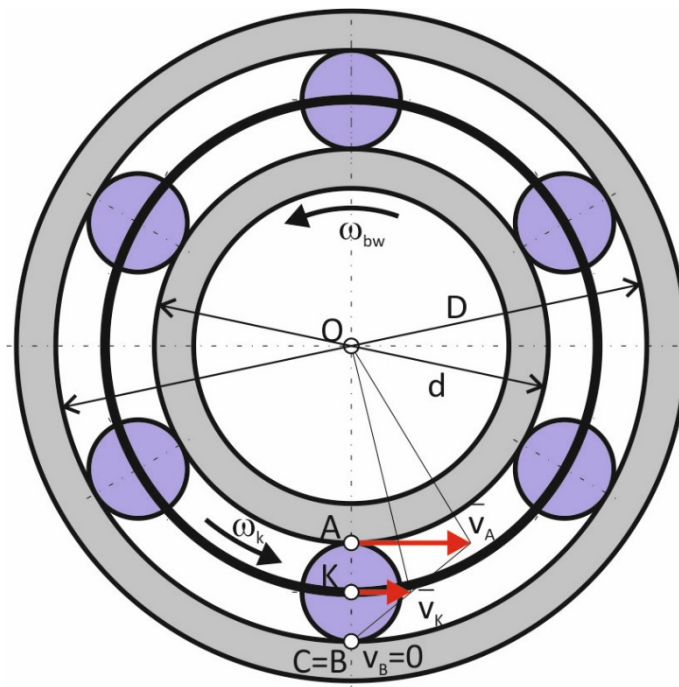
$$\omega_k = \frac{\omega_{bw}d + \omega_{bz}D}{D+d} \quad (19)$$

Kinematykę przedstawionego łożyska można również analizować analogicznie do kinematyki przekładni obiegowej stosując zasadę Willisa. Wtedy bieżnia zewnętrzna i wewnętrzna są jakby kołami centralnymi, element toczny jest analogiczny do koła satelitarne, a koszyk jest traktowany jak jarzmo. Należy zwrócić uwagę, że w klasycznym podejściu kierunki obrotów elementów łożyska są zaznaczone na rysunku, natomiast w zasadzie Willisa są one reprezentowane przez znaki "+" lub "-".

Podsumowanie rozważań dotyczących kinematyki łożyska tocznego zamieszczono w tabeli.

Nazwa elementu	Prędkość kątowna	Prędkość kątowna	Prędkość kątowna
Bieżnia zewnętrzna	ω_{bz}	nieruchoma	ω_{bz}
Bieżnia wewnętrzna	ω_{bw}	ω_{bw}	nieruchoma
Element toczny	$\omega_{et} = \frac{\omega_{bw}d - \omega_{bz}D}{D - d}$	$\omega_{et} = \frac{\omega_{bw}d}{D - d}$	$\omega_{et} = \frac{-\omega_{bz}D}{D - d}$
Koszyk	$\omega_k = \frac{\omega_{bw}d + \omega_{bz}D}{D + d}$	$\omega_k = \frac{\omega_{bw}d}{D + d}$	$\omega_k = \frac{\omega_{bz}D}{D + d}$

Rozważmy teraz jeden z prostszych i bardziej typowych wariantów, kiedy biegnia zewnętrzna łożyska jest nieruchoma.

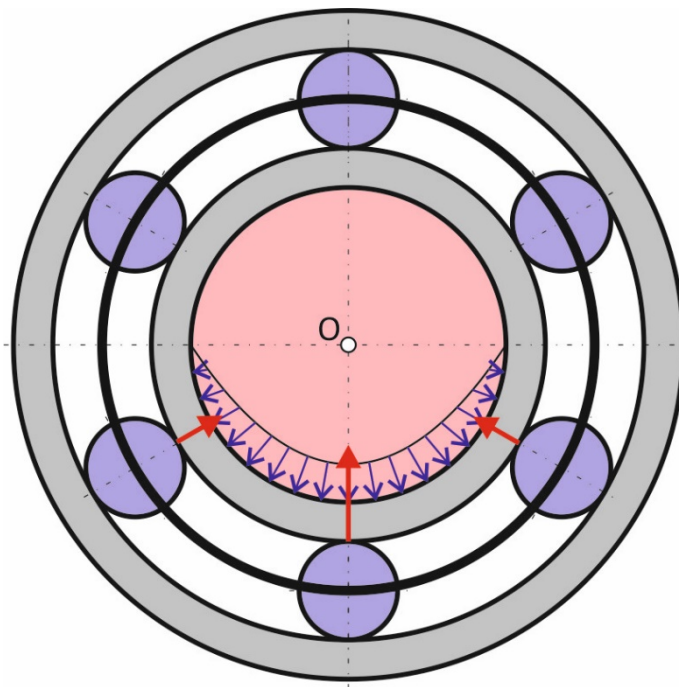


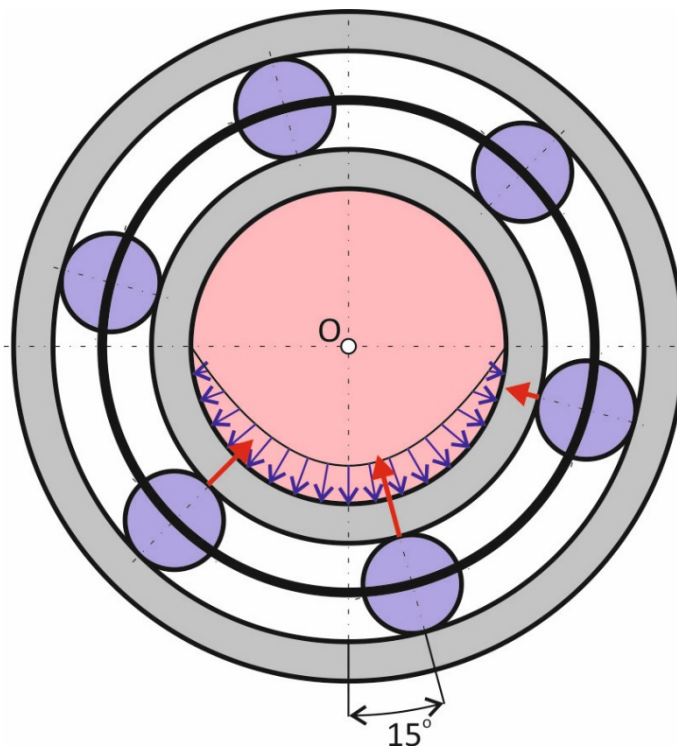
Prędkość kątową koszyka w takim przypadku określa wzór

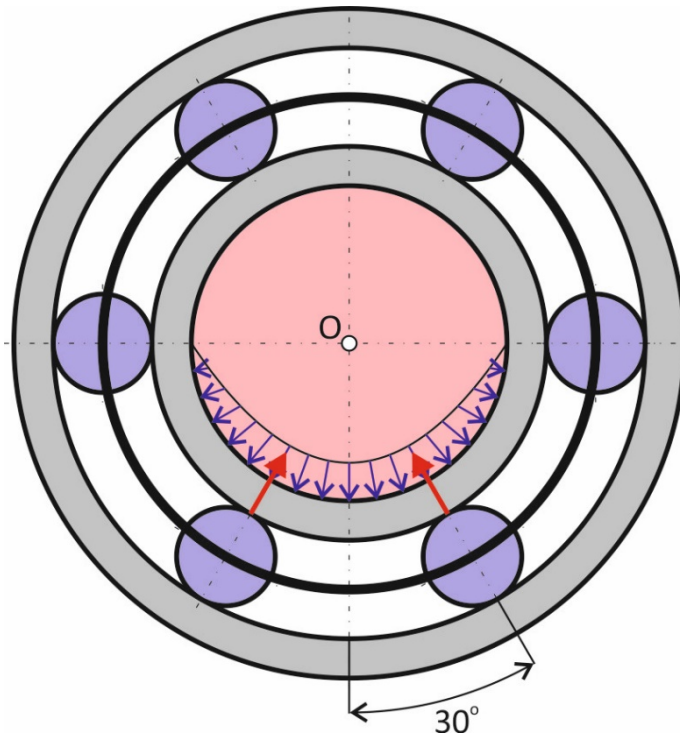
$$\omega_k = \omega_{bw} \frac{d}{D+d} \quad (20)$$

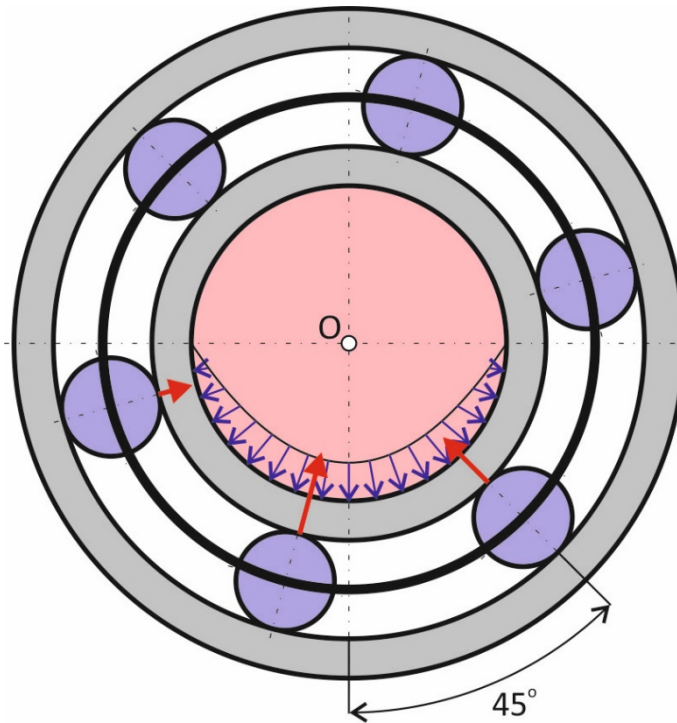
Jest to również prędkość z jaką środek elementu tocznego wraz z koszykiem obiega wokół środka łożyska O. Zatem na jeden obrót bieżni wewnętrznej przypada $\frac{d}{D+d}$ obrotu koszyka, a tym samym przypada $\frac{d}{D+d}$ obrotu punktu K wokół środka łożyska O. Ze względu na fakt, że zachodzi nierówność $0 < d < D$ to stosunek $0 < \frac{d}{D+d} < 1$, czyli koszyk obraca się wolniej niż bieżnia wewnętrzna.

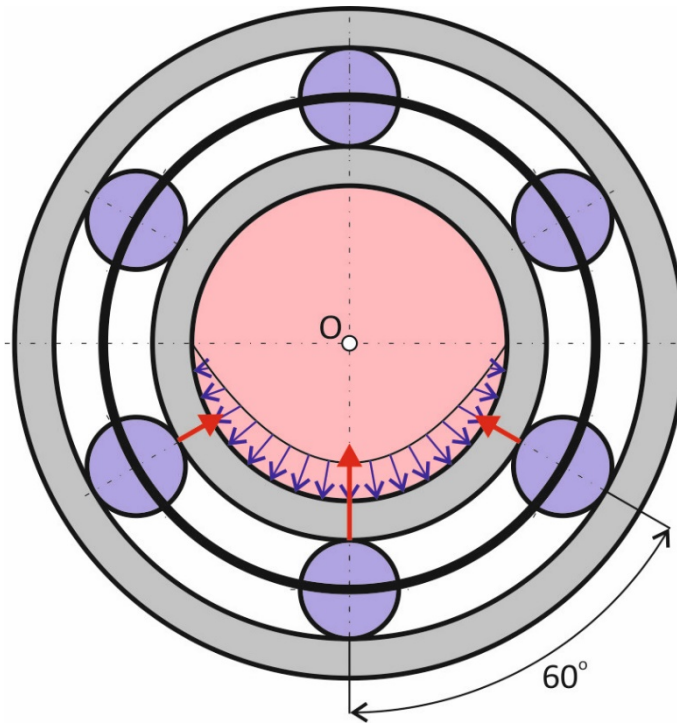
Założmy teraz, że łożysko znajduje się na wale, który obciąża je tylko pewną częścią ciężaru własnego. Pozostałe obciążenia zostają pominięte. Ze względu na pasowanie z wciskiem łożyska na czopie wału, obciążenie wewnętrznego pierścienia łożyska pochodzące od ciężaru wału nie jest punktowe, lecz rozłożone symetrycznie względem osi pionowej, co w przybliżeniu pokazano na rysunkach. W zależności od położenia kąтового elementów tocznych, będą one przenosić różne wartości obciążeń., co pokazano na kolejnych rysunkach.





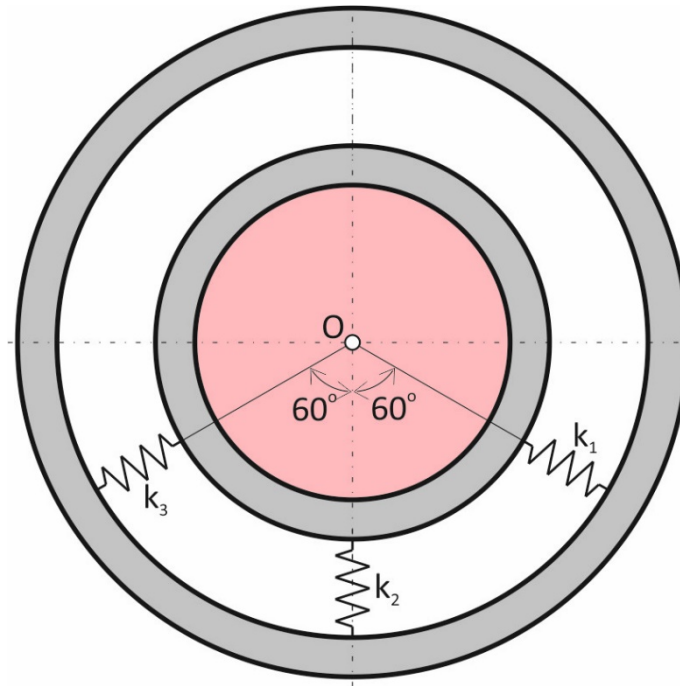






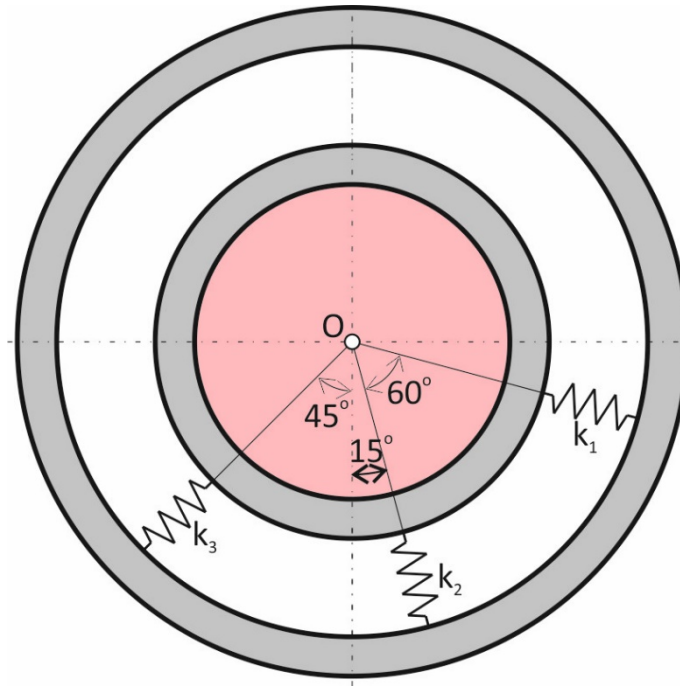
Elementy toczne w dolnej połowie łożyska są poddawane obciążeniom ściskającym, podczas gdy te w górnej części nie są obciążane (przypomnijmy, że rozważamy jedynie obciążenie od ciężaru wału). Elementy toczne są bardzo sztywne ale nie nieskończenie sztywne. Można je modelować jak sprężyny o bardzo dużym współczynniku sprężystości. Współczynnik sprężystości każdego elementu tocznego jest stały i nie zależy od położenia kąowego elementu. Natomiast sztywność całego łożyska zmienia się okresowo wraz ze zmianą położenia elementów tocznych.

Przyjmijmy, że zamiast elementów tocznych w łożysku znajdują się sprężyny (tylko w dolnej części łożyska, ponieważ w górnej części elementy toczne nie są obciążone). Wyznamy teraz zastępczy współczynnik sprężystości łożyska na kierunku pionowym k_z dla różnych położeń elementów tocznych zakładając że sprężystość wszystkich elementów tocznych jest jednakowa, czyli $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = k$.



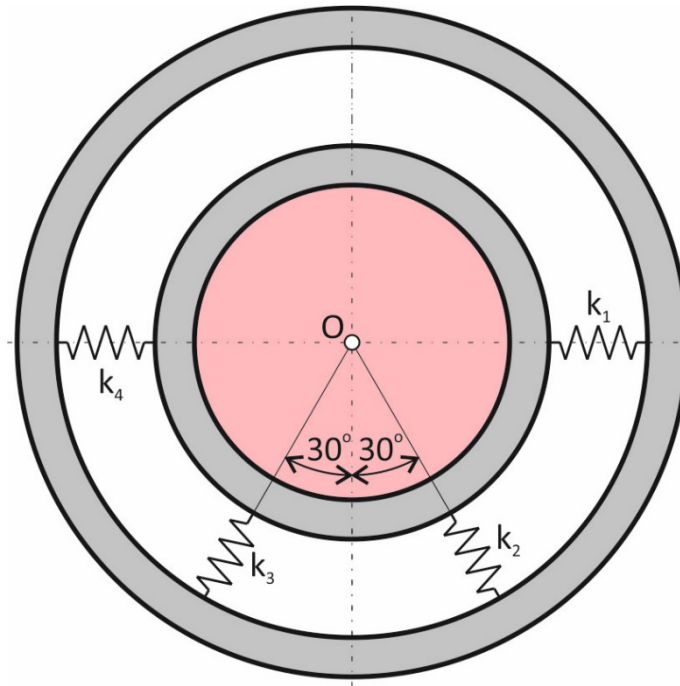
W ustawieniu jak na rysunku zastępczy współczynnik sprężystości k_z wynosi

$$k_z = k_1 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + k_2 + k_3 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}k_1 + k_2 + \frac{1}{2}k_3 = 2k \quad (21)$$



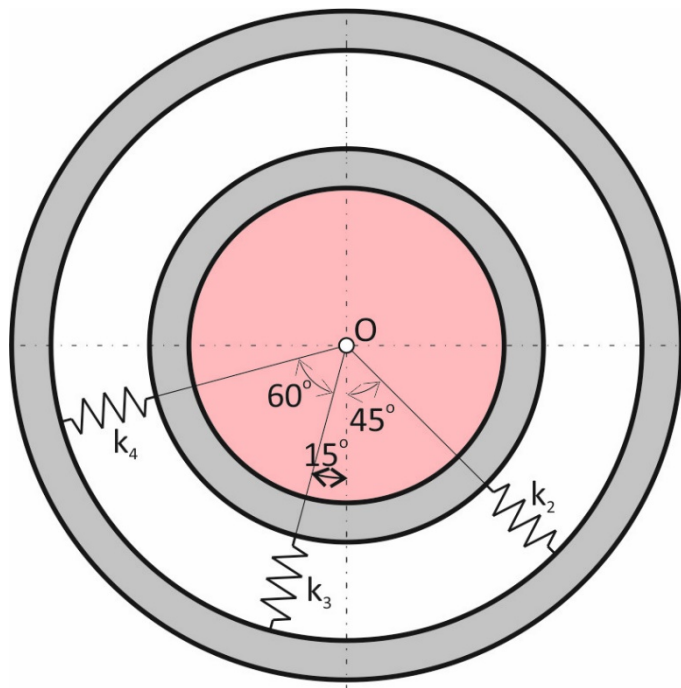
W ustawieniu jak na rysunku zastępczy współczynnik sprężystości k_z wynosi

$$k_z = k_1 \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + k_2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + k_3 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} k_1 + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} k_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} k_3 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} k \quad (22)$$



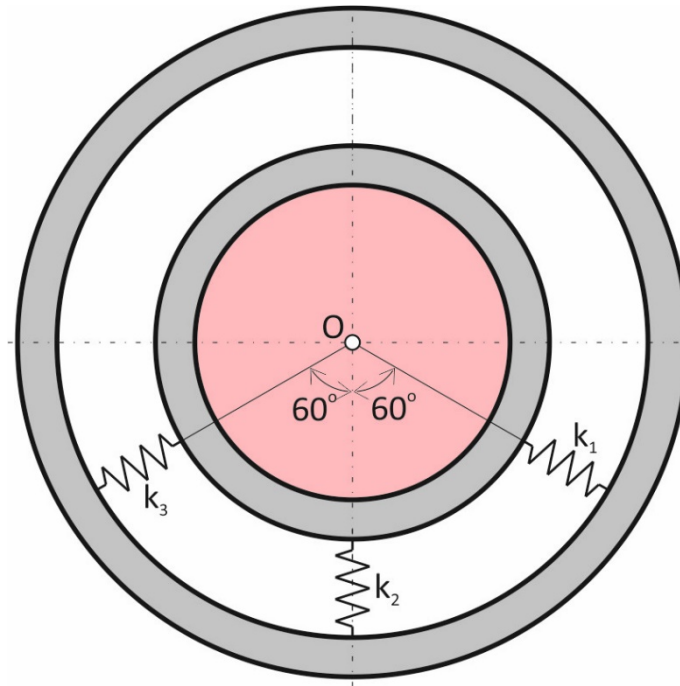
W ustawieniu jak na rysunku zastępczy współczynnik sprężystości k_z wynosi

$$k_z = k_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + k_2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + k_3 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + k_4 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} k_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} k_3 = \sqrt{3} k \quad (23)$$



W ustawieniu jak na rysunku zastępczy współczynnik sprężystości k_z wynosi

$$k_z = k_2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + k_3 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + k_4 \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} k_2 + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} k_3 + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} k_1 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} k \quad (24)$$



W ustawieniu jak na rysunku zastępczy współczynnik sprężystości k_z wynosi

$$k_z = k_2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + k_3 + k_4 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}k_2 + k_3 + \frac{1}{2}k_4 = 2k \quad (25)$$

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że przy przemieszczeniu koszyka o $1/6$ obrotu występuje jeden pełny cykl zmian zastępczego współczynnika sprężystości k_z między wartością maksymalną $2k$ i minimalną $\sqrt{3}k$. Zatem podczas pełnego obrotu koszyka wystąpi 6 takich cykli zmian. Z kinematyki (wzór (20)) wynika, że na jeden obrót bieżni wewnętrznej z wałem przypada $\frac{d}{D+d}$ obrotów koszyka, a zatem podczas jednego obrotu wału zachodzi $6 \frac{d}{D+d}$ cykli zmian zastępczego współczynnika sprężystości. W takim przypadku współczynnik sprężystości może być opisany funkcją

$$k(t) = k_z + \Delta k_z \cos(\omega_k t) = k_z + \Delta k_z \cos\left(6 \frac{d}{D+d} \theta t\right) \quad (26)$$

gdzie częstość zmian współczynnika sprężystości to $\omega_k = 6 \frac{d}{D+d} \theta$, θ to prędkość kątowa wału tożsama z prędkością kątową bieżni wewnętrznej ω_{bw} .

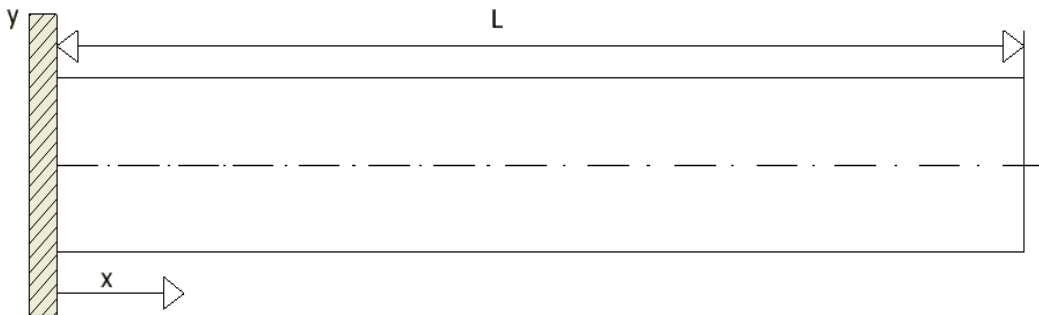
Wał w łożyskach zachowuje się podobnie jak w poprzednim przykładzie układ wał-krążek. Tam wał był sprężysty a krążek posiadał ciężar, który powodował odkształcenie wału. W wyniku zmiennej sprężystości przy obrotach wału powstawała zmienna składowa siły sprężystości, która stanowiła siłę wymuszającą drgania. Taka sama sytuacja będzie zachodzić tutaj, gdzie wał ma ciężar powodujący odkształcenie elementów tocznych łożysk, a sztywność łożyska zmienia się w przy obrotach wału. Powstaje również zmienna składowa siły sprężystości stanowiąca siłę wymuszającą drgania.

Układ wał-łożyska ma częstość własną ω_0 . Jeżeli wał obraca się z prędkością kątową $\theta = \frac{1}{6} \frac{D+d}{d} \omega_0$, można spodziewać się wzrostu drgań. Innymi słowy częstość zmian sprężystości pokrywa się wówczas z częstością własną układu, czyli $\omega_k = \omega_0$ i wówczas składowa zmienna siły sprężystości pobudza drgania rezonansowe układu wał-łożyska.

W rozważanym przypadku średnia wartość zastępczego współczynnika sprężystości wynosi $k_z = \frac{2+\sqrt{3}}{2} k$ natomiast amplituda zmian tego współczynnika to $\Delta k_z = \frac{2-\sqrt{3}}{2} k$. Stosunek wartość średniej do amplitudy zmian wynosi $\frac{\Delta k_z}{k_z} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \cong 0.0718$ i jest związany z liczbą elementów toczych.

9. Drgania układu ciągłego

Układy ciągłe, których przekrój poprzeczny jest znacznie mniejszy od ich długości nazywamy układami jednowymiarowymi. Przykładem takiego układu jest belka wspornikowa pokazana na rys. 1. Drgania takiego układu będą zależały od jednej współrzędnej przemieszczenia x oraz czasu t .



Rys. Belka jednostronnie utwierdzona o długości L

Wychodząc z teorii układów ciągłych można wyznaczyć częstotliwości własne belki. Stosując II zasadę dynamiki Newtona do małego wycinka belki można zapisać zmianę siły tnącej od przyspieszenia wycinka belki $\partial^2 Y / \partial t^2$:

$$EJ \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

W ogólności to równanie różniczkowe może być uogólnione do postaci uwzględniającej różne właściwości rozciągające, napięcie osiowe (Q), bezwładność obrotową oraz poprzeczne obciążenie zewnętrzne (P) w kierunku $+y$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ * \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(Q \frac{\partial Y}{\partial x} \right) - \rho J \frac{\partial^4 Y}{\partial x^2 * \partial t^2} + m \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = P(x, t) \quad (2)$$

W naszych rozważaniach przyjmujemy postać równania (1) uwzględniając, że $EJ = const.$, $Q = 0$, $P(x, t) = 0$, $\rho J \frac{\partial^4 Y}{\partial x^2 * \partial t^2} = 0$.

Utwierdzenie jednostronne belki wspornikowej nie pozwala na rotację belki oraz na jej przesunięcie w punkcie zamocowania, z czego wynika warunek brzegowy

$$Y = \frac{\partial Y}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

W praktyce sztywność utwierdzenia musi być około 10-krotnie większa od sztywności belki aby zapobiec jej rotacjom.

Rozwiązanie modalne przy pomocy separacji zmiennych równania ruchu układu nieobciążonego ($P(x, t) = 0$) jest funkcją odległości x wzdłuż belki pomnożone razy okresową funkcją czasu

$$Y(x, t) = \tilde{y}(x)T(t) \quad (4)$$

Postawienie równania (4) do równania (1) i podzielenie przez $\tilde{y}(x)T(t)$ prowadzi do funkcji (x) po prawej stronie znaku równości, a funkcji czasu (t) po lewej:

$$\frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\tilde{y}(x)} \frac{EJ}{m} \frac{\partial^4 \tilde{y}(x)}{\partial x^4} = -\omega^2 = \text{constant} \quad (5)$$

Ponieważ obie strony są równe i niezależne, muszą być równe tej samej stałej. Przyjmując tę stałą jako $-\omega^2$, z równania (5) uzyskujemy dwa równania różniczkowe zwyczajne. Pierwsze równanie (6) w funkcji czasu(t), drugie równanie (7) na przestrzeni (x):

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{d^4 \tilde{y}(x)}{dx^4} - \omega^2 \left(\frac{m}{EJ}\right) \tilde{y}(x) = 0 \quad (7)$$

Rozwiązaniami równania (6) są wartości ω : $T(t) = \sin(\omega t)$ oraz $\cos(\omega t)$. Oscylują one w czasie z częstotnością ω .

Rozwiązaniami równania (7) są sumy \sin , \cos , \sinh , \cosh i funkcje wykładnicze $\lambda x/L$. Nazywane są one funkcjami kształtu $\tilde{y}(\lambda x/L)$. Dyskretne wartości bezwymiarowego parametru częstotliwości własnych λ spełniają warunki brzegowe i określają częstotliwości własne.

Częstotliwości własne belek są funkcjami wartości własnych, geometrii belek oraz właściwości materiału.

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} = \frac{\lambda_i^2}{2\pi * L^2} * \sqrt{\frac{E * J}{m}}, \text{ Hz}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad m = \rho A \quad (8)$$

Wartości λ_i dla kolejnych częstotliwości własnych wynoszą:

$$\lambda_1 = 1.875104;$$

$$\lambda_2 = 4.694091;$$

$$\lambda_3 = 7.854757;$$

$$\lambda_4 = 10.99554;$$

$$\lambda_5 = 14.13717;$$

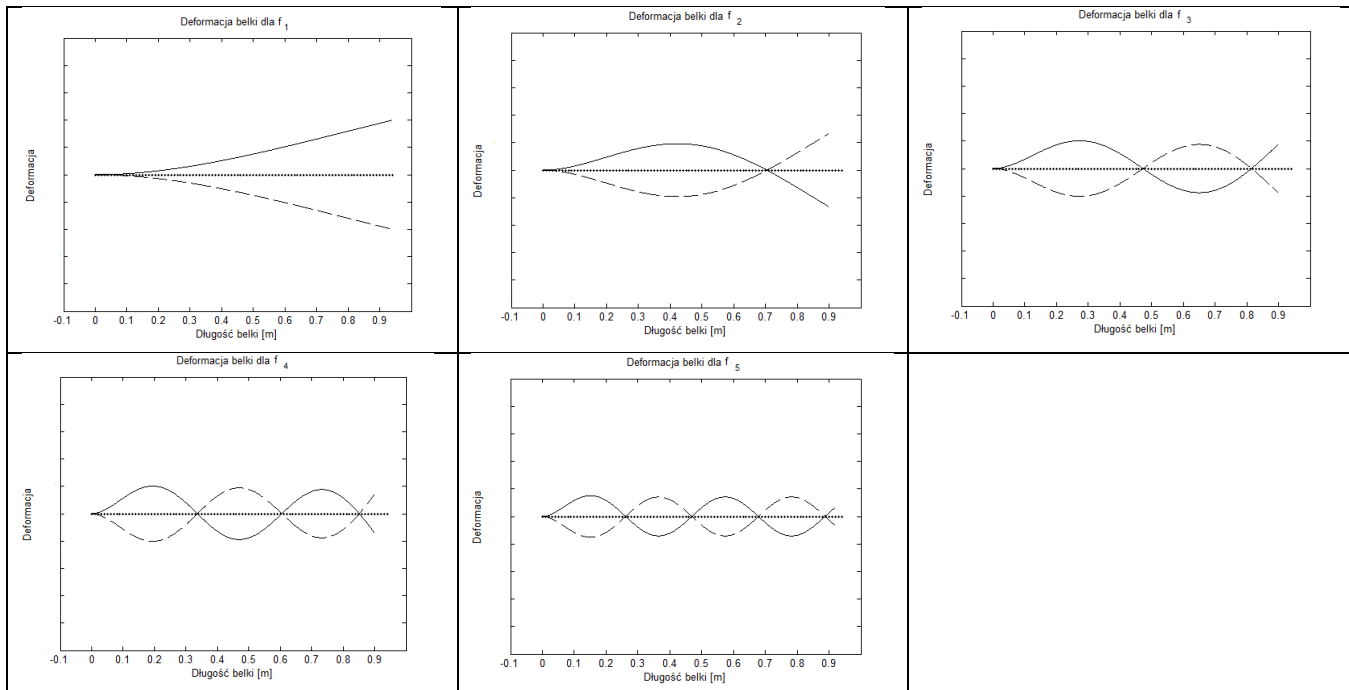
$$\lambda_i = (2i-1) \pi / 2; \text{ dla } i > 5$$

Tabela. Częstotliwości własne belki stalowej o długości $L=0,94$ m, szerokości $0,05$ i wysokości $0,005$ m

Nr częstotliwości	Wartość częstotliwości, Hz
1	4,42
2	27,72
3	77,62
4	152,11
5	251,46

Korzystając ze wzoru (9) przy użyciu wyznaczono postacie drgań własnych belki dla kolejnych częstotliwości własnych

$$\tilde{y}_i = \cosh \frac{\lambda_i x}{L} + \cos \frac{\lambda_i x}{L} - \sigma_i \left(\sinh \frac{\lambda_i x}{L} + \sin \frac{\lambda_i x}{L} \right) \quad (9)$$



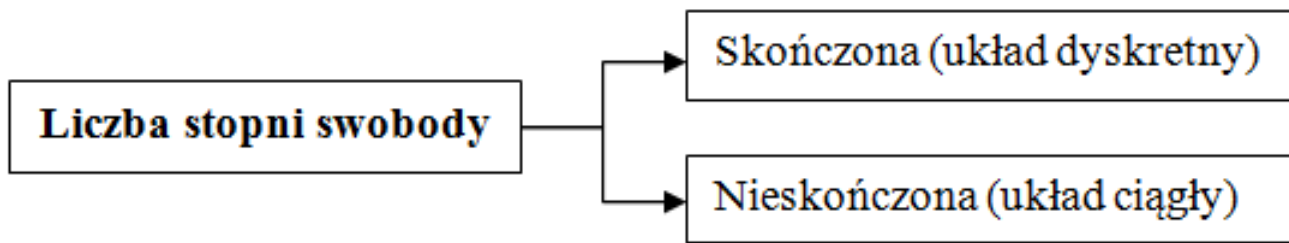
10. Podsumowanie – klasyfikacja drgań

W układach technicznych można zaobserwować różne rodzaje drgań, co za tym idzie klasyfikacja ich jest przeprowadzona według rozmaitych kryteriów. Kryteria podziału drgań są następujące:

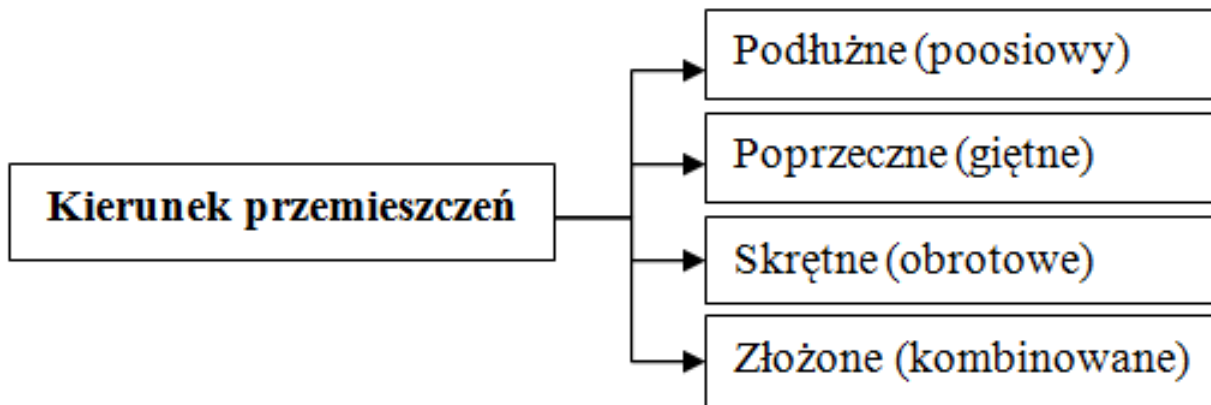
- liczba stopni swobody,
- kierunek przemieszczeń,
- sposób wzbudzania drgań,
- wpływ oporów ruchu,
- model matematyczny układu drgającego.

Podział w kryterium pierwszym dotyczy liczby stopni swobody. To kryterium jest związane z zamodelowaniem obiektu, co jest jednym z ważniejszych etapów analizy/projektowania cechującym się wyborem układu zastępczego. Układ ten ma w założonym stopniu dokładności odwzorować zachowanie i właściwości obiektu rzeczywistego. W etapie końcowym otrzymuje się model strukturalny obiektu.

W podziale tym wyróżnia się układy dyskretne cechujące się skończoną liczbą stopni swobody, których równania ruchu mają postać równań różniczkowych zwyczajnych. Natomiast w układach ciągłych liczba stopni swobody jest nieskończona, a równania ruchu mają postać równań różniczkowych cząstkowych lub równań całkowych.

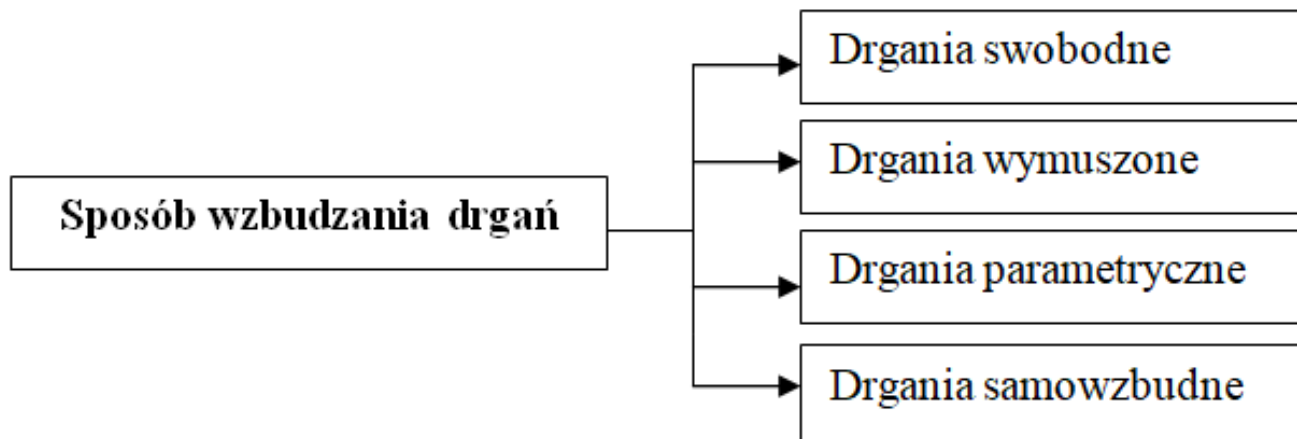


Drugie kryterium uwzględnia kierunek przemieszczeń drganiowych. Wyróżnia się tutaj drgania podłużne charakteryzujące się tym, że rozprzestrzeniają się w kierunku zgodnym z kierunkiem rozchodzenia się fali. Przykładem tych drgań są fale dźwiękowe. W przypadku drgań poprzecznych kierunek drgań cząstek ośrodka jest prostopadły względem kierunku rozchodzenia się fali. Drgania te mogą rozchodzić się tylko w ośrodkach stałych.



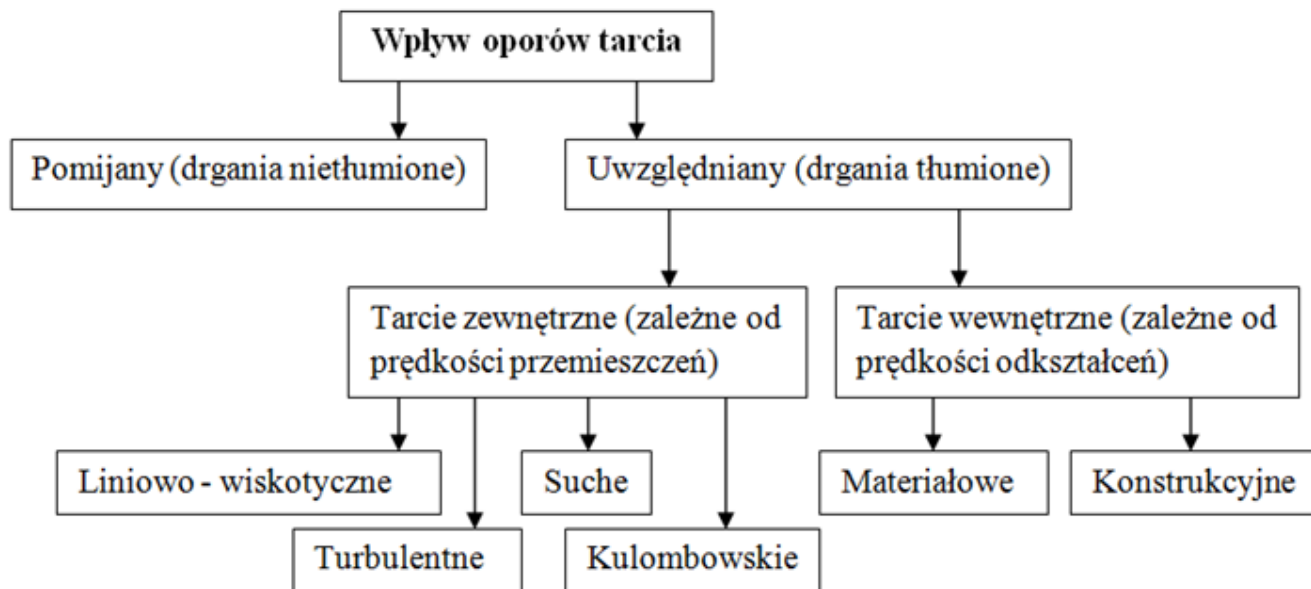
Drgania skrętne to drgania, które w sposób szczególny występują w elementach napędowych maszyn. Główną przyczyną powodującą ten typ drgań jest okresowa zmienność momentu obrotowego w układzie napędowym, jak również sprężystość skrętna elementów przeznaczonych do przenoszenia tego momentu. Drgania złożone to takie, które mają charakter kilku drgań np. drgania poprzeczno-skrętne.

Następne kryterium dzieli drgania ze względu na sposób ich wzbudzenia. Drgania swobodne to takie drgania, które są wywołane wychyleniem z położenia równowagi, gdy na ciało nie działają żadne siły. Wzbudzenie drgań następuje poprzez warunki początkowe. Podczas rozpatrywania tego typu drgań nacisk jest kładziony na obliczenie częstości własnych oraz wyznaczeniu funkcji własnych. W przypadku drgań swobodnych, równania różniczkowe są równaniami jednorodnymi.



Drugim rodzajem drgań są drgania wymuszone, które zachodzą pod wpływem zewnętrznych sił o zmiennym natężeniu. Tego typu drgania są opisane równaniami mającymi po prawej stronie wyrazy jawnie zależne od czasu. Przyczyną wzbudzenia drgań parametrycznych są okresowe zmiany parametrów np. sztywności lub bezwładności układów. Natomiast w przypadku drgań samowzbudnych sposobem ich wzbudzenia jest dopływ energii ze źródła o działaniu ciągłym, który jest sterowany ruchem układu poprzez mechanizm sprzężenia zwrotnego.

W czwartym kryterium drgania zostały podzielone na drgania tłumione i nietłumione ze względu na występujące opory ruchu.



W rzeczywistości drgania układów w każdym przypadku są tłumione, nie mniej jednak w niektórych przypadkach wpływ tarcia na działanie tłumienia jest pomijalnie mały. W przypadku tarcia zewnętrznego można wymienić tarcie liniowo-wiskotyczne, w którym siła tłumienia jest proporcjonalna do prędkości przemieszczenia. Tarcie suche ma miejsce gdy między współpracującymi powierzchniami nie ma czynnika zmniejszającego tarcie np. wody, oleju, smaru. W tarciu wewnętrznym występuje tarcie materiałowe, które zależy od prawa Hook'a uwzględniającego wpływ odkształceń na działające naprężenia. Drugim typem tarcia wewnętrznego jest tarcie konstrukcyjne, które powstaje w połączeniach nieruchomych (gwintowych, nitowych, wielowypustowych itp.).

Budując model matematyczny powinno się mieć na uwadze dwa czynniki. Pierwszym jest stopień podobieństwa dynamicznego do obiektu rzeczywistego. Drugim czynnikiem jest stopień złożoności równań opisujących ruch modelu, a także możliwość ich rozwiązania. To kryterium dzieli drgania ze względu na model matematyczny układu drgającego, który może być liniowy lub nieliniowy. W przypadku modelu liniowego występujące siły sprężystości i tarcia są liniowe, natomiast parametry inercyjne stałe. Nieliniowy model charakteryzuje się tym, że siły sprężystości i/lub tarcia są nieliniowe, ewentualnie parametry inercyjne, tłumienia i sprężystości są okresowo zmienne.

