

# Spis treści

Dodatek A. Przykłady.....	2
A.1. Drgania układu o jednym stopniu swobody .....	2
A.1.1. Wyznaczanie deformacji statycznej sprężyny (kryterium Lagrange’a – Dirichleta) .....	2
A.1.2. Wyznaczenie częstości drgań własnych metodą energetyczną.....	8
A.1.3. Drgania swobodne .....	11
A.1.4. Drgania swobodne tłumione (z tarciem wiskotycznym) .....	14
A.1.5. Drgania wymuszone tłumione (z tarciem wiskotycznym).....	23
A.2. Drgania układu o dwóch stopniach swobody .....	33
A.2.1. Różniczkowe równania ruchu .....	33
A.2.2. Wyznaczenie częstości własnych układu.....	38
A.2.3. Drgania wymuszone nietłumione.....	44
A.3. Drgania giętne belki wspornikowej.....	49
A.3.1. Wyznaczenie częstości własnej metodą energetyczną .....	49
A.3.2. Drgania swobodne tłumione .....	54

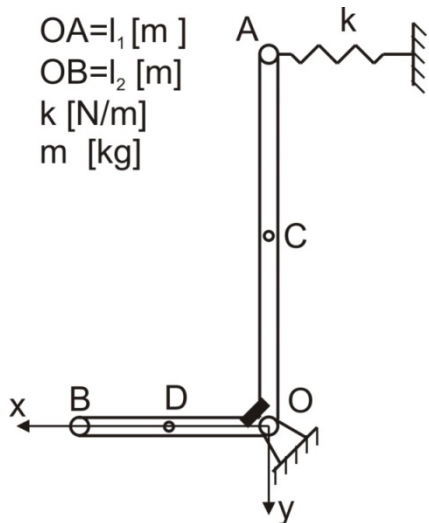
# Dodatek A. Przykłady.

## A.1. Drgania układu o jednym stopniu swobody

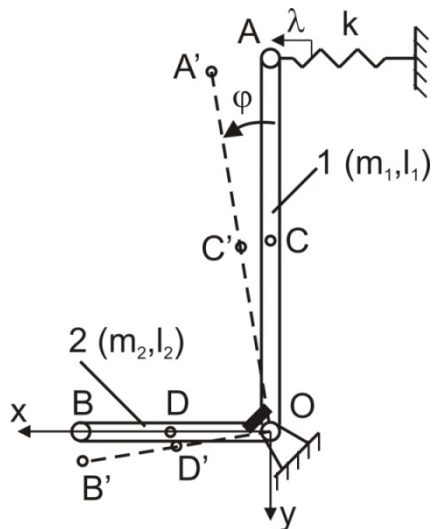
### A.1.1. Wyznaczanie deformacji statycznej sprężyny (kryterium Lagrange'a – Dirichleta)

Rozważmy układ podany na rys. 1. Składa się on z bryły o złożonym kształcie i masie  $m$  oraz sprężyny o współczynniku sprężystości  $k$ . Układ w położeniu jak na rysunku jest w stanie równowagi statycznej. Myślowo podzielmy złożoną bryłę na pręty 1 ( $m_1, l_1$ ) i 2 ( $m_2, l_2$ ) jak na rys. 2. Sprężyna jest wstępnie odkształcona ciężarem pręta 2 a jej deformacja statyczna wynosi  $\lambda$ . Załóżmy, że dodatkowo układ został wychylony z położenia równowagi o kąt  $\phi_0$  i puszczony swobodnie. W wyniku tego zachodzą drgania swobodne.

Prezentowany układ jest nieliniowy, natomiast formalizmy matematyczne, których będziemy używali zakładają liniowość układów. Zatem wszystkie nieliniowości układu będą linearyzowane.



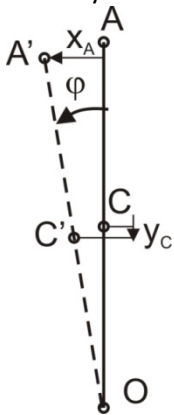
Rys. 1. Układ mechaniczny



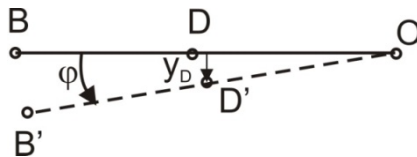
Rys. 2. Drgania układu mechanicznego

## Kinematyka układu

Istotne są przemieszczenia pionowe środków mas prętów (punkty C i D) oraz przemieszczenie poziome końca sprężyny (punkt A) (przemieszczenie pionowe końca sprężyny pomija się). Przemieszczenia przedstawiono na rys. 3 i rys. 4.



Rys. 3. Kinematyka przemieszczeń



Rys. 4. Kinematyka przemieszczeń

Z rysunków wynika, że:

$$\sin \varphi = \frac{x_A}{l_1} \rightarrow x_A = l_1 \sin \varphi, \quad (1)$$

$$\sin \varphi = \frac{y_D}{\frac{l_2}{2}} \rightarrow y_D = \frac{l_2}{2} \sin \varphi, \quad (2)$$

$$y_C = \frac{l_1}{2} - \frac{l_1}{2} \cos \varphi = \frac{l_1}{2} (1 - \cos \varphi). \quad (3)$$

W układach technicznych drgania mechaniczne to szybkie ale małe ruchy wykonywane względem położenia równowagi statycznej. Dlatego można przyjąć założenie, że kąt  $\varphi$  jest małym kątem (w praktyce  $|\varphi| \leq 0.3$  [rad]). Wówczas można, bez popełnienia istotnego błędu, przyjąć że:

$$\sin\varphi \cong \varphi, \quad (4)$$

$$\cos\varphi \cong 1 - \frac{\varphi^2}{2}. \quad (5)$$

Ze względu na fakt, że kąt  $\varphi$  jest mały, to wyraz  $\varphi^2$  jest tzw. małą wartością wyższego rzędu., czyli  $\varphi^2 \approx 0$ . Bez popełnienia większego błędu można przyjąć w równaniu (5), że  $\cos \varphi = 1$ . W konsekwencji zależności kinematyczne zostaną zlinearyzowane i otrzymamy

$$x_A = l_1 \varphi, \quad (6)$$

$$y_D = \frac{l_2}{2} \varphi, \quad (7)$$

$$y_C = 0. \quad (8)$$

W dalszej części obliczeń wymagana będzie znajomość elementarnych przemieszczeń:

$$\partial x_A = l_1 \partial \varphi, \quad (9)$$

$$\partial y_D = \frac{l_2}{2} \partial \varphi, \quad (10)$$

$$\partial y_C = 0. \quad (11)$$

### Wyznaczanie deformacji statycznej sprężyny (kryterium Lagrange'a – Dirichleta)

Potencjał układu to:

$$V = V_1 + V_2, \quad (12)$$

gdzie  $V_1$  to potencjał sił sprężystych,  $V_2$  to potencjał mas w polu ziemskim. Znana jest z mechaniki ogólnej zależność:

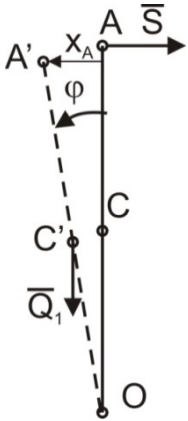
$$\frac{\partial V_1}{\partial x_A} = -P_x, \quad (13)$$

gdzie  $P_x$  to rzut siły pola potencjalnego sprężyny na kierunek  $x_A$ . Siła w sprężynie  $S$  jest skierowana przeciwnie do przemieszczenia  $x_A$  (rys. 5), zatem

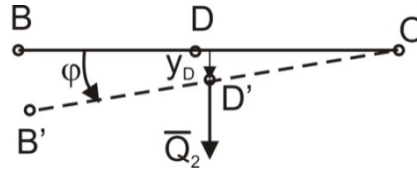
$$P_x = -S = -k(x_A + \lambda), \quad (14)$$

i dalej

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_A} = k(x_A + \lambda). \quad (15)$$



Rys. 5. Siły pól potencjalnych



Rys. 6. Siły pól potencjalnych

Wykorzystując związki znane z kinematyki zapiszemy

$$\partial V_1 = k(l_1 \varphi + \lambda) l_1 \partial \varphi. \quad (16)$$

Całkując obustronnie (16) wyrażenie otrzymamy

$$V_1 = \int_0^\varphi \partial V_1 = \int_0^\varphi k(l_1 \varphi + \lambda) l_1 \partial \varphi = \frac{1}{2} k l_1^2 \varphi^2 + k l_1 \lambda \varphi. \quad (17)$$

Podobnie wyznaczmy potencjał mas w polu ziemskim. Potencjał masy  $m_1$ , to

$$\frac{\partial V_2^{(1)}}{\partial y_C} = -P_{yC}, \quad (18)$$

gdzie  $P_{yC}$  to rzut siły  $Q_1 = m_1 g$  na kierunku ruchu środka masy (punktu C). Jako, że  $\hat{\partial} y_C = 0$ , zatem

$$\partial V_2^{(1)} = -P_{yC} \hat{\partial} y_C = 0, \quad (19)$$

Potencjał masy  $m_2$  to

$$\frac{\partial V_2^{(2)}}{\partial y_D} = -P_{yD}, \quad (20)$$

gdzie  $P_{yD}$  to rzut siły  $Q_2 = m_2 g$  na kierunek  $y_D$ . Siła  $Q_2$  jest skierowana zgodnie z przemieszczeniem  $y_D$  (rys. 6), zatem

$$P_{yD} = Q_2 = m_2 g, \quad (21)$$

i dalej

$$\frac{\partial V_2^{(2)}}{\partial y_D} = -m_2 g. \quad (22)$$

Wykorzystując związki znane z kinematyki zapiszemy

$$\partial V_2^{(2)} = -m_2 g \frac{l_2}{2} \partial \varphi. \quad (23)$$

Sumując  $\partial V_2^{(1)}$  i  $\partial V_2^{(2)}$  otrzymamy

$$\partial V_2 = \partial V_2^{(1)} + \partial V_2^{(2)} = -m_2 g \frac{l_2}{2} \partial \varphi. \quad (24)$$

Całkując obustronnie (24) wyrażenie otrzymamy

$$V_2 = \int_0^\varphi \partial V_2 = -\int_0^\varphi m_2 g \frac{l_2}{2} \partial \varphi = -m_2 g \frac{l_2}{2} \varphi. \quad (25)$$

Całkowity potencjał układu wynosi

$$V = \frac{1}{2} k l_1^2 \varphi^2 + k l_1 \lambda \varphi - m_2 g \frac{l_2}{2} \varphi. \quad (26)$$

**Tw. Dirichleta:** *W polu potencjalnym punkt, w którym potencjał osiąga minimum jest położeniem równowagi stałej.*

Szukamy minimum potencjału  $V$  wykorzystując znane z matematyki postępowanie określania minimum funkcji. Pochodna potencjału po współrzędnej  $\varphi$  to

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = k l_1^2 \varphi + k l_1 \lambda - m_2 g \frac{l_2}{2}. \quad (27)$$

Potencjał jest minimalny w stanie równowagi statycznej czyli wtedy gdy  $\varphi=0$ , czyli

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = 0 \rightarrow k l_1 \lambda - m_2 g \frac{l_2}{2} = 0. \quad (28)$$

**Zatem deformacja statyczna jest wyrażona wzorem**

$$\lambda = \frac{m_2 g}{k} \frac{l_2}{2 l_1}. \quad (29)$$

Należy jeszcze sprawdzić, czy rzeczywiście w wyznaczonych warunkach potencjał osiąga minimum, tzn. czy

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} > 0. \quad (30)$$

Z obliczeń wynika, że

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = k l_1^2 > 0, \quad (31)$$

czyli znak drugiej pochodnej potencjału względem kąta  $\varphi$  jest dodatni bo  $k > 0$  i rzeczywiście w położeniu równowagi statycznej potencjał osiąga wartość minimalną.

## A.1.2. Wyznaczenie częstości drgań własnych metodą energetyczną

Jednym ze sposobów wyznaczenia częstości drgań własnych układu jest wykorzystanie zasady zachowania energii mechanicznej. Czyli jest to metoda stosowana dla układów zachowawczych, tzn. takich, w których nie występują straty energii (nie występuje tłumienie – przypadek idealny).

Energia mechaniczna to

$$H = E + V, \quad (32)$$

gdzie  $E$  to energia kinetyczna układu,  $V$  to potencjał układu. Z zasady zachowania energii mechanicznej wynika, że

$$V_{\max} = E_{\max}. \quad (33)$$

Zatem należy wyznaczyć najpierw energię potencjalną i kinetyczną, a następnie ich maksymalne wartości.

Potencjał to (po uwzględnieniu deformacji statycznej w równaniu (26))

$$V = \frac{1}{2} k l_1^2 \varphi^2. \quad (34)$$

Potencjał zależy tylko od deformacji sprężyny wynikającej z ruchu układu względem położenia równowagi statycznej. Natomiast energia kinetyczna układu to suma energii kinetycznych prętów 1 i 2 wykonujących ruch obrotowy wokół punktu  $O$ .

$$E = \frac{1}{2} I_O^{(1)} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_O^{(2)} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{3} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \dot{\varphi}^2. \quad (35)$$

Rozwiązanie równania drgań swobodnych (I) przewiduje się w postaci

$$\varphi = A \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (36)$$

gdzie  $A$  to amplituda drgań  $A = \varphi_0$  [rad],  $\omega_0$  [rad/s] to częstość drgań własnych układu – wielkość którą chcemy wyznaczyć,  $\alpha$  [rad] to kąt przesunięcia fazowego. Różniczkując równanie (36) otrzymamy prędkość kątową układu

$$\dot{\varphi} = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (37)$$

Wykorzystując równania (36) i (37) zapiszemy (34) i (35) w postaci

$$V = \frac{1}{2} k l_1^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha), \quad (38)$$



$$E = \frac{1}{6} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) A^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha). \quad (39)$$

Maksymalna wartość potencjału występuje gdy  $\sin^2(\cdot)=1$ , natomiast maksymalna wartość energii kinetycznej występuje gdy  $\cos^2(\cdot)=1$ . Zatem

$$V_{\max} = \frac{1}{2} k l_1^2 A^2, \quad (40)$$

$$E_{\max} = \frac{1}{6} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) A^2 \omega_0^2. \quad (41)$$

Porównując (40) i (41) na mocy równania (33) otrzymamy równanie

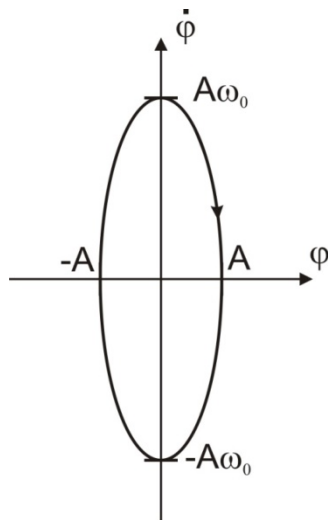
$$\frac{1}{2} k l_1^2 A^2 = \frac{1}{6} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) A^2 \omega_0^2, \quad (42)$$

z którego wyznaczymy częstotliwość drgań własnych jako

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3k l_1^2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}} \quad (43)$$

### Charakterystyka fazowa układu

Charakterystyką fazową nazywamy wykres, na którego osiach przedstawia się funkcję i jej pochodną. Na rys. 7. przedstawiono charakterystykę fazową układu wykonującego drgania swobodne. Wykres jest krzywą zamkniętą, gdyż w kolejnych okresach ruchu amplitudy przemieszczenia i prędkości nie zmieniają się. Wynika to z faktu, że energia mechaniczna układu jest stała (energia nie jest dostarczana do układu ani nie jest tracona). Mówimy, że układ jest na **cyklu granicznym**.



Rys. 7. Charakterystyka fazowa układu – układ na cyklu granicznym

### A.1.3. Drgania swobodne

Drgania swobodne opisuje równanie o postaci

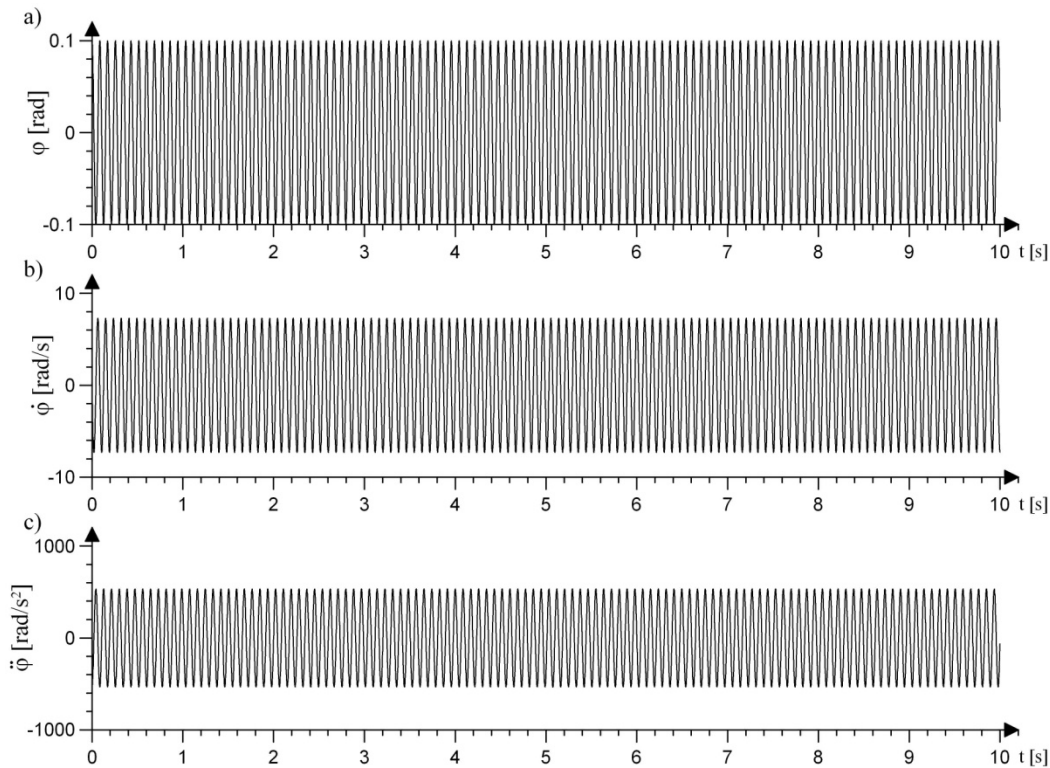
$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (1)$$

gdzie  $\varphi$  to wielkość opisująca przemieszczenie układu,  $\omega_0$  to częstość drgań własnych układu. W rozważanym przykładzie drgania swobodne opisuje równanie o postaci

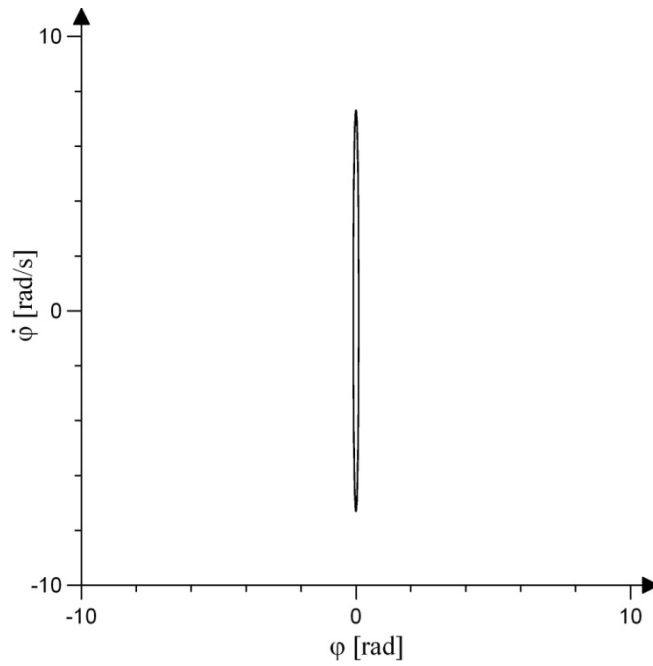
$$\ddot{\varphi} + \frac{3kl_1^2}{m_1l_1^2 + m_2l_2^2} \varphi = 0. \quad (44)$$

Przyjęto dane:  $\phi_0=0.1$  [rad],  $\dot{\phi}_0=0$  [rad/s],  $m_1=0.1$  [kg],  $m_2=0.05$  [kg],  $l_1=0.1$  [m],  $l_2=0.05$  [m],  $k=200$  [N/m],  $g=9.81$  [m/s<sup>2</sup>],  $t \in [0,10]$  [s]. Wówczas  $\lambda \approx 0.0006$  [m],  $\omega_0 \approx 73$  [rad/s].

Rozwiązanie analityczne równania (44) jest podane w postaci równań (36) i (37). Na rys. 8 zaprezentowano przebiegi kinematycznych parametrów ruchu układu drgającego dla przyjętych danych.



Rys. 8. Przebiegi kinematycznych parametrów ruchu układu wykonującego drgania swobodne: a) przemieszczenie kątowe, b) prędkość kątowa, c) przyspieszenie kątowe



Rys. 9. Charakterystyka fazowa układu

## A.1.4. Drgania swobodne tłumione (z tarciem wiskotycznym)

Drgania swobodne tłumione (z tarciem wiskotycznym) opisuje równanie o postaci

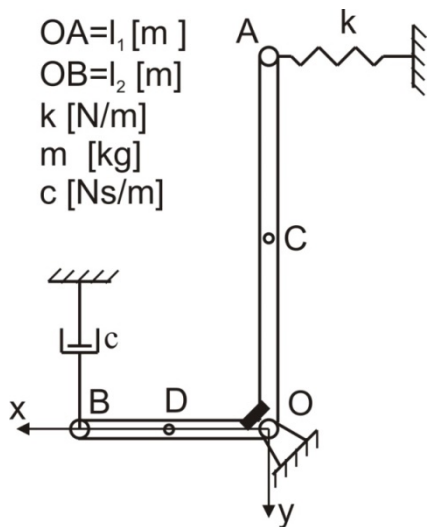
$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0. \quad (I)$$

gdzie  $\omega_0$  to częstość drgań własnych układu,  $h$  to współczynnik tłumienia jednostkowego.

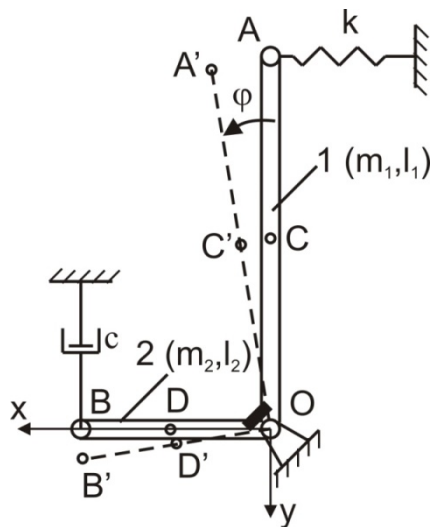
Rozważmy układ podany na rys. 1. Składa się on z bryły o złożonym kształcie i masie  $m$  oraz sprężyny o współczynniku sprężystości  $k$  i tłumika o współczynniku tłumienia  $c$  [ $\text{Ns/m}=\text{kg/s}$ ]. Układ w położeniu jak na rysunku jest w stanie równowagi statycznej. Myślowo podzielmy złożoną bryłę na pręty 1 ( $m_1, l_1$ ) i 2 ( $m_2, l_2$ ) jak na rys. 2. Sprężyna jest wstępnie odkształcona ciężarem pręta 2 a jej deformacja sprężysta wynosi  $\lambda$  (zagadnienie to było rozważane w poprzednim przykładzie). Załóżmy, że dodatkowo układ został wychylony z położenia równowagi o kąt  $\phi_0$  i puszczony swobodnie. W wyniku tego zachodzą drgania swobodne tłumione. Naszym celem będzie opisanie ruchu układu z zastosowaniem różniczkowych równań ruchu.

Prezentowany układ jest nieliniowy, natomiast formalizmy matematyczne, których będziemy używali zakładają liniowość układów. Zatem wszystkie nieliniowości układu będą linearyzowane.

Przypomnijmy również znany z mechaniki fakt, że **w stanie równowagi statycznej siła wstępnego napięcia sprężyny równoważy ciężar układu**. Dlatego w różniczkowych równaniach ruchu można pominąć działanie ciężarów  $\overline{Q}_1$  i  $\overline{Q}_2$  pod warunkiem że w zależności na siłę w sprężynie nie wprowadzimy deformacji statycznej sprężyny.



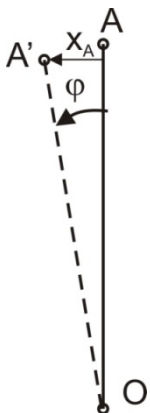
Rys. 1. Układ mechaniczny



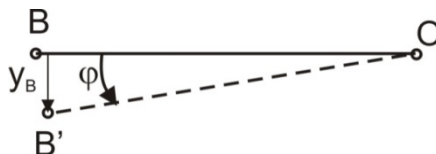
Rys. 2. Drgania układu mechanicznego

Kinematyka układu.

Istotne jest przemieszczenie poziome końca sprężyny (punkt A) (przemieszczenie pionowe punktu A pomija się) oraz prędkość ruchu końca tłumika (punkt B - zakłada się, że punkt B porusza się tylko wzdłuż osi pionowej). Interesujące parametry ruchu przedstawiono na rys. 3 i rys. 4.



Rys. 3. Kinematyka przemieszczeń



Rys. 4. Kinematyka przemieszczeń

Z rysunków wynika, że:

$$\sin \varphi = \frac{x_A}{l_1} \rightarrow x_A = l_1 \sin \varphi, \quad (1)$$

$$\sin \varphi = \frac{y_B}{l_2} \rightarrow y_B = l_2 \sin \varphi. \quad (2)$$

Przypomnijmy, że w układach technicznych drgania mechaniczne to szybkie ale małe ruchy wykonywane względem położenia równowagi statycznej. Dlatego można przyjąć założenie, że kąt  $\varphi$  jest małym kątem (w praktyce  $|\varphi| \leq 0.3$  [rad]). Wówczas można, bez popełnienia istotnego błędu, przyjąć że:

$$\sin \varphi \cong \varphi, \quad (3)$$

Wówczas:

$$x_A = l_1 \varphi, \quad (4)$$

$$y_B = l_2 \varphi, \quad (5)$$

$$\dot{y}_B = l_2 \dot{\varphi}. \quad (6)$$

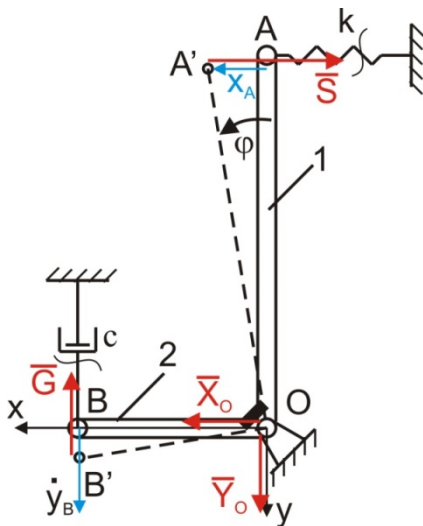
Różniczkowe równania ruchu układu



W celu ułożenia różniczkowych równań ruchu układu należy wprowadzić działające na niego siły, jak na rys. 5. Będą to reakcje podpory w punkcie O  $\bar{X}_O$  i  $\bar{Y}_O$ , siła reakcji sprężyny  $\bar{S}$  i tłumika  $\bar{G}$ . Zgodnie z wcześniejszym założeniem ciężary prętów  $\bar{Q}_1$  i  $\bar{Q}_2$  pomijamy a siłę w sprężynie wyrażamy w postaci (7). Zakładamy liniową charakterystykę sprężyny i tarcie wiskotyczne proporcjonalne do prędkości, zatem

$$S = kx_A, \quad (7)$$

$$G = c\dot{y}_B. \quad (8)$$



Rys. 5. Siły działające na układ

Rozważany układ wykonuje ruch obrotowy wokół punktu O zatem różniczkowe równanie ruchu to równanie ruchu obrotowego

$$(I_O^{(1)} + I_O^{(2)})\ddot{\phi} = -Sl_1 - Gl_2. \quad (9)$$

Masowe momenty bezwładności prętów wynoszą

$$I_O^{(1)} = \frac{1}{3}m_1l_1^2, \quad (10)$$

$$I_O^{(2)} = \frac{1}{3} m_2 l_2^2. \quad (11)$$

Wstawiając równania (7), (8), (10) i (11) do równania ruchu (9) otrzymamy

$$\frac{1}{3} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \ddot{\varphi} = -k x_A l_1 - c \dot{y}_B l_2. \quad (12)$$

Uwzględniając zależności kinematyczne (4) i (6), zapiszemy

$$\frac{1}{3} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \ddot{\varphi} + c l_2^2 \dot{\varphi} + k l_1^2 \varphi = 0, \quad (13)$$

i dalej

$$\ddot{\varphi} + \frac{c l_2^2}{\frac{1}{3} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} \dot{\varphi} + \frac{k l_1^2}{\frac{1}{3} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} \varphi = 0. \quad (14)$$

Oznaczając

$$\frac{3c l_2^2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} = 2h, \quad \frac{3k l_1^2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} = \omega_0^2, \quad (15)$$

otrzymamy ostatecznie równanie ruchu w postaci

$$\ddot{\varphi} + 2h \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (16)$$

gdzie  $h$  to współczynnik tłumienia jednostkowego,  $\omega_0$  to częstość drgań własnych. Wzór (16) to równanie drgań swobodnych tłumionych. W układach technicznych zwykle tłumienie jest małe i zachodzi warunek  $h^2 < \omega_0^2$ . Wówczas występuje przypadek tzw. tłumienia podkrytycznego. Rozwiązanie równania (16) można przedstawić w dwóch postaciach. Pierwsza postać to

$$\varphi = e^{-ht} [C_1 \cos(\omega_t t) + C_2 \sin(\omega_t t)], \quad (17)$$

gdzie

$$\omega_t = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}, \quad (18)$$

natomiast stałe  $C_1$  i  $C_2$  zależą od warunków początkowych w następujący sposób.

$$C_1 = \varphi_0, \quad C_2 = \frac{\dot{\varphi}_0 + h \varphi_0}{\omega_t}. \quad (19)$$

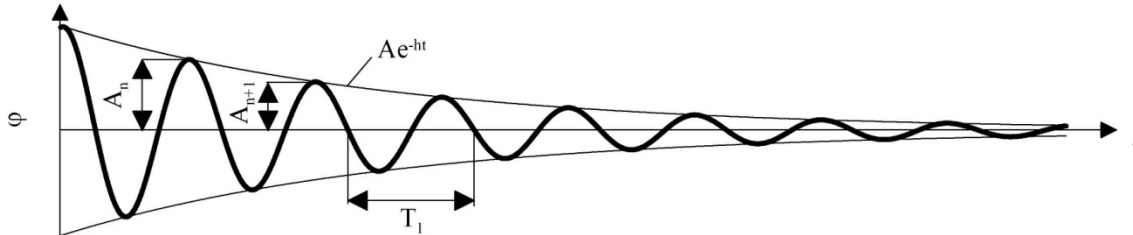
Równanie (17) można zapisać w innej postaci jako

$$\varphi = Ae^{-ht} \sin(\omega_t t + \gamma), \quad (20)$$

gdzie

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg}(\gamma) = \frac{C_1}{C_2}. \quad (21)$$

Przebieg rozwiązania przedstawiono na rys. 6.



Rys. 6. Przebieg drgań swobodnych tłumionych

Okres drgań tłumionych  $T_1$  będzie zawsze większy niż okres drgań swobodnych  $T_0$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} < T_t = \frac{2\pi}{\omega_t} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}}. \quad (22)$$

Stosunek dwóch kolejnych amplitud jest stały i wynosi

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \exp(hT_t). \quad (23)$$

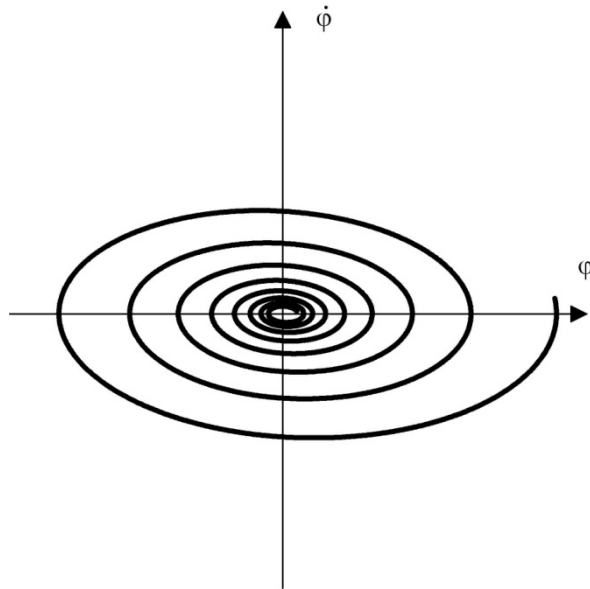
Za miarę tłumienia drgań przyjęto wielkość

$$D = \ln\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right) = hT_t. \quad (24)$$

nazywaną logarytmicznym dekrementem tłumienia. Jego wartość jest niezależna od czasu.

Charakterystyka fazowa układu

Charakterystyką fazową nazywamy wykres, na którego osiach przedstawia się funkcję i jej pochodną. Na rys. 7 przedstawiono charakterystykę fazową układu wykonującego drgania swobodne tłumione. W wyniku tłumienia charakterystyka zmierza do zera czyli energia mechaniczna układu zmniejsza się.

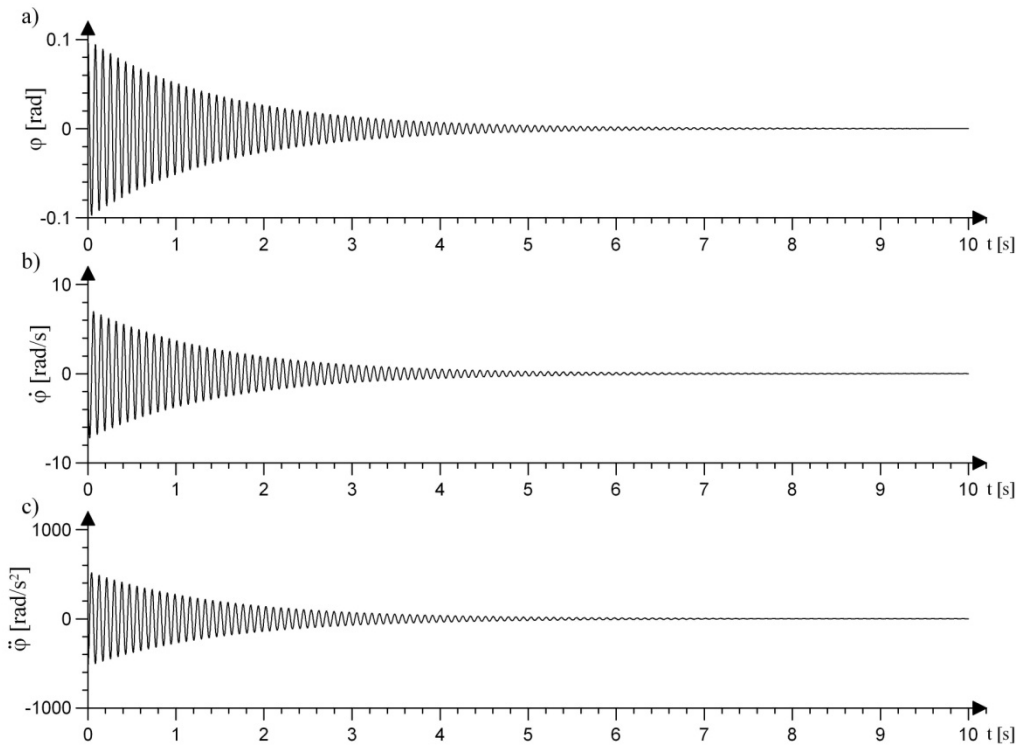


Rys. 7. Charakterystyka fazowa układu tłumionego

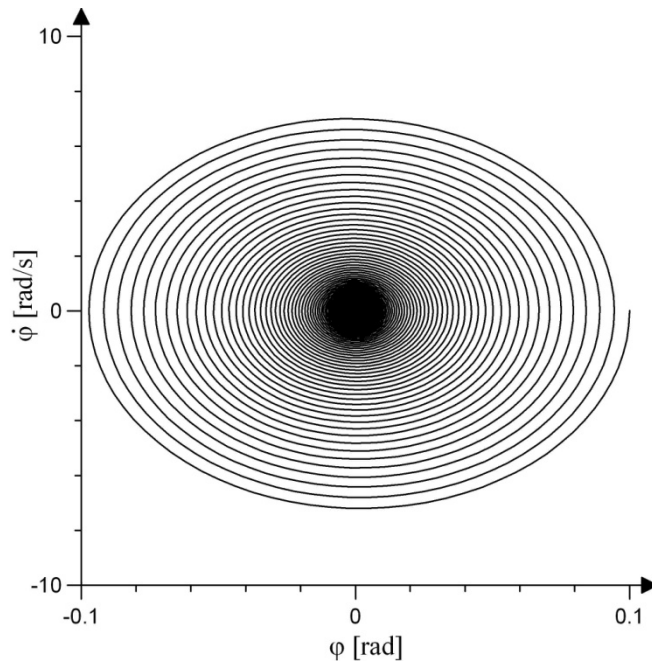
### Wyniki symulacji

W rozważanym przykładzie drgania swobodne opisuje równanie o postaci (14) Przyjęto dane:  $\phi_0=0.1$  [rad],  $\dot{\phi}_0=0$  [rad/s],  $m_1=0.1$  [kg],  $m_2=0.05$  [kg],  $l_1=0.1$  [m],  $l_2=0.05$  [m],  $k=200$  [N/m],  $c=0.1$  [Ns/m],  $g=9.81$  [m/s<sup>2</sup>],  $t \in [0,10]$  [s]. Wówczas  $\omega_0 \approx 73$  [rad/s],  $h=0.66$  [1/s].

Na rys. 8 zaprezentowano przebiegi kinematycznych parametrów ruchu układu drgającego opisanego równaniem (16) dla przyjętych danych.



Rys. 8. Przebiegi kinematycznych parametrów ruchu układu wykonującego drgania swobodne tłumione: a) przemieszczenie kątowe, b) prędkość kątowa, c) przyspieszenie kątowe



Rys. 9. Charakterystyka fazowa układu tłumionego

## A.1.5. Drgania wymuszone tłumione (z tarciem wiskotycznym)

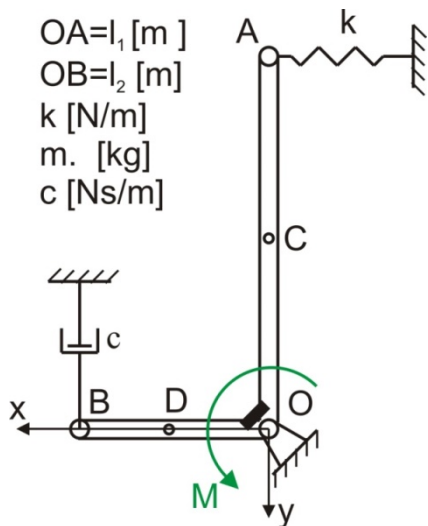
Drgania wymuszone tłumione (z tarciem wiskotycznym) opisuje równanie o postaci

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = q\cos(\theta t). \quad (I)$$

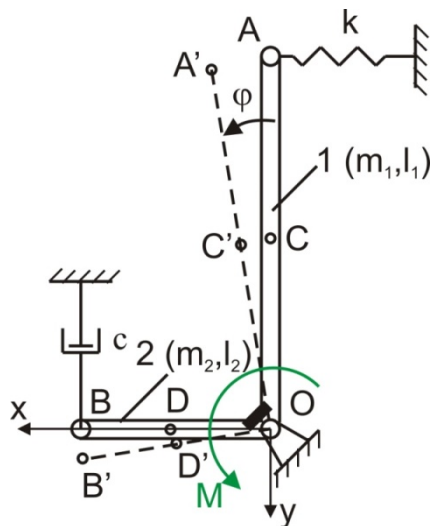
gdzie  $\omega_0$  to częstość drgań własnych układu,  $h$  to współczynnik tłumienia jednostkowego,  $q$  to wymuszenie jednostkowe

Rozważmy układ podany na rys. 1. Składa się on z bryły o złożonym kształcie i masie  $m$  oraz sprężyny o współczynniku sprężystości  $k$  i tłumika o współczynniku tłumienia  $c$ . Załóżmy, że w chwili początkowej układ jest w położeniu równowagi statycznej – jak na rysunku (zerowe warunki początkowe). Wokół tego położenia wykonuje on drgania wymuszone przez parę sił o momencie  $M(t)=M_0\cos(\theta t)$  [Nm], gdzie  $M_0$  to amplituda momentu wymuszającego,  $\theta$  to częstość wymuszenia. Myślowo podzielmy złożoną bryłę na pręty 1 ( $m_1, l_1$ ) i 2 ( $m_2, l_2$ ) jak na rys. 2. Sprężyna jest wstępnie odkształcona ciężarem pręta 2 a jej deformacja sprężysta wynosi  $\lambda$  (zagadnienie to było rozważane w pierwszym przykładzie). Naszym celem będzie opisanie ruchu układu z zastosowaniem różniczkowych równań ruchu.

Prezentowany układ jest nieliniowy, natomiast formalizmy matematyczne, których będziemy używali zakładają liniowość układów. Zatem wszystkie nieliniowości układu będą linearyzowane. Przypomnijmy również znany z mechaniki fakt, że **w stanie równowagi statycznej siła wstępnego napięcia sprężyny równoważy ciężar układu**. Dlatego w różniczkowych równaniach ruchu można pominąć działanie ciężarów  $\bar{Q}_1$  i  $\bar{Q}_2$  pod warunkiem, że w zależności na siłę w sprężynie nie wprowadzimy deformacji statycznej sprężyny.



Rys. 1. Układ mechaniczny



Rys. 2. Drgania układu mechanicznego

Kinematyka układu.

Kinematyka układu była przedmiotem rozważań w poprzednim przykładzie. W wyniku linearyzacji układu otrzymano zależności

$$x_A = l_1 \varphi, \quad (1)$$

$$y_B = l_2 \varphi, \quad (2)$$

$$\dot{y}_B = l_2 \dot{\varphi}. \quad (3)$$

Różniczkowe równania ruchu układu

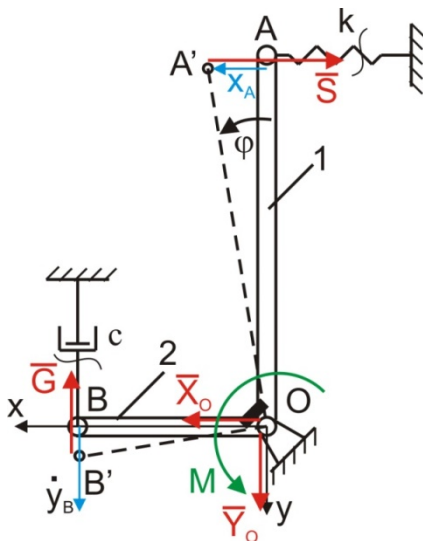
W celu ułożenia różniczkowych równań ruchu układu należy wprowadzić działające na niego siły i momenty, jak na rys. 3. Będą to reakcje podpory w punkcie O  $\bar{X}_O$  i  $\bar{Y}_O$ , siła reakcji sprężyny  $\bar{S}$  i tłumika  $\bar{G}$  oraz moment wymuszający  $M$ . Zgodnie z wcześniejszym założeniem ciężary prętów  $\bar{Q}_1$  i  $\bar{Q}_2$  pomijamy a siłę w sprężynie



wyrażamy w postaci (4). Zakładamy liniową charakterystykę sprężyny i tarcie wiskotyczne proporcjonalne do prędkości:

$$S = k\dot{x}_A, \quad (4)$$

$$G = c\dot{y}_B. \quad (5)$$



Rys. 3. Siły działające na układ

Rozważany układ wykonuje ruch obrotowy wokół punktu O zatem różniczkowe równanie ruchu to równanie ruchu obrotowego

$$(I_O^{(1)} + I_O^{(2)})\ddot{\phi} = -Sl_1 - Gl_2 + M. \quad (6)$$

Przypomnijmy, że masowe momenty bezwładności prętów wynoszą

$$I_O^{(1)} = \frac{1}{3}m_1l_1^2, \quad (7)$$

$$I_O^{(2)} = \frac{1}{3}m_2l_2^2. \quad (8)$$

Wstawiając równania (4), (5), (7) i (8) do równania ruchu (6) otrzymamy

$$\frac{1}{3}(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \ddot{\phi} = -k x_A l_1 - c \dot{y}_B l_2 + M_0 \cos(\theta t). \quad (9)$$

Uwzględniając zależności kinematyczne (1) i (3), zapiszemy

$$\frac{1}{3}(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \ddot{\phi} + c l_2^2 \dot{\phi} + k l_1^2 \phi = M_0 \cos(\theta t), \quad (10)$$

i dalej

$$\ddot{\phi} + \frac{c l_2^2}{\frac{1}{3}(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} \dot{\phi} + \frac{k l_1^2}{\frac{1}{3}(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} \phi = \frac{M_0}{\frac{1}{3}(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} \cos(\theta t). \quad (11)$$

Oznaczając

$$\frac{3c l_2^2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} = 2h, \quad \frac{3k l_1^2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} = \omega_0^2, \quad \frac{3M_0}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} = q, \quad (12)$$

otrzymamy ostatecznie równanie ruchu w postaci

$$\ddot{\phi} + 2h\dot{\phi} + \omega_0^2 \phi = q \cos(\theta t), \quad (13)$$

gdzie  $h$  to współczynnik tłumienia jednostkowego,  $\omega_0$  to częstość drgań własnych,  $q$  to wymuszenie jednostkowe. Wzór (16) to równanie drgań swobodnych tłumionych. W układach technicznych zwykle tłumienie jest małe i zachodzi warunek  $h < \omega_0$ . Wówczas występuje przypadek tzw. tłumienia podkrytycznego. Rozwiązanie równania (13) można przedstawić jako sumę dwóch wyrażeń:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2, \quad (14)$$

gdzie

$$\phi_1 = A e^{-ht} \sin(\omega_1 t + v), \quad (15)$$

oraz

$$\phi_2 = B \cos(\theta t + \psi). \quad (16)$$

Wyrażenie (15) przedstawia drgania swobodne tłumione powstałe w wyniku przyłożenia wymuszenia przy zerowych warunkach początkowych wyrażenie (16) przedstawia drgania ustalone wymuszone. W praktyce wyrażenie (15) jest często pomijane, ze względu na fakt, że zawiera element  $e^{-ht}$ , który powoduje że  $\phi_1 \rightarrow 0$  jeśli  $t \rightarrow \infty$ , czyli drgania swobodne tłumione z czasem zanikają. Natomiast bardzo istotny jest wyrażenie (16). Dlatego przyjmujemy, że

$$\varphi = \varphi_2 = B \cos(\theta t + \psi), \quad (17)$$

gdzie B to amplituda drgań,  $\psi$  to kąt przesunięcia fazowego zdefiniowane jako

$$B = \frac{q}{\sqrt{(\theta^2 - \omega_0^2)^2 + 4h^2\theta^2}}, \quad (18)$$

$$\operatorname{tg}(\psi) = \frac{2h\theta}{\theta^2 - \omega_0^2}. \quad (19)$$

Podzielmy licznik i mianownik wyrażenia (18) przez  $\omega_0^2$

$$B = \frac{\frac{q}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(\frac{\theta^2}{\omega_0^2} - \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\frac{h^2}{\omega_0^2} \frac{\theta^2}{\omega_0^2}}} = \frac{\delta}{\sqrt{(\alpha^2 - 1)^2 + \beta^2\alpha^2}}. \quad (20)$$

gdzie  $\delta = \frac{q}{\omega_0^2}$ ,  $\alpha = \frac{\theta}{\omega_0}$ ,  $\beta = \frac{2h}{\omega_0}$ .

Wprowadźmy tzw. współczynnik uwielokrotnienia amplitudy (współczynnik dynamiczny) zdefiniowany jako

$$\mu = \frac{B}{\delta} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha^2 - 1)^2 + \beta^2\alpha^2}}. \quad (21)$$

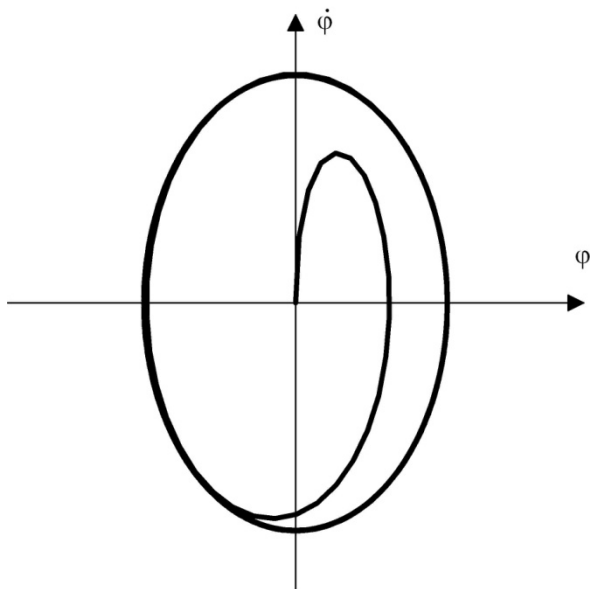
Współczynnik  $\mu$  informuje o tym ile razy amplituda drgań wymuszonych B jest większa od statycznego wychyle-  
nia układu  $\delta$  zachodzącego pod wpływem statycznego obciążenia momentem  $M_0$ , gdyż

$$\delta = \frac{q}{\omega_0^2} = \frac{\frac{3M_0}{m_1l_1^2 + m_2l_2^2}}{\frac{3kl_1^2}{m_1l_1^2 + m_2l_2^2}} = \frac{M_0}{kl_1^2}. \quad (22)$$

Współczynnik  $\mu$  musi spełniać ograniczenie  $\mu \leq \mu_{gr}$ , gdzie  $\mu_{gr}$  to wartość graniczna.

## Charakterystyka fazowa układu

Na rys. 4 przedstawiono charakterystykę fazową układu wykonującego drgania wymuszone tłumione w przypadku zerowych warunków początkowych i z uwzględnieniem wyrażenia (15). Charakterystyka zaczyna się w punkcie (0,0), następnie drgania ustalają się i charakterystyka stanowi krzywą zamkniętą.

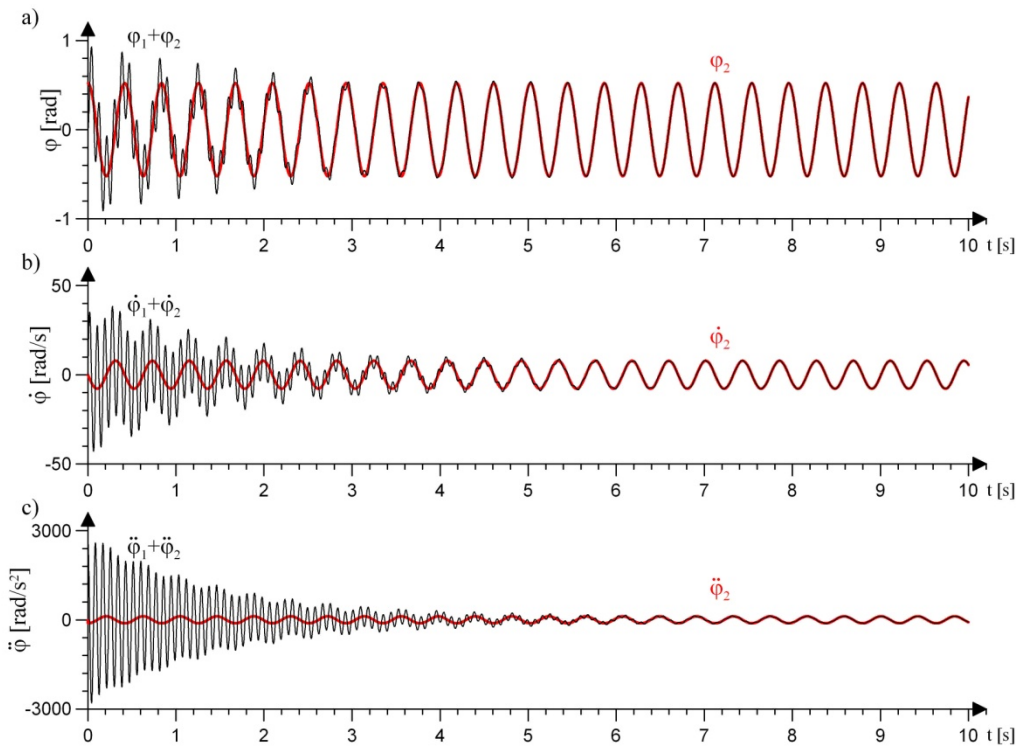


Rys. 4. Charakterystyka fazowa układu wykonującego drgania wymuszone tłumione

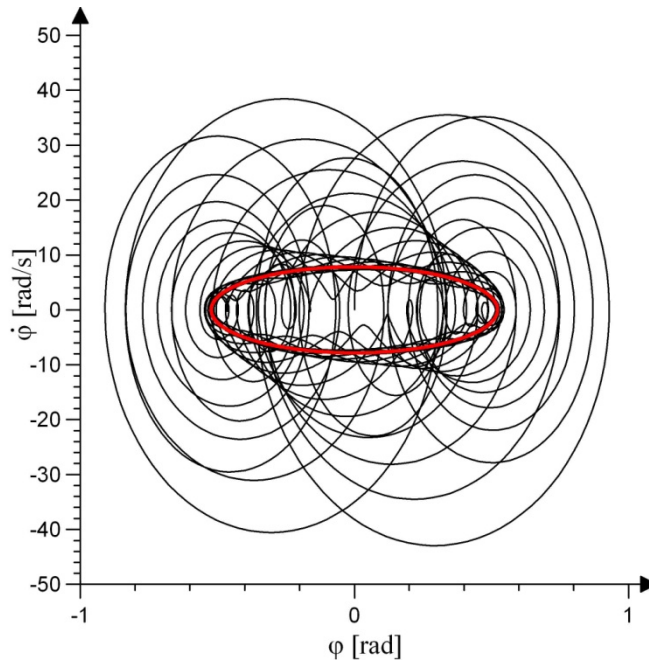
## Wyniki symulacji

W rozważanym przykładzie drgania wymuszone tłumione opisuje równanie o postaci (13) Przyjęto dane:  $\phi_0=0.0$  [rad],  $\dot{\phi}_0=0$  [rad/s],  $m_1=0.1$  [kg],  $m_2=0.05$  [kg],  $l_1=0.1$  [m],  $l_2=0.05$  [m],  $k=200$  [N/m],  $c=0.1$  [Ns/m],  $g=9.81$  [m/s<sup>2</sup>],  $M_0=1$  [Nm],  $\theta=15$  [rad/s],  $t_e[0,10]$  [s]. Wówczas  $\omega_0\approx 73$  [rad/s],  $h=0.66$  [1/s]  $q=2666.66$  [rad/s],  $B=0.522$  [rad],  $\psi=-0.0039$  [rad],  $\delta=0.5$  [rad],  $\alpha=0.2054$ ,  $\mu=1.044$ .

Na rys. 5 zaprezentowano przebiegi kinematycznych parametrów ruchu układu drgającego opisanego równaniem (13) dla przyjętych danych.



Rys. 5. Przebiegi kinematycznych parametrów ruchu układu wykonującego drgania wymuszone tłumione (kolorem czerwonym zaznaczono rozwiązania dla drgań wymuszonych ustalonych): a) przemieszczenie kątowe, b) prędkość kątowa, c) przyspieszenie kątowe



Rys. 6. Charakterystyka fazowa układu wykonującego drgania tłumione (kolorem czerwonym zaznaczono trajektorię fazową dla drgań wymuszonych ustalonych)

Przypomnijmy zależność opisującą współczynnik uwielokrotnienia amplitudy.

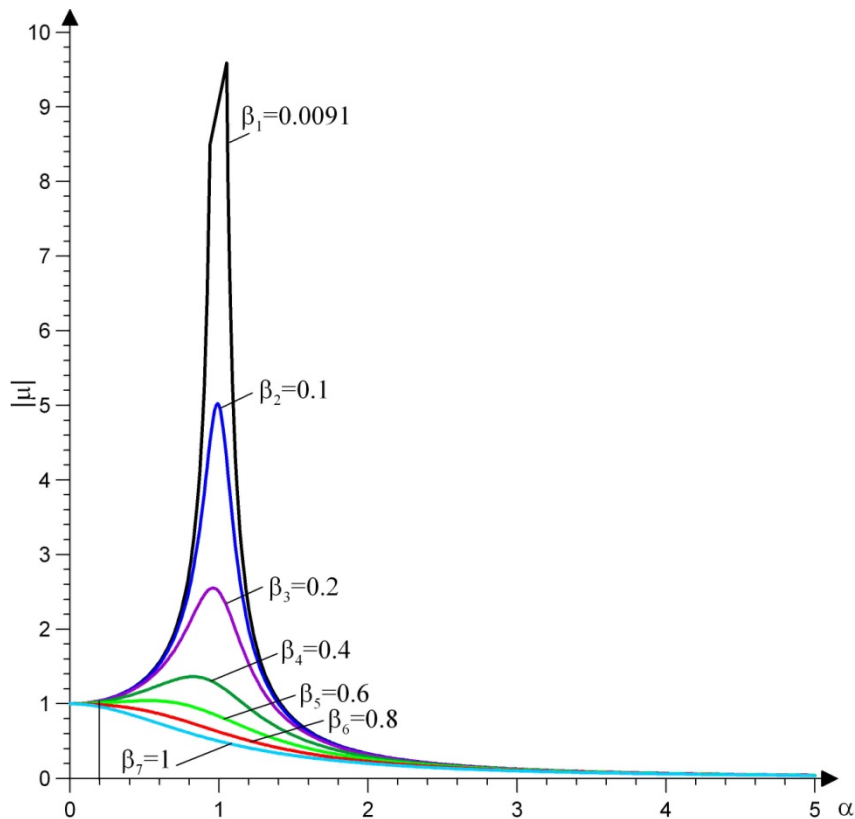
$$\mu = \frac{B}{\delta} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha^2 - 1)^2 + \beta^2 \alpha^2}}.$$

Interesującym jest jak współczynnik  $\mu$  będzie zmieniał się w funkcji częstotliwości wymuszenia. (zmiana częstotliwości wymuszenia wpływa na współczynnik  $\alpha = \frac{\theta}{\omega_0}$ ). Przyjmując  $\omega$  zmienną od 0 do  $\infty$  utworzymy tzw. charaktery-

stykę amplitudowo-częstotliwościową. Przy czym wyznacza się wartość bezwzględną  $|\mu|$ , gdyż znak nie ma tu znaczenia. Zauważmy, że zawsze

$$|\mu|(\alpha = 0) = 1, \quad |\mu|(\alpha = 1) = \frac{1}{\beta} = \frac{\omega_0}{2h}, \quad |\mu|(\alpha \rightarrow \infty) \rightarrow 0. \quad (23)$$

Na rys. 7 przedstawiono rodzinę charakterystyk dla różnych wartości współczynnika tłumienia jednostkowego  $h$ .

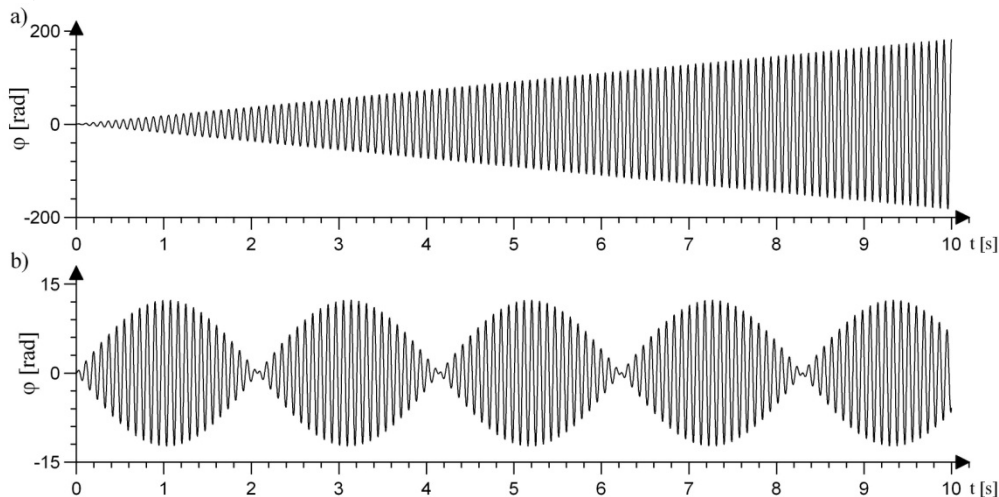


Rys. 6. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa

Jeśli przyjmie się brak tłumienia w układzie ( $c=0$ ), wówczas będą występować drgania wymuszone nietłumione. W szczególnych przypadkach zachodzą tu dwa interesujące zjawiska:

- rezonans, gdy  $\theta=\omega_0$ ,
- dudnienie, gdy  $\theta\approx\omega_0$ .

Obydwa zjawiska są niebezpieczne dla układu, gdyż występują wówczas duże amplitudy drgań. W przypadku dudnienia są one ograniczone (rys. 7b), natomiast w przypadku rezonansu wzrastają do nieskończoności (rys. 7a).



Rys. 7. Charakterystyczne przypadki drgań wymuszonych nietłumionych: a) rezonans, b) dudnienie  
4. Drgania układu o dwóch stopniach swobody



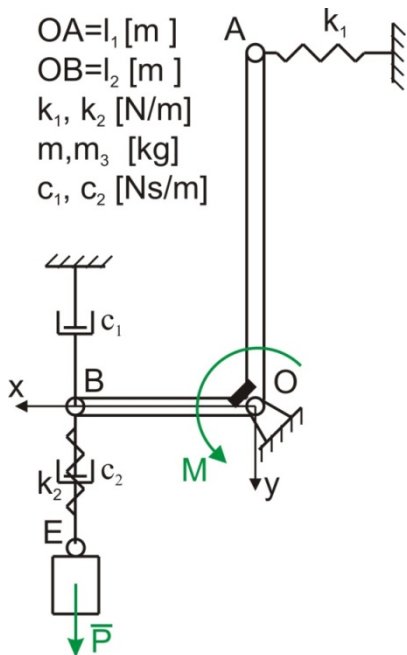
## A.2. Drgania układu o dwóch stopniach swobody

### A.2.1. Różniczkowe równania ruchu

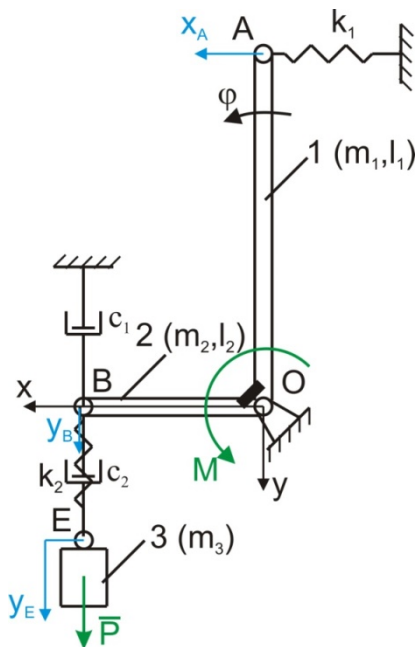
Rozważmy układ podany na rys. 1. Składa się on z członu 1-2 o złożonym kształcie i masie  $m$  oraz sprężyny o współczynniku sprężystości  $k_1$  i tłumika o współczynniku tłumienia  $c_1$ . Dodatkowo do członu doczepiono w punkcie B sprężynę o współczynniku sprężystości  $k_2$  i tłumik o współczynniku tłumienia  $c_2$ , na których zawieszono człon 3 o masie  $m_3$ . Załóżmy, że w chwili początkowej człony układu są w położeniach równowagi statycznej – jak na rysunku (zerowe warunki początkowe). Wokół tych położeni człon wykonują drgania wymuszone przez parę sił o momencie  $M(t)=M_0\cos(\theta t)$  [Nm] przyłożonym do członu 1-2, oraz siłę  $P(t)=P_0\cos(\theta t)$  przyłożoną do członu 3, gdzie  $M_0$  to amplituda momentu wymuszającego,  $P_0$  to amplituda siły wymuszającej,  $\omega$  to częstość wymuszenia. Myślowo podzielmy człon 1-2 na pręty 1 ( $m_1, l_1$ ) i 2 ( $m_2, l_2$ ) jak na rys. 2.

Naszym celem będzie wyznaczenie częstości własnych układu i opisanie ruchu układu z zastosowaniem różniczkowych równań ruchu. Prezentowany układ jest nieliniowy, natomiast formalizmy matematyczne, których będziemy używali zakładają liniowość układów. Zatem wszystkie nieliniowości układu będą linearyzowane. Przypomnijmy również znany z mechaniki fakt, że **w stanie równowagi statycznej siły wstępne napięcia sprężyn równoważą ciężar układu**. Dlatego w różniczkowych równaniach ruchu można pominąć działanie ciężarów  $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2$  i  $\bar{Q}_3$  pod warunkiem że w zależnościach na siły w sprężynie nie wprowadzimy deformacji statycznych sprężyn.

$OA=l_1$  [m]  
 $OB=l_2$  [m]  
 $k_1, k_2$  [N/m]  
 $m, m_3$  [kg]  
 $c_1, c_2$  [Ns/m]



Rys. 1. Układ mechaniczny



Rys. 2. Kinematyka układu

### Kinematyka układu

Kinematyka członu 1-2 była przedmiotem rozważań w poprzednich przykładach. W wyniku linearyzacji układu otrzymano zależności, które są również słuszne w rozważanym przypadku

$$x_A = l_1 \varphi, \quad (1)$$

$$y_B = l_2 \varphi, \quad (2)$$

$$\dot{y}_B = l_2 \dot{\varphi}. \quad (3)$$

Ponadto wprowadzono przemieszczenie  $y_E$  punktu E zakładając jedynie pionowe przemieszczenia tego punktu. Współrzędna  $y_E$  jest niezależna od przemieszczeń punktów członu 1-2, dlatego rozważany układ posiada dwa stopnie swobody.

## Różniczkowe równania ruchu układu

W celu ułożenia różniczkowych równań ruchu układu należy wprowadzić działające na niego siły i momenty, jak na rys. 3. Będą to reakcje podpory w punkcie O  $\bar{X}_O$  i  $\bar{Y}_O$ , siły reakcji sprężyn  $\bar{S}_1$ ,  $\bar{S}_2$ ,  $\bar{S}_2'$  i tłumików  $\bar{G}_1$ ,  $\bar{G}_2$ ,  $\bar{G}_2'$  oraz wymuszenia M i  $\bar{P}$ . Zgodnie z wcześniejszym założeniem ciężary prętów  $\bar{Q}_1$ ,  $\bar{Q}_2$  i  $\bar{Q}_3$  pomijamy a siły w sprężynach wyrażamy w postaci (4), (5) i (6). Założono, że sprężyna 2 jest rozciągnięta, tzn.  $y_E > y_B$ . (wówczas siły reakcji w sprężynie 2 będą zwrócone do wewnątrz). Zakładamy liniowe charakterystyki sprężyn, w związku z tym zapiszemy

$$S_1 = k_1 x_A, \quad (4)$$

$$S_2 = k_2 (y_E - y_B), \quad (5)$$

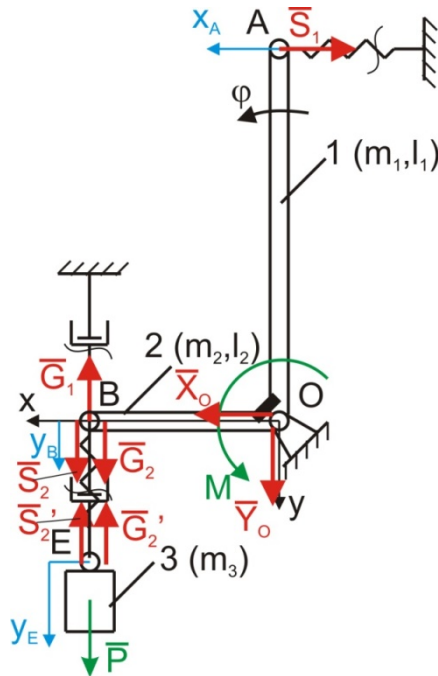
$$S_2' = k_2 (y_E - y_B). \quad (6)$$

Założono, że  $\dot{y}_E > \dot{y}_B$  (wówczas siły reakcji w tłumiku 2 będą zwrócone do wewnątrz). Zakładamy tarcie wiskotyczne proporcjonalne do prędkości, w związku z tym zapiszemy

$$G_1 = c_1 \dot{y}_B, \quad (7)$$

$$G_2 = c_2 (\dot{y}_E - \dot{y}_B), \quad (8)$$

$$G_2' = c_2 (\dot{y}_E - \dot{y}_B). \quad (9)$$



Rys. 3. Siły działające na układ

W rozważanym układzie człon 1-2 wykonuje ruch obrotowy wokół punktu O, natomiast człon 3 wykonuje ruch postępowy. Jako, że układ posiada dwa stopnie swobody, to jego ruch jest opisany przez układ dwóch równań różniczkowych

$$\begin{cases} (I_O^{(1)} + I_O^{(2)})\ddot{\varphi} = -S_1 l_1 - G_1 l_2 + S_2 l_2 + G_2 l_2 + M \\ m_3 \ddot{y}_E = -S_2' - G_2' + P \end{cases} \quad (10)$$

Przypomnijmy, że masowe momenty bezwładności prętów wynoszą

$$I_O^{(1)} = \frac{1}{3} m_1 l_1^2, \quad (11)$$

$$I_O^{(2)} = \frac{1}{3} m_2 l_2^2. \quad (12)$$

Wstawiając równania (4) – (9) i (11), (12) do równań ruchu (10) otrzymamy

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{3} m_1 l_1^2 + \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \right) \ddot{\phi} = -k_1 x_A l_1 - c_1 \dot{y}_B l_2 + k_2 (y_E - y_B) l_2 + c_2 (\dot{y}_E - \dot{y}_B) l_2 + M_0 \cos(\theta t) \\ m_3 \ddot{y}_E = -k_2 (y_E - y_B) - c_2 (\dot{y}_E - \dot{y}_B) + P_0 \cos(\theta t) \end{cases} \quad (13)$$

Układ posiada dwa stopnie swobody więc jego ruch będzie jednoznacznie opisany jeżeli znane będą dwie niezależne współrzędne, zwane współrzędnymi uogólnionymi. W układzie (13) jedno równanie opisuje ruch obrotowy a drugie postępowy. Ze względu na wygodę obliczeń korzystnie będzie przekształcić pierwsze z równań do takiej postaci, aby opisywało liniowy ruch np. punktu B. Wówczas obydwie równania będą opisywać ruch postępowy wybranych punktów układu. Zatem wykorzystując znane zależności kinematyczne równania ruchu zapisano jako

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{3} m_1 l_1^2 + \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \right) \frac{\ddot{y}_B}{l_2^2} = -k_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} y_B - c_1 \dot{y}_B + k_2 (y_E - y_B) + c_2 (\dot{y}_E - \dot{y}_B) + \frac{M_0}{l_2} \cos(\theta t) \\ m_3 \ddot{y}_E = -k_2 (y_E - y_B) - c_2 (\dot{y}_E - \dot{y}_B) + P_0 \cos(\theta t) \end{cases} \quad (14)$$

Wygodnie jest oznaczyć współrzędne uogólnione jako  $x_1 = y_B$  oraz  $x_2 = y_E$ . Wówczas będzie

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{3} m_1 l_1^2 + \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \right) \frac{\ddot{x}_1}{l_2^2} = -k_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} x_1 - c_1 \dot{x}_1 + k_2 (x_2 - x_1) + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \frac{M_0}{l_2} \cos(\theta t) \\ m_3 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1) - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + P_0 \cos(\theta t) \end{cases} \quad (15)$$

Przekształćmy ostatecznie równania ruchu do postaci

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{3} m_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + \frac{1}{3} m_2 \right) \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} x_1 - k_2 (x_2 - x_1) = \frac{M_0}{l_2} \cos(\theta t) \\ m_3 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) = P_0 \cos(\theta t) \end{cases} \quad (16)$$

Rozwiązanie analityczne podanego układu równań jest bardzo złożone. W dalszej części skupimy się na wyznaczeniu częstości własnych układu i analizie drgań wymuszonych w przypadku zerowego tłumienia. Natomiast rozwiązanie pełnego układu równań (16) zostanie przeprowadzone na drodze symulacji numerycznej.

## A.2.2. Wyznaczenie częstości własnych układu

W celu wyznaczenia częstości własnych układu należy rozważyć drgania swobodne nielumione. W związku z tym układ równań (16) uprości się do postaci

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{3} m_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + \frac{1}{3} m_2 \right) \ddot{x}_1 + \left( k_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + k_2 \right) x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m_3 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Ogólna postać drgań swobodnych to

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \psi), \quad x_2 = A_2 \sin(\omega t + \psi), \quad (18)$$

gdzie  $A_1$  i  $A_2$  to amplitudy drgań, poprzez  $\omega$  rozumiemy częstość własną układu,  $\psi$  to kąt przesunięcia fazowego. Po dwukrotnym zróżniczkowaniu zależności (18)

$$\ddot{x}_1 = -A_1 \omega^2 \sin(\omega t + \psi), \quad \ddot{x}_2 = -A_2 \omega^2 \sin(\omega t + \psi), \quad (19)$$

podstawimy (18) i (19) do układu (17) i otrzymamy

$$\begin{cases} -\left( \frac{1}{3} m_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + \frac{1}{3} m_2 \right) A_1 \omega^2 \sin(\omega t + \psi) + \left( k_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + k_2 \right) A_1 \sin(\omega t + \psi) - k_2 A_2 \sin(\omega t + \psi) = 0 \\ -m_3 A_2 \omega^2 \sin(\omega t + \psi) + k_2 A_2 \sin(\omega t + \psi) - k_2 A_1 \sin(\omega t + \psi) = 0 \end{cases}, \quad (20)$$

i dalej

$$\begin{cases} -\left( \frac{1}{3} m_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + \frac{1}{3} m_2 \right) A_1 \omega^2 + \left( k_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + k_2 \right) A_1 - k_2 A_2 = 0 \\ -m_3 A_2 \omega^2 + k_2 A_2 - k_2 A_1 = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Grupując wyrazy przy amplitudach otrzymamy

$$\begin{cases} \left[ k_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + k_2 - \left( \frac{1}{3} m_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + \frac{1}{3} m_2 \right) \omega^2 \right] A_1 - k_2 A_2 = 0 \\ -k_2 A_1 + (k_2 - m_3 \omega^2) A_2 = 0 \end{cases} \quad (22)$$

Zapiszmy układ równań (22) w formie wektorowo-macierzowej

$$\begin{bmatrix} k_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + k_2 - \left( \frac{1}{3} m_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + \frac{1}{3} m_2 \right) \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_3 \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Przyrównując do zera wyznacznik charakterystyczny równania (23) otrzymuje się tzw. równanie częstości drgań własnych

$$\left[ k_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + k_2 - \left( \frac{1}{3} m_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + \frac{1}{3} m_2 \right) \omega^2 \right] (k_2 - m_3 \omega^2) - k_2^2 = 0, \quad (24)$$

które po uporządkowaniu będzie w postaci

$$\omega^4 - \left[ \frac{3(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} + \frac{k_2}{m_3} \right] \omega^2 + \frac{3k_1 k_2 l_1^2}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) m_3} = 0. \quad (25)$$

Wykonując podstawienie

$$\omega^2 = z, \quad (26)$$

równanie (25) sprowadzimy do równania kwadratowego

$$z^2 - \left[ \frac{3(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} + \frac{k_2}{m_3} \right] z + \frac{3k_1 k_2 l_1^2}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) m_3} = 0, \quad (27)$$

którego wyróżnik równy jest

$$\Delta = \left[ \frac{3(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} + \frac{k_2}{m_3} \right]^2 - 4 \frac{3k_1 k_2 l_1^2}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) m_3}. \quad (28)$$

Wobec tego istnieją rozwiązania

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{3(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} + \frac{k_2}{m_3} \right] \mp \sqrt{\frac{1}{4} \left[ \frac{3(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} + \frac{k_2}{m_3} \right]^2 - \frac{3k_1 k_2 l_1^2}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) m_3}}. \quad (29)$$

Wracając do zmiennej  $\omega$  zapiszemy

$$\omega = \pm \sqrt{z_{1,2}}. \quad (30)$$

Jako, że ujemne rozwiązania nie mają fizycznej interpretacji, uwzględnia się tylko rozwiązania dodatnie, czyli

$$\omega_{1,2} = \sqrt{z_{1,2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \frac{3(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} + \frac{k_2}{m_3} \right] \mp \sqrt{\frac{1}{4} \left[ \frac{3(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)} + \frac{k_2}{m_3} \right]^2 - \frac{3k_1 k_2 l_1^2}{(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) m_3}}}. \quad (31)$$

Ostatecznie okazuje się, że istnieją dwie częstości własne układu  $\omega_1$  i  $\omega_2$ . Jako, że w ogólnej postaci drgań swobodnych (18) zakładaliśmy jedną częstość własną, to postaci te trzeba skorygować i będą one miały postać

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{11} + x_{12} = A_{11} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \psi_2), \\ x_2 &= x_{21} + x_{22} = A_{21} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + A_{22} \sin(\omega_2 t + \psi_2), \end{aligned} \quad (32)$$

gdzie  $A_{ij}$  to amplituda  $i$ -tego członu z  $j$ -tą częstością własną. Rozwiązania  $x_{11}$  i  $x_{21}$  to pierwsze drgania główne (własne) – z niższą częstością własną  $\omega_1$ , rozwiązania  $x_{12}$  i  $x_{22}$  to drugie drgania główne (własne) – z wyższą częstością własną  $\omega_2$ . Amplitudy drgań głównych są zależne od siebie a ich stosunki można wyznaczyć z równań (22). Jako, że istnieją dwie częstości własne, to w równaniu (22) przy częstościach własnych należy dopisać jej numer, i przy amplitudach należy dopisać numer częstości własnej, której odpowiadają amplitudy, czyli

$$\begin{cases} \left[ \left[ k_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + k_2 - \left( \frac{1}{3} m_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + \frac{1}{3} m_2 \right) \omega_1^2 \right] A_{11} - k_2 A_{21} = 0 \right. \\ \left. -k_2 A_{11} + (k_2 - m_3 \omega_1^2) A_{21} = 0 \right. \\ \left[ \left[ k_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + k_2 - \left( \frac{1}{3} m_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + \frac{1}{3} m_2 \right) \omega_2^2 \right] A_{12} - k_2 A_{22} = 0 \right. \\ \left. -k_2 A_{12} + (k_2 - m_3 \omega_2^2) A_{22} = 0. \right. \end{cases} \quad (33)$$

Stąd można wyznaczyć stosunki amplitud  $\mu_j$

$$\begin{cases} \frac{A_{21}}{A_{11}} = \frac{k_2}{(k_2 - m_3 \omega_1^2)} = \frac{\left[ k_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + k_2 - \left( \frac{1}{3} m_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + \frac{1}{3} m_2 \right) \omega_1^2 \right]}{k_2} = \mu_1, \\ \frac{A_{22}}{A_{12}} = \frac{k_2}{(k_2 - m_3 \omega_2^2)} = \frac{\left[ k_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + k_2 - \left( \frac{1}{3} m_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + \frac{1}{3} m_2 \right) \omega_2^2 \right]}{k_2} = \mu_2, \end{cases} \quad (34)$$



nazywane postaciami drgań własnych (głównych).

Aby opisać ruch układu trzeba wyznaczyć amplitudy  $A_{ij}$  oraz kąty przesunięcia fazowego  $\psi_j$ . Można je wyznaczyć z warunków początkowych. W tym celu zapiszmy równania (32) w postaci

$$\begin{aligned}x_1 &= x_{11} + x_{12} = A_{11}\sin(\omega_1 t + \psi_1) + A_{12}\sin(\omega_2 t + \psi_2), \\x_2 &= x_{21} + x_{22} = A_{11}\mu_1\sin(\omega_1 t + \psi_1) + A_{12}\mu_2\sin(\omega_2 t + \psi_2),\end{aligned}\tag{35}$$

i zróżniczkujemy je

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dot{x}_{11} + \dot{x}_{12} = A_{11}\omega_1\cos(\omega_1 t + \psi_1) + A_{12}\omega_2\cos(\omega_2 t + \psi_2), \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_{21} + \dot{x}_{22} = A_{11}\mu_1\omega_1\cos(\omega_1 t + \psi_1) + A_{12}\mu_2\omega_2\cos(\omega_2 t + \psi_2).\end{aligned}\tag{36}$$

W ten sposób otrzymano układ czterech równań, do których można podstawić warunki początkowe dla czterech zmiennych  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$ ,  $\dot{x}_1(0)$ ,  $\dot{x}_2(0)$ , co prowadzi do układu algebraicznych równań liniowych:

$$\begin{cases}x_1(0) = A_{11}\sin(\psi_1) + A_{12}\sin(\psi_2), \\x_2(0) = A_{11}\mu_1\sin(\psi_1) + A_{12}\mu_2\sin(\psi_2), \\ \dot{x}_1(0) = A_{11}\omega_1\cos(\psi_1) + A_{12}\omega_2\cos(\psi_2), \\ \dot{x}_2(0) = A_{11}\mu_1\omega_1\cos(\psi_1) + A_{12}\mu_2\omega_2\cos(\psi_2).\end{cases}\tag{37}$$

Oznaczmy

$$\begin{aligned}C_1 &= A_{11}\sin(\psi_1), C_2 = A_{12}\sin(\psi_2), \\D_1 &= A_{11}\cos(\psi_1), D_2 = A_{12}\cos(\psi_2).\end{aligned}\tag{38}$$

Wówczas równania (37) zapiszemy w postaci

$$\begin{cases}x_1(0) = C_1 + C_2, \\x_2(0) = C_1\mu_1 + C_2\mu_2, \\ \dot{x}_1(0) = D_1\omega_1 + D_2\omega_2, \\ \dot{x}_2(0) = D_1\mu_1\omega_1 + D_2\mu_2\omega_2.\end{cases}\tag{39}$$

Rozwiązując układ równań (39) otrzymano

$$C_1 = \frac{x_1(0)\mu_2 - x_2(0)}{\mu_2 - \mu_1}, C_2 = \frac{x_2(0) - x_1(0)\mu_1}{\mu_2 - \mu_1},$$

$$D_1 = \frac{\dot{x}_1(0)\mu_2 - \dot{x}_2(0)}{(\mu_2 - \mu_1)\omega_1}, D_2 = \frac{\dot{x}_2(0) - \dot{x}_1(0)\mu_1}{(\mu_2 - \mu_1)\omega_2}.$$
(40)

Wróćmy teraz do równań (38). Podnieśmy je do kwadratu

$$C_1^2 = A_{11}^2 \sin^2(\psi_1), C_2^2 = A_{12}^2 \sin^2(\psi_2),$$

$$D_1^2 = A_{11}^2 \cos^2(\psi_1), D_2^2 = A_{12}^2 \cos^2(\psi_2),$$
(41)

i zsumujmy w następujący sposób

$$C_1^2 + D_1^2 = A_{11}^2 \sin^2(\psi_1) + A_{11}^2 \cos^2(\psi_1),$$

$$C_2^2 + D_2^2 = A_{12}^2 \sin^2(\psi_2) + A_{12}^2 \cos^2(\psi_2),$$
(42)

co po wykorzystaniu tzw. „jedynki trygonometrycznej” prowadzi do wyniku

$$A_{11} = \sqrt{C_1^2 + D_1^2},$$

$$A_{12} = \sqrt{C_2^2 + D_2^2}.$$
(43)

Wróćmy jeszcze raz do równań (38). Teraz podzielmy równania przez siebie w następująco

$$\frac{C_1}{D_1} = \frac{A_{11} \sin(\psi_1)}{A_{11} \cos(\psi_1)} = \operatorname{tg}(\psi_1),$$

$$\frac{C_2}{D_2} = \frac{A_{12} \sin(\psi_2)}{A_{12} \cos(\psi_2)} = \operatorname{tg}(\psi_2).$$
(44)

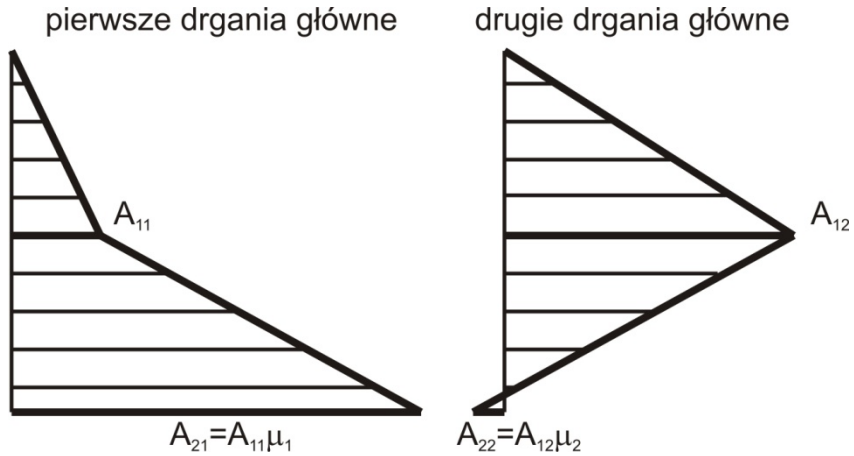
W wyniku tego zostały określone tangensy kątów przesunięcia fazowego. Ostatecznie drgania swobodne będą opisane (35), gdzie stałe  $A_{ij}$  oraz  $\psi_j$  są określone wzorami (43) i (44).

Wyniki symulacji drgań swobodnych nietłumionych

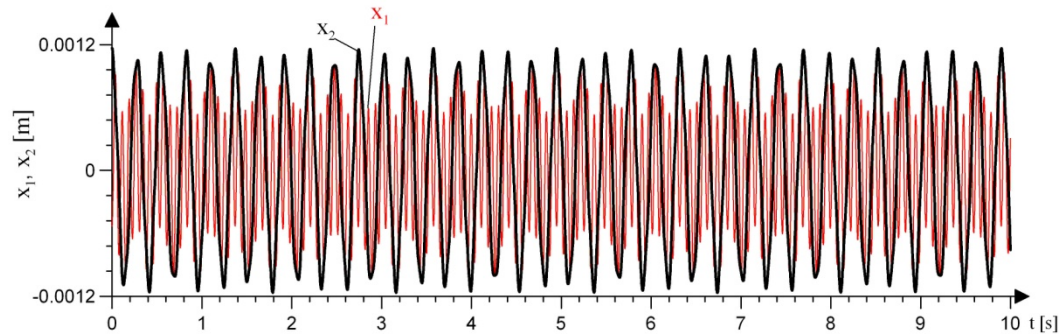
W rozważanym przykładzie drgania przyjęto dane:  $x_1(0)=0.001$  [m],  $x_2(0)=0.001$  [m],  $\dot{x}_1(0) = 0$  [m/s],  $\dot{x}_2(0) = 0$  [m/s],  $m_1=0.1$  [kg],  $m_2=0.05$  [kg],  $m_3=0.3$  [kg],  $l_1=0.1$  [m],  $l_2=0.05$  [m],  $k_1=200$  [N/m],  $k_2=200$  [N/m],

$c_1=0$  [Ns/m],  $c_2=0$  [Ns/m],  $g=9.81$  [m/s<sup>2</sup>],  $M_0=0$  [Nm],  $P_0=0$  [N],  $\theta=15$  [rad/s],  $t_e[0,10]$  [s]. Wówczas  $\omega_1\approx 22.85$  [rad/s],  $\omega_2\approx 82.53$  [rad/s],  $\mu_1= 4.6085$ ,  $\mu_2= -0.1085$ ,  $A_{11}=0.000235$  [m],  $A_{12}=0.000765$  [m].

Na rys. 4 zaprezentowano drgania główne układu. Na rys. 5 zaprezentowano przebiegi drgań swobodnych opisanych równaniami (35) dla przyjętych danych.



Rys. 4. Amplitudy drgań głównych



Rys. 4. Drgania swobodne nietyumione

### A.2.3. Drgania wymuszone nietłumione

Rozważmy teraz drgania wymuszone z zerowym tłumieniem. W związku z tym układ równań (16) uproszczy się do postaci

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{3} m_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + \frac{1}{3} m_2 \right) \ddot{x}_1 + \left( k_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + k_2 \right) x_1 - k_2 x_2 = \frac{M_0}{l_2} \cos(\theta t) \\ m_3 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = P_0 \cos(\theta t) \end{cases} \quad (45)$$

Rozwiązanie układu równań (45) składa się z rozwiązania równania jednorodnego (17) i rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego (45). Rozwiązanie równania jednorodnego (17) można pominąć, bo drgania swobodne szybko zanikają w skutek działania sił tarcia. Istotne jest rozwiązanie szczególnego równania (45) opisujące proces stacjonarnych drgań wymuszonych nietłumionych, a ma ono postać

$$x_1 = A_1 \cos(\theta t), \quad x_2 = A_2 \cos(\theta t), \quad (46)$$

gdzie  $A_1$  i  $A_2$  to amplitudy drgań, a poprzez  $\omega$  rozumiemy w tej chwili częstość drgań wymuszonych, która jest równa częstości wymuszenia. Po dwukrotnym zróżniczkowaniu zależności (46)

$$\ddot{x}_1 = -A_1 \theta^2 \cos(\theta t), \quad \ddot{x}_2 = -A_2 \theta^2 \cos(\theta t), \quad (47)$$

podstawimy (46) i (47) do układu (45) i otrzymamy

$$\begin{cases} -\left( \frac{1}{3} m_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + \frac{1}{3} m_2 \right) A_1 \theta^2 \cos(\theta t) + \left( k_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + k_2 \right) A_1 \cos(\theta t) - k_2 A_2 \cos(\theta t) = \frac{M_0}{l_2} \cos(\theta t) \\ -m_3 A_2 \theta^2 \cos(\theta t) + k_2 A_2 \cos(\theta t) - k_2 A_1 \cos(\theta t) = P_0 \cos(\theta t) \end{cases}, \quad (48)$$

i dalej

$$\begin{cases} -\left( \frac{1}{3} m_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + \frac{1}{3} m_2 \right) A_1 \theta^2 + \left( k_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + k_2 \right) A_1 - k_2 A_2 = \frac{M_0}{l_2} \\ -m_3 A_2 \theta^2 + k_2 A_2 - k_2 A_1 = P_0 \end{cases} \quad (49)$$

Grupując wyrazy przy amplitudach otrzymamy

$$\begin{cases} \left[ k_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + k_2 - \left( \frac{1}{3} m_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + \frac{1}{3} m_2 \right) \theta^2 \right] A_1 - k_2 A_2 = \frac{M_0}{l_2} \\ (k_2 - m_3 \theta^2) A_2 - k_2 A_1 = P_0 \end{cases} \quad (50)$$

Zapiszmy układ równań (50) w formie wektorowo-macierzowej

$$\begin{bmatrix} k_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + k_2 - \left( \frac{1}{3} m_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + \frac{1}{3} m_2 \right) \theta^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_3 \theta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{M_0}{l_2} \\ P_0 \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Rozwiązanie równania (51) ze względu na amplitudy jest następujące

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{H} \begin{bmatrix} k_2 - m_3 \theta^2 & k_2 \\ k_2 & k_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + k_2 - \left( \frac{1}{3} m_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + \frac{1}{3} m_2 \right) \theta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{M_0}{l_2} \\ P_0 \end{bmatrix}, \quad (52)$$

gdzie

$$H = \left[ k_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + k_2 - \left( \frac{1}{3} m_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + \frac{1}{3} m_2 \right) \theta^2 \right] (k_2 - m_3 \theta^2) - k_2^2, \quad (53)$$

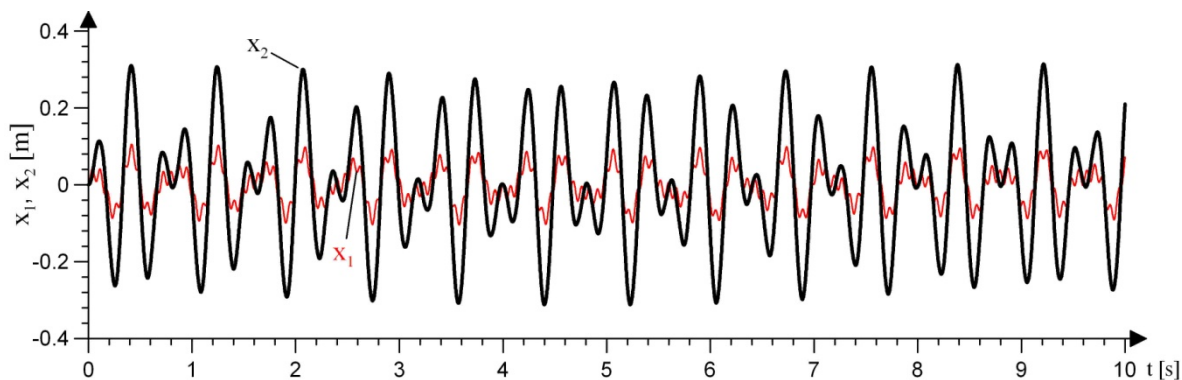
to wyznacznik macierzy z równania (51). Ostatecznie amplitudy można wyrazić w formie

$$\begin{cases} A_1 = \frac{\frac{M_0}{l_2} (k_2 - m_3 \theta^2) + P_0 k_2}{\left[ k_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + k_2 - \left( \frac{1}{3} m_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + \frac{1}{3} m_2 \right) \theta^2 \right] (k_2 - m_3 \theta^2) - k_2^2}, \\ A_2 = \frac{\frac{M_0}{l_2} k_2 + P_0 \left[ k_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + k_2 - \left( \frac{1}{3} m_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + \frac{1}{3} m_2 \right) \theta^2 \right]}{\left[ k_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + k_2 - \left( \frac{1}{3} m_1 \frac{l_1^2}{l_2^2} + \frac{1}{3} m_2 \right) \theta^2 \right] (k_2 - m_3 \theta^2) - k_2^2}. \end{cases} \quad (54)$$

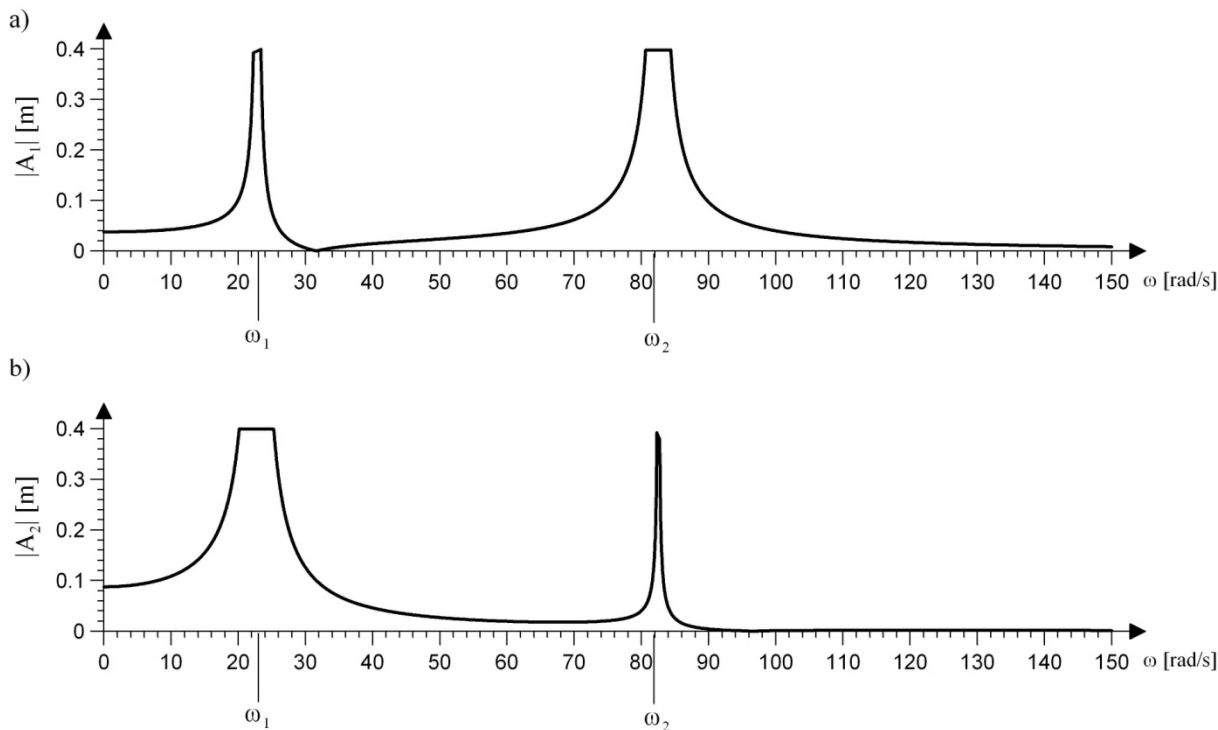
## Wyniki symulacji drgań wymuszonych nietyumionych

W rozważanym przykładzie drgania przyjęto dane:  $x_1(0)=0$  [m],  $x_2(0)=0$  [m],  $\dot{x}_1(0) = 0$  [m/s],  $\dot{x}_2(0) = 0$  [m/s],  $m_1=0.1$  [kg],  $m_2=0.05$  [kg],  $m_3=0.3$  [kg],  $l_1=0.1$  [m],  $l_2=0.05$  [m],  $k_1=200$  [N/m],  $k_2=200$  [N/m],  $c_1=0$  [Ns/m],  $c_2=0$  [Ns/m],  $g=9.81$  [m/s<sup>2</sup>],  $M_0=1$  [Nm],  $P_0=1$  [N],  $\theta=15$  [rad/s],  $t \in [0,10]$  [s]. Wówczas  $A_1=0.0528$  [m],  $A_2=0.1552$  [m].

Na rys. 6 zaprezentowano przebiegi drgań wymuszonych nietyumionych dla przyjętych danych. Na rys. 7 zaprezentowano charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe. Charakterystyki takie tworzy się przyjmując jako wielkość zmienną częstość drgań wymuszonych  $\omega$ .



Rys. 6. Drgania wymuszone nietyumione



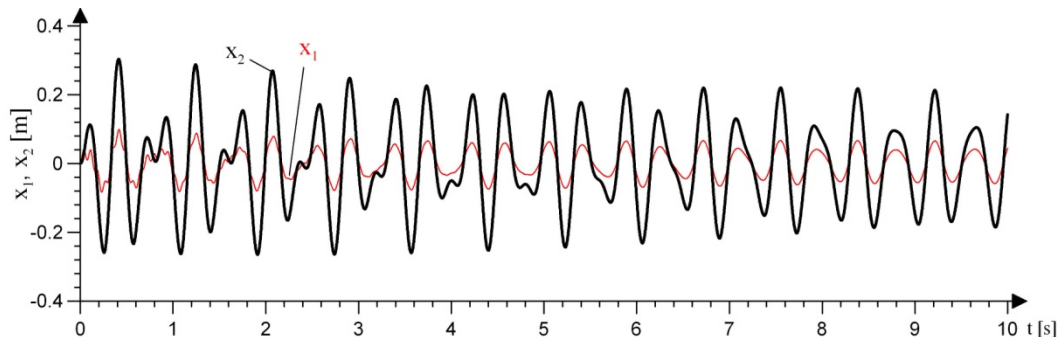
Rys. 7. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe

Dla  $\theta=0$  [rad/s] wartości amplitud są niezerowe i wynoszą  $A_1=0.0375$  [m],  $A_2=0.0875$  [m]. Gdy częstość wymuszenia pokrywa się z którąkolwiek z częstości własnych, występuje zjawisko rezonansu, czyli wzrost amplitud do nieskończoności. Dla częstości wymuszenia  $\theta=31.62$  [rad/s] amplituda  $A_1=0$  [m], tzn. zachodzi zjawisko antyrezonansu.

## Wyniki symulacji drgań wymuszonych tłumionych

W rozważanym przykładzie drgania przyjęto dane:  $x_1(0)=0$  [m],  $x_2(0)=0$  [m],  $\dot{x}_1(0)=0$  [m/s],  $\dot{x}_2(0)=0$  [m/s],  $m_1=0.1$  [kg],  $m_2=0.05$  [kg],  $m_3=0.3$  [kg],  $l_1=0.1$  [m],  $l_2=0.05$  [m],  $k_1=200$  [N/m],  $k_2=200$  [N/m],  $c_1=0.1$  [Ns/m],  $c_2=0.1$  [Ns/m],  $g=9.81$  [m/s<sup>2</sup>],  $M_0=1$  [Nm],  $P_0=1$  [N],  $\theta=15$  [rad/s],  $t \in [0,10]$  [s].

Na rys. 8 zaprezentowano przebiegi drgań wymuszonych tłumionych dla przyjętych danych.



Rys. 8. Drgania wymuszone tłumione

Rozwiązanie układu równań ruchu układu z uwzględnieniem tłumienia składa się z dwóch składników. Pierwszy z nich odpowiada drganiom swobodnym powstałym w skutek przyłożenia obciążenia przy zerowych warunkach początkowych. Drgania te zstają z czasem wytłumione, i układ wykonuje tylko drgania wymuszone ustalone.



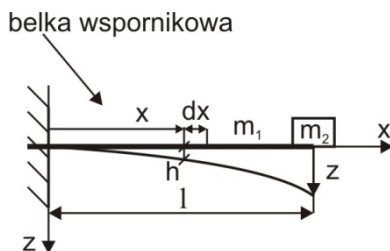
## A.3. Drgania giętkie belki wspornikowej

Zajmiemy się zagadnieniem drgań belki wspornikowej, czyli belki której jeden koniec jest utwierdzony, drugi zaś swobodny. Ponadto na swobodnym końcu belki znajduje się masa. Taka belka może być interpretowana jako sprężyna o ciągłym rozkładzie masy i z tłumieniem wewnętrznym. Jest to układ który nazywamy ciągłym, a opis takich układów jest stosunkowo skomplikowany. Dlatego można przyjąć uproszczony model, który będzie modelem dyskretnym. Dla takiego modelu zajmiemy się następującymi zagadnieniami:

1. Wyznaczenie częstości własnej układu metodą energetyczną.
2. Opis drgań swobodnych tłumionych.
3. Badania doświadczalne i wyznaczenie współczynnika tłumienia i częstości drgań własnych układu.

### A.3.1. Wyznaczenie częstości własnej metodą energetyczną

Rozważmy układ mechaniczny w postaci belki jednorodnej o długości  $l$  i masie  $m_1$ , na końcu której znajduje się masa  $m_2 \gg m_1$ . Załóżmy, że w chwili początkowej belka była wychylona z położenia równowagi statycznej i została swobodnie puszczona.



Rys. 1. Układ rzeczywisty

W przypadku, gdy  $m_2 \gg m_1$ , masę układu ciągłego, czyli belki, można pominąć lub uwzględnić tylko jej część. Ta część masy  $m_1$ , która powinna być uwzględniona, wyliczana jest z warunku, aby energia kinetyczna układu rzeczywistego i modelu w czasie drgań nie zmieniła się. Wyznamy zatem energię kinetyczną układu rzeczywistego.

Wytnijmy myślowo z belki element o długości  $dx$  w odległości  $x$  od miejsca zamocowania. Przesunięcie  $h$  tego elementu wyznaczmy z wzoru na linię ugięcia belki wspornikowej obciążonej na swobodnym końcu siłą skupioną, czyli

$$h = z \frac{x^2(31-x)}{2l^3}. \quad (1)$$

Jego prędkość wynosi

$$\dot{h} = \dot{z} \frac{x^2(31-x)}{2l^3}. \quad (2)$$

Wobec czego energia kinetyczna elementu to

$$E_1 = \frac{1}{2} \int_0^l dm \dot{h}^2, \quad (3)$$

gdzie  $dm$  to masa trójwymiarowego elementu belki o przekroju  $A$  i długości  $dx$ . Wobec tego masę elementu zapiszemy jako

$$dm = \frac{\gamma}{g} A dx, \quad (4)$$

gdzie  $\gamma$  to ciężar właściwy belki,  $A$  to przekrój poprzeczny belki,  $g$  to przyspieszenie ziemskie. Energię kinetyczną elementu zapiszemy teraz następująco

$$E_1 = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\gamma}{g} A \dot{h}^2 dx = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} A \dot{z}^2 \int_0^l \frac{x^4(31-x)^2}{4l^6} dx, \quad (5)$$

Obliczmy teraz całkę

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{x^4(31-x)^2}{4l^6} dx &= \frac{1}{4l^6} \int_0^l (9l^2x^4 - 6lx^5 + x^6) dx = \frac{1}{4l^6} \left( \frac{9}{5} l^2 x^5 - lx^6 + \frac{1}{7} x^7 \right) \Big|_0^l = \\ &= \frac{1}{4l^6} \left( \frac{9}{5} l^7 - l^7 + \frac{1}{7} l^7 \right) = \frac{1}{4l^6} \frac{33}{35} l^7 = \frac{33}{140} l. \end{aligned} \quad (6)$$

Podstawiając wynik całkowania do (3) otrzymamy

$$E_1 = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} A \dot{z}^2 \frac{33}{140} l. \quad (7)$$

Uwzględniając, że  $\frac{\gamma}{g}Al = m_1$  otrzymamy

$$E_1 = \frac{1}{2} \frac{33}{140} m_1 \dot{z}^2. \quad (8)$$

Energia kinetyczna masy  $m_2$  to

$$E_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{z}^2. \quad (9)$$

Wobec tego energia kinetyczna całego układu to

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2} M \dot{z}^2, \quad (10)$$

gdzie  $M = \frac{33}{140} m_1 + m_2$ . Ze wzoru (10) wynika, że uwzględniając masę belki należy dodać do masy  $m_2$  tylko

$$\frac{33}{140} m_1.$$

Obliczając energię potencjalną układu pomijamy potencjał masy w polu ziemskim, jeżeli w położeniu równowagi statycznej sprężyna jest zdeformowana siłą ciężkości, uwzględnimy jedynie potencjał sił sprężystości. Współczynnik sprężystości na zginanie belki wspornikowej wyznaczmy ze wzoru na strzałkę ugięcia swobodnego końca pod wpływem siły skupionej  $Q$  przyłożonej na tym końcu, czyli

$$z = \frac{Ql^3}{3EJ}, \quad (11)$$

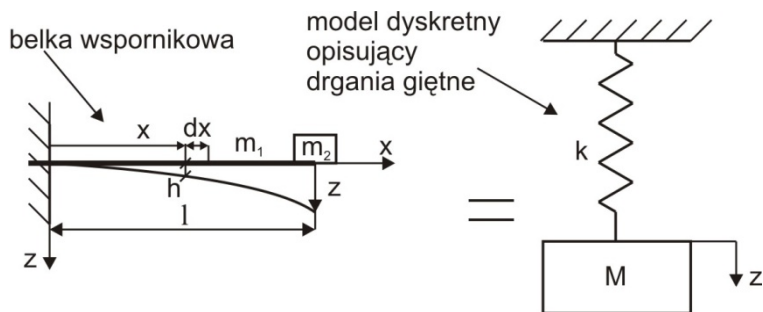
gdzie,  $E$  to moduł sprężystości wzdłużnej,  $J$  to moment bezwładności przekroju belki. Z (11) wynika, że współczynnik sprężystości giętej belki

$$k = \frac{Q}{z} = \frac{3EJ}{l^3}. \quad (12)$$

Potencjał modelu dyskretnego to

$$V = \frac{1}{2} kz^2. \quad (13)$$

W wyniku dokonanej dyskretyzacji układu rzeczywistego zamodelowano go w postaci masy zawieszonej na sprężynie, jak to przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Model układu rzeczywistego

Jeśli, zgodnie z modelem, pominiemy tłumienie w układzie, to możemy traktować go jako zachowawczy, czyli taki, w którym nie ma strat energii. Skorzystamy z zasady zachowania energii mechanicznej, która może być zapisana jako

$$H = E + V = \text{const.}, \quad (14)$$

i wynika z niej, że

$$E_{\max} = V_{\max}. \quad (15)$$

Aby wyznaczyć maksimum energii kinetycznej i potencjalnej, należy opisać ruch masy  $M$ . Zgodnie z teorią drgań, przemieszczenie masy w przypadku drgań swobodnych nietłumionych opisuje równanie

$$z = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t), \quad (16)$$

gdzie  $C_1$ ,  $C_2$  to stałe całkowania zależne od warunków początkowych,  $\omega$  to częstość własna (drgań swobodnych nietłumionych) układu. Wartość stałych całkowania to  $C_1 = z_0$ ,  $C_2 = \frac{v_0}{\omega}$ , gdzie  $z_0$  to początkowe wychylenie masy z położenia równowagi statycznej,  $v_0$  to początkowa prędkość masy. W analizowanym przypadku rozwiązanie (16) zapisujemy jako.

$$z = A \cos(\omega t - \varphi), \quad (17)$$

gdzie  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  to amplituda drgań,  $\varphi$  to kąt przesunięcia fazowego określony wzorem  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{C_2}{C_1}$ .

Prędkość masy uzyskamy różniczkując zależność (17) względem czasu

$$\dot{z} = -A\omega \sin(\omega t - \varphi). \quad (18)$$

Można teraz zapisać energię kinetyczną i potencjalną jako

$$E = \frac{1}{2} M A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - \varphi), \quad (19)$$

$$V = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t - \varphi). \quad (20)$$

Maksima energii kinetycznej i potencjalnej to

$$E_{\max} = \frac{1}{2} M A^2 \omega^2, \quad (21)$$

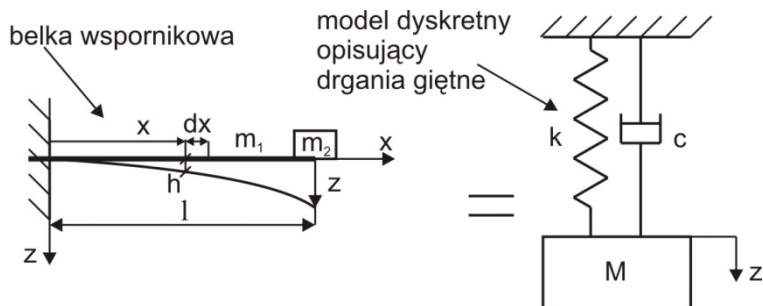
$$V_{\max} = \frac{1}{2} k A^2. \quad (22)$$

Korzystając z (15) określimy częstość własną układu jako

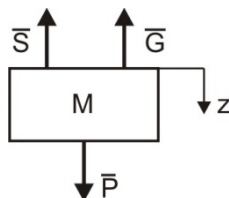
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{3EJ}{\left(\frac{33}{140} m_1 + m_2\right) l^3}}. \quad (23)$$

### A.3.2. Drgania swobodne tłumione

Wiadomo, że w układach rzeczywistych drgania swobodne z czasem zanikają, ze względu na występujące tłumienie. Gdyby chcieć dokładniej zamodelować układ rzeczywisty, należy do modelu przedstawionego na rys. 2 wprowadzić tłumik. Model układu z tłumieniem przedstawiono na rys. 4, a siły działające na masę  $M$  pokazano na rys. 5.



Rys. 4. Model układu rzeczywistego uwzględniający tłumienie

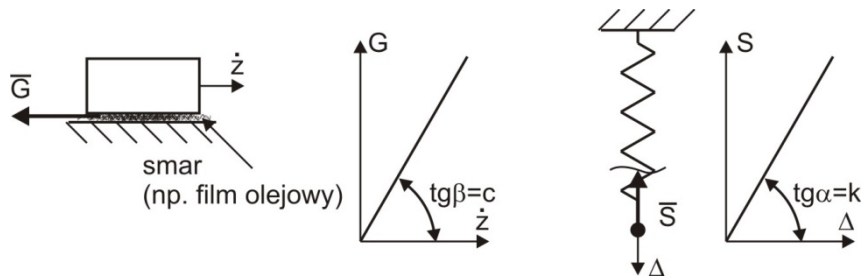


Rys. 5. Siły działające na masę

Różniczkowe równanie ruchu opisujące ruch masy to

$$M\ddot{z} = P - G - S, \quad (24)$$

gdzie  $P = Mg$ ,  $G$  to siłą reakcji tłumika,  $S$  to siła reakcji sprężyny. Zwykle przyjmuje się liniową charakterystykę tłumienia i sprężystą, pokazane poniżej.



Rys. 6. Charakterystyka tłumienia i sprężysta

Siła reakcji tłumika to  $G = c\dot{z}$ , gdzie  $c$  to współczynnik tłumienia wiskotycznego, siła reakcji sprężyny to  $S = k\Delta$ , gdzie  $k$  to współczynnik sprężystości,  $\Delta = z + \lambda$  to deformacja całkowita sprężyny,  $\lambda$  to deformacja statyczna sprężyny. Zatem równanie (24) zapiszemy teraz jako

$$M\ddot{z} + c\dot{z} + k(z + \lambda) = P. \quad (25)$$

Deformację statyczną sprężyny  $\lambda$  określimy, rozważając układ będący w stanie równowagi statycznej, czyli

$$k\lambda = P \Rightarrow \lambda = \frac{P}{k}. \quad (26)$$

Uwzględniając (26) w (25) otrzymamy

$$M\ddot{z} + c\dot{z} + kz = 0. \quad (27)$$

Powyzsze równanie sprowadzimy do postaci

$$\ddot{z} + 2h\dot{z} + \omega^2 z = 0, \quad (28)$$

gdzie

$$2h = \frac{c}{M} \text{ to tzw. współczynnik tłumienia jednostkowego,}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \text{ to częstość drgań własnych,}$$

W przypadku małego tłumienia, tzn. gdy  $\omega > h$  (to tzw. tłumienie podkrytyczne – taki przypadek najczęściej występuje w technice), rozwiązanie równania różniczkowego (28) ma formę

$$z = e^{-ht} [C_1 \cos(\omega_t t) + C_2 \sin(\omega_t t)], \quad (29)$$

gdzie  $C_1, C_2$  to stałe całkowania zależne od warunków początkowych, Wartość stałych całkowania to  $C_1 = z_0$ ,  $C_2 = \frac{v_0 + hz_0}{\omega_t}$ , gdzie  $z_0$  to początkowe wychylenie masy z położenia równowagi statycznej,  $v_0$  to początkowa prędkość masy natomiast  $\omega_*$  oznacza częstość drgań tłumionych i jest ona wyrażona zależnością

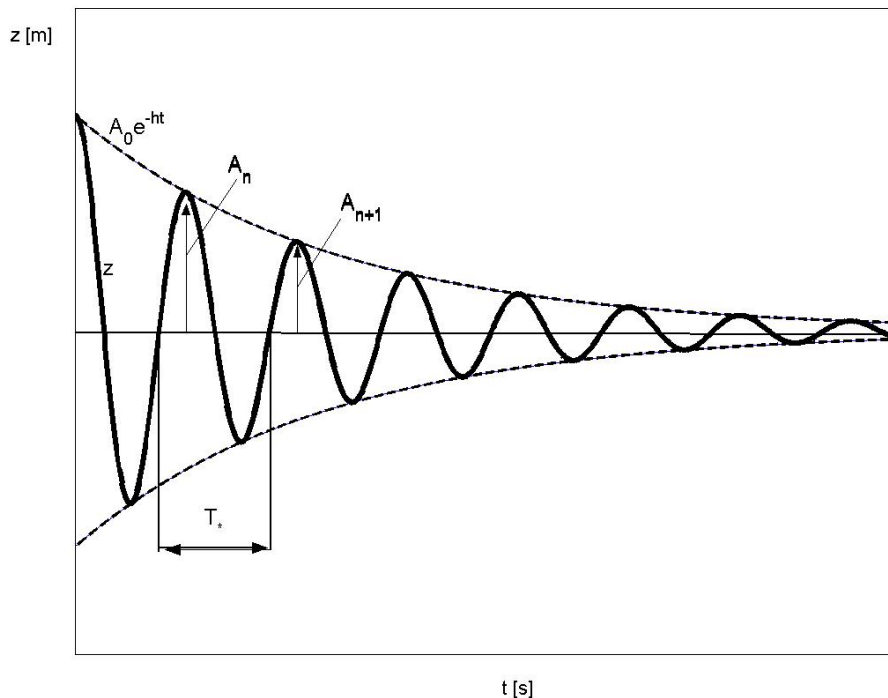
$$\omega_t = \sqrt{\omega^2 - h^2}. \quad (30)$$

W analizowanym przypadku rozwiązanie (29) zapiszemy jako

$$z = A_0 e^{-ht} \cos(\omega_t t - \varphi), \quad (31)$$

gdzie  $A_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  to amplituda drgań,  $\varphi$  to kąt przesunięcia fazowego określony wzorem  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{C_2}{C_1}$ .

Przykładowy przebieg rozwiązania (31) przedstawiono poniżej. Amplituda rozważanych drgań maleje.



Rys. 7. Drgania swobodne tłumione



Z równania (31) wynika, że drgania tłumione wygasają po nieskończenie długim czasie oraz że ich częstość  $\omega_t$  jest stała. Dlatego wprowadza się pojęcie okresu drgań tłumionych

$$T_t = \frac{2\pi}{\omega_t} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - h^2}} > T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (32)$$

gdzie T to okres drgań swobodnych nietłumionych. Wprowadza się też pojęcie logarytmicznego dekrementu tłumienia D, który jest zdefiniowany przez zależność

$$e^D = \frac{A_n}{A_{n+1}}, \quad (33)$$

gdzie  $A_n$  i  $A_{n+1}$  to kolejne amplitudy drgań, przy czym

$$D = \ln\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right) = hT_t = \frac{2\pi}{\omega_t} h. \quad (34)$$

Znając logarytmiczny dekrement tłumienia można określić współczynnik tłumienia jednostkowego oraz współczynnik tłumienia wiskotycznego c.