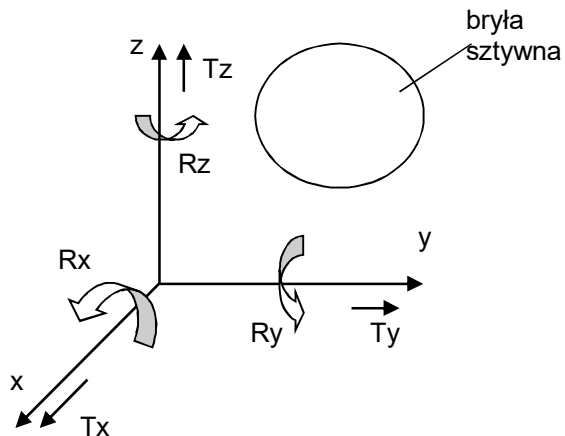


Spis treści

11. Pojęcia podstawowe.....	2
11.1. Klasyfikacja par kinematycznych	6
11.2. Ruchliwość płaskiego łańcucha kinematycznego	8
11.3. Klasyfikacja funkcjonalna mechanizmów.....	14
12. Kinematyka wybranych mechanizmów płaskich	17
12.1. Kinematyka dwuczłonowego manipulatora płaskiego.....	17
12.2. Kinematyka mechanizmów zębatych.....	41
13. Dynamika układów mechanicznych	76
13.1. Zasada równowagi kinetostaticznej.....	77
13.2. Redukcja mas i sił	102
13.3. Modelowanie dynamiki układów z zastosowaniem równań Lagrange'a drugiego rodzaju.....	113
14. Tarcie w parach kinematycznych	127
14.1. Rodzaje tarcia.....	133
14.2. Tarcie w parach postępowych.....	144
14.3. Tarcie w parach obrotowych.....	146
14.4. Wybrane statyczne modele tarcia.....	149

11. Pojęcia podstawowe

Dynamika jako część mechaniki zajmuje się opisem ruchu oraz jego przyczynami. Analogicznie dynamika maszyn zajmuje się ruchem mechanizmów i maszyn oraz jego przyczynami. Jak wiadomo z mechaniki ogólnej ruch bryły to zmiana w czasie jej położenia względem przyjętego układu odniesienia.



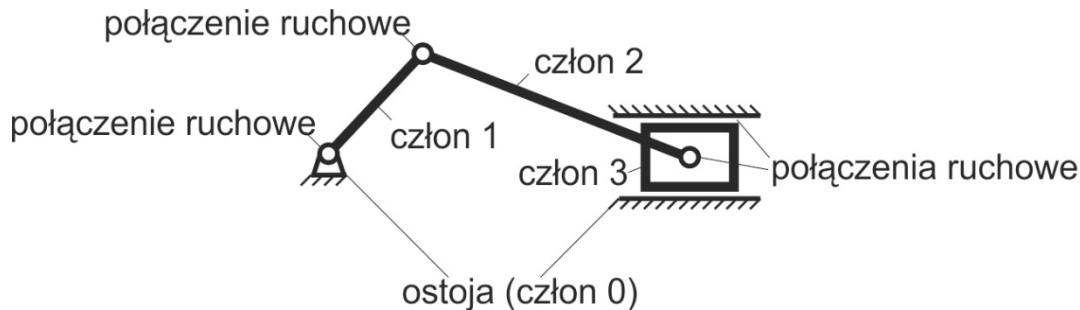
$\left. \begin{matrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{matrix} \right\}$ to przesunięcia bryły na odpowiednich kierunkach zwane translacjami,

$\left. \begin{matrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{matrix} \right\}$ to obroty bryły wokół odpowiednich osi zwane rotacjami.

Każdy z przedstawionych na rys. 1 elementarnych ruchów określa tzw. **stopień swobody**.

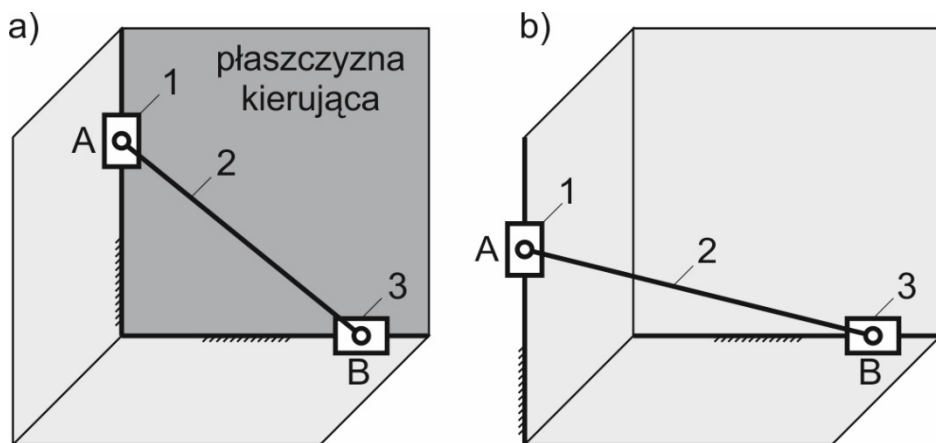
Oznacza to, że bryła może mieć 6 stopni swobody i wówczas nazywamy ją **bryłą swobodną**. Jednak w rzeczywistości bryły mają mniej stopni swobody (nazywamy je nieswobodnymi), ponieważ wchodząc w kontakt z innymi bryłami tracą stopnie swobody.

Jeśli kontakt ten jest realizowany za pomocą połączeń ruchomych, nazywanych parami kinematycznymi, to bryły tworzą łańcuch kinematyczny (rys. 2). Poszczególne bryły ruchome nazywamy członami, a te, które spełniają funkcję podstawy ruchomych członów, tworzą jeden człon nazywany ostoją.



Rys. 2. Przykład łańcucha kinematycznego

Łańcuch kinematyczny będziemy nazywali **płaskim** jeśli wszystkie punkty należące do jego członów pozostają w czasie ruchu w płaszczyznach równoległych do pewnej nieruchomej płaszczyzny nazywanej płaszczyzną kierującą (rys. 3a). W przeciwnym przypadku łańcuch będziemy nazywali **przestrzennym** (rys. 3b).

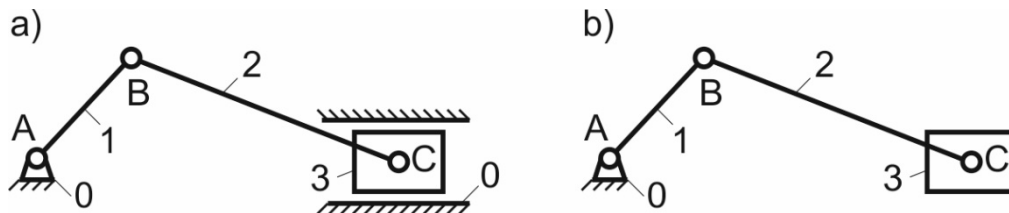


Rys. 3. Przykład łańcucha kinematycznego: a) płaskiego, b) przestrzennego

W opisie ruchu łańcucha kinematycznego istotnym zagadnieniem jest określenie tzw. **stopnia ruchliwości** (lub po prostu ruchliwości), czyli liczby stopni swobody członów łańcucha kinematycznego względem jednego z nich. Innymi słowy stopień ruchliwości to liczba, która określa minimalną liczbę ruchomych członów łańcucha kinematycznego jakie należy wprawić w ruch, aby ruch pozostałych członów był jednoznacznie określony. Ta definicja, w przypadku złożonych układów, może być kłopotliwa do stosowania. Możemy powiedzieć również, że stopień ruchliwości łańcucha kinematycznego to liczba określająca minimalną liczbę ograniczeń ruchów

prostych w parach kinematycznych jakie należy narzucić, aby cały układ był nieruchomy.

Łańcuch kinematyczny może być **zamknięty** lub **otwarty**. Jeśli wszystkie człony tworzą pary kinematyczne z więcej niż jednym członem to taki łańcuch kinematyczny nazywamy zamkniętym – to tzw. **mechanizm**. Przykładowy mechanizm korbowo-wodzikowy stosowany w maszynach tłokowych przedstawiono na rys. 2a. Z kolei otwarty łańcuch kinematyczny to taki, w którym przynajmniej jeden człon tworzy parę kinematyczną tylko z jednym innym członem – to tzw. **manipulator**. Przykład takiego łańcucha kinematycznego przedstawiono na rys. 2b, gdzie człon 3 tworzy parę tylko z jednym członem 2.



Rys. 4. Przykład łańcucha kinematycznego: a) zamkniętego – tzw. mechanizm korbowo-wodzikowy, b) otwartego – manipulator

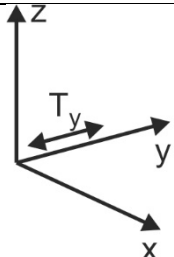
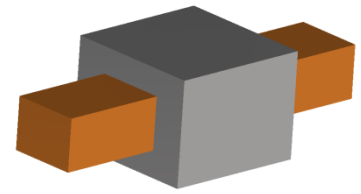
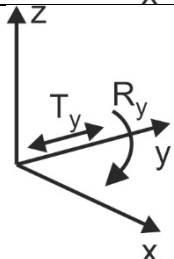
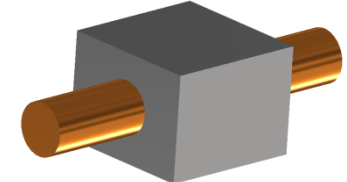
Manipulator, którego ruch jest automatycznie sterowany komputerem, nazywamy **robotem**.

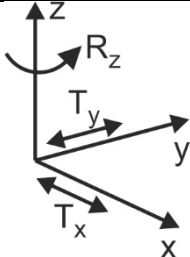
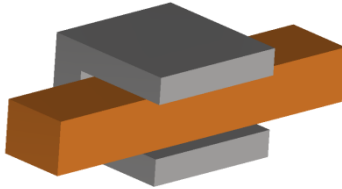
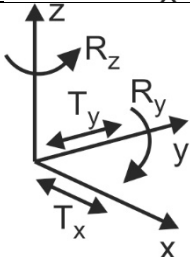
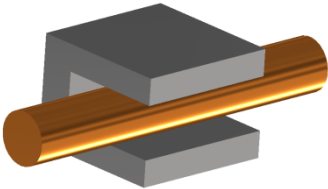
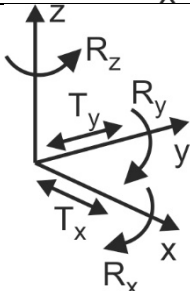
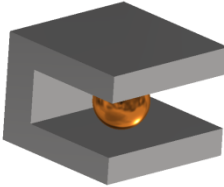
Maszyna to układ mechaniczny, gdzie przy udziale odpowiednich mechanizmów:

- układ wykonuje pracę użyteczną, to tzw. maszyny robocze, np. obrabiarka, koparka, lub
- następuje zamiana energii na inny rodzaj energii, to tzw. silniki.

11.1. Klasyfikacja par kinematycznych

Jak już wiadomo, jeżeli bryły połączone są ze sobą kinematycznie, tzn. tak, że jedna względem drugiej może wykonywać ruch, mówimy, że tworzą tzw. parę kinematyczną, której przypisujemy odpowiednią klasę. O klasie pary kinematycznej decyduje ilość utraconych stopni swobody jednego członu względem drugiego, z którym tworzy parę kinematyczną. Klasy par kinematycznych występujące w układach mechanicznych przedstawiono w tabeli.

Klasa pary kinematycznej	Symbol	Przykład rozwiązania
para kinematyczna klasy 5 – człony tracą względem siebie 5 stopni swobody		
para kinematyczna klasy 4 – człony tracą względem siebie 4 stopnie swobody		

<p>para kinematyczna klasy 3 – człony tracą względem siebie 3 stopnie swobody</p>		
<p>para kinematyczna klasy 2 – człony tracą względem siebie 2 stopnie swobody</p>		
<p>para kinematyczna klasy 1 – człony tracą względem siebie 1 stopień swobody</p>		

Nie może być par kinematycznych klasy 6 i 0 bo oznaczałoby to, że człony w pierwszym przypadku są względem siebie nieruchome lub, w drugim przypadku, nie tracą względem siebie stopni swobody.

11.2. Ruchliwość płaskiego łańcucha kinematycznego

W łańcuchu kinematycznym płaskim ruchliwość określamy następująco

$$w = 3n - 2p_5 - p_4 \quad (1)$$

gdzie: w – ruchliwość,

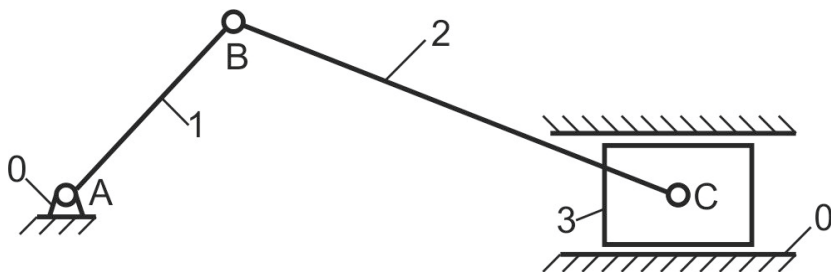
n – liczba członów ruchomych,

p_5 – liczba par kinematycznych klasy 5,

p_4 – liczba par kinematycznych klasy 4.

Przykład 1

Dla układu mechanicznego płaskiego pokazanego na rysunku, obliczymy ruchliwość.



Rys. 3. Łańcuch kinematyczny o stopniu ruchliwości równym 1

Przedstawiony układ to mechanizm korbowo-wodzikowy, w którym:

0 - ostoja,

1 - korba,

2 - łącznik,

3 - wodezik,

Ruchliwość mechanizmu obliczymy ze wzoru (1), w którym:

$n = 3 \{1, 2, 3\}$ – w nawiasie podano człony ruchome,

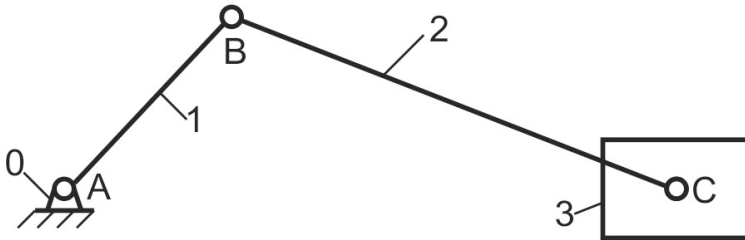
$p_5 = 4 \{0-1, 1-2, 2-3, 0-3\}$ - w nawiasie podano pary kinematyczne klasy 5,

$p_4 = 0$

więc $w = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1$.

Przykład 2

Jeśli w układzie z poprzedniego przykładu usunięta zostanie para kinematyczna postępową 0-3 to wówczas układ będzie jak na poniższym rysunku. Obliczmy jego ruchliwość.



Rys. 4. Łańcuch kinematyczny o stopniu ruchliwości równym 3

Przedstawiony układ to manipulator, w którym ostatni człon 3 zwykle jest chwytakiem:

0 - ostoja,

1, 2, 3 – człony ruchome

Ruchliwość mechanizmu obliczymy ze wzoru (1), w którym:

$$n = 3 \{1, 2, 3\}$$

$$p_5 = 3 \{0-1, 1-2, 2-3\}$$

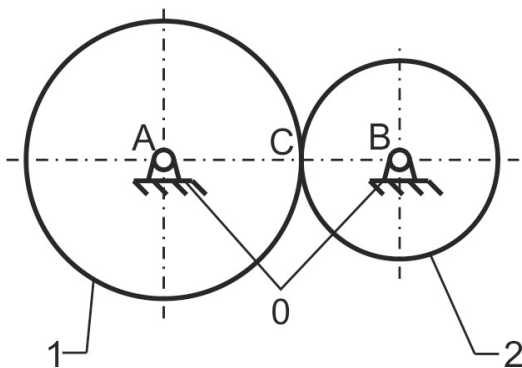
$$p_4 = 0$$

$$\text{więc } w = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 0 = 3.$$

Aby ruch układu był jednoznacznie określony, każdy człon musi być napędzany.

Przykład 3

Dla układu mechanicznego płaskiego pokazanego na rysunku, obliczymy ruchliwość.



Rys. 5. Łańcuch kinematyczny o stopniu ruchliwości równym 1

Przedstawiony układ to mechanizm zębaty, w którym:

0 - ostoja,

1, 2 – koła zębate walcowe,

Uwaga!

Umownie przyjmuje się, że współpracujące koła zębate tworzą parę kinematyczną klasy 4

Ruchliwość mechanizmu obliczymy ze wzoru (1), w którym:

$$n = 2 \{1, 2\}$$

$$p_5 = 2 \{0-1, 0-2\}$$

$$p_4 = 1 \{1-2\}$$

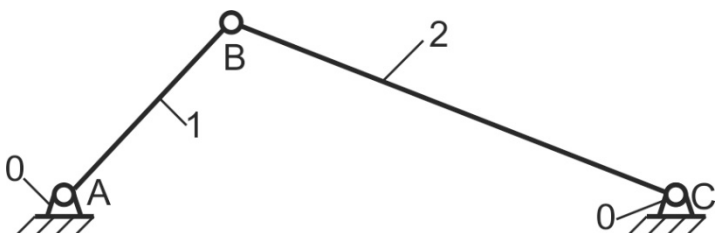
$$\text{więc } w = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1.$$

Uwaga!

Jeśli $w = 0$ to układ jest nieruchomy, jeśli $w < 0$ to układ jest przesztywniony.

Przykład 4

Obliczymy ruchliwość układu dwóch prętów połączonych przegubowo.



Rys. 4. Układ dwóch prętów połączonych przegubowo

Przedstawiony układ jest złożony z następujących elementów:

0 - ostoja,

1, 2 – człony ruchome

Ruchliwość obliczymy ze wzoru (1), w którym:

$$n = 2 \{1, 2\}$$

$$p_5 = 3 \{0-1, 1-2, 2-0\}$$

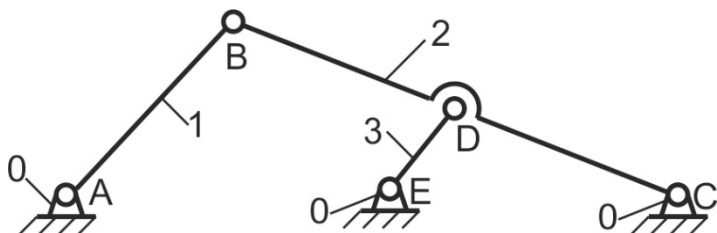
$$p_4 = 0$$

$$\text{więc } w = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 0 = 0.$$

Ruchliwość układu wynosi $w=0$, zatem układ prętów jest nieruchoma konstrukcją.

Przykład 5

Obliczymy ruchliwość układu trzech prętów połączonych przegubowo.



Rys. 4. Układ trzech prętów połączonych przegubowo

Przedstawiony układ jest złożony z następujących elementów:

0 - ostoja,

1, 2, 3 – człony ruchome

Ruchliwość obliczymy ze wzoru (1), w którym:

$$n = 3 \{1, 2, 3\}$$

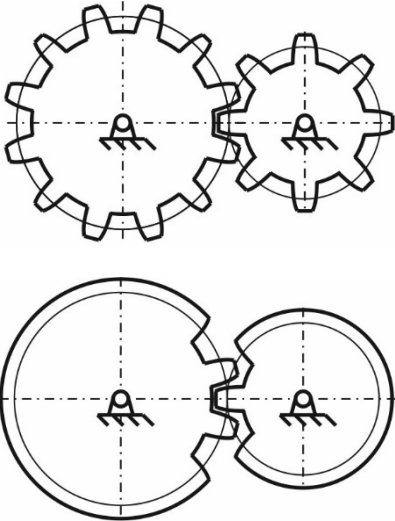
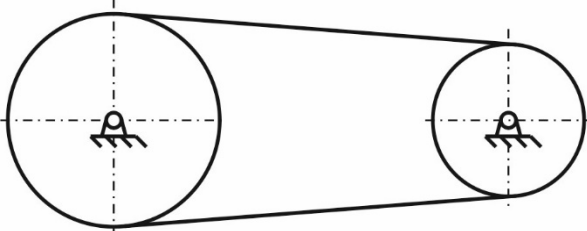
$$p_5 = 5 \{0-1, 1-2, 2-0, 2-3, 3-0\}$$

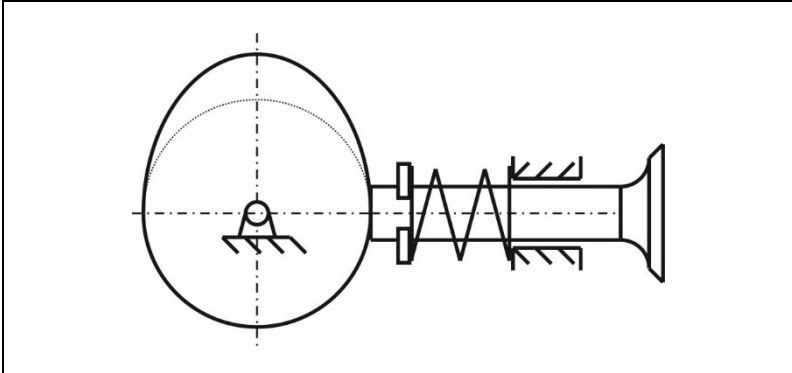
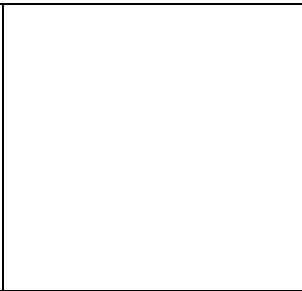
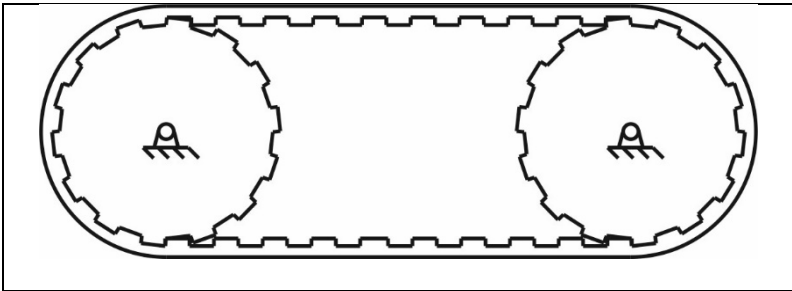
$$p_4 = 0$$

$$\text{więc } w = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 - 0 = -1.$$

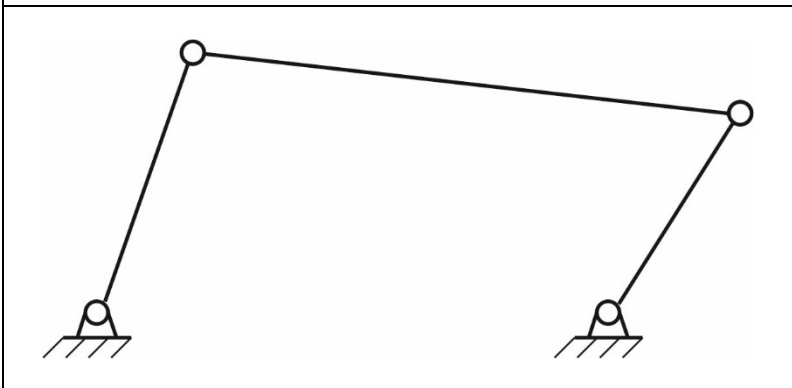
Ruchliwość układu wynosi $w=-1$, zatem układ prętów jest nieruchoma konstrukcją przesztynwnioną.

11.3. Klasyfikacja funkcjonalna mechanizmów

Przykład	Nazwa mechanizmu
 <p>The diagram shows two pairs of meshing gears. The top pair consists of two spur gears of different sizes, each with a pivot point at its center. The bottom pair consists of two bevel gears of different sizes, also with pivot points at their centers. Both pairs are shown in a meshing configuration.</p>	zębaty
 <p>The diagram shows a belt drive mechanism. It consists of two pulleys of different diameters, one larger than the other, connected by a belt. Both pulleys have a pivot point at their center.</p>	ciągnowy



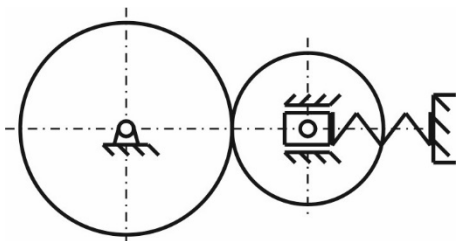
krzywkowy



dźwigniowy



śrubowy



cierny

12. Kinematyka wybranych mechanizmów płaskich

Kinematyka łańcuchów kinematycznych (mechanizmów lub manipulatorów), to opis ruchu poszczególnych członów układów mechanicznych. Stosujemy tu metody analityczne znane z mechaniki ogólnej, graficzne lub symulacje komputerowe. W tym rozdziale zajmiemy się tymi pierwszymi. Zastosujemy je do opisu dwuczłonowego manipulatora płaskiego oraz przekładni obiegowej.

12.1. Kinematyka dwuczłonowego manipulatora płaskiego

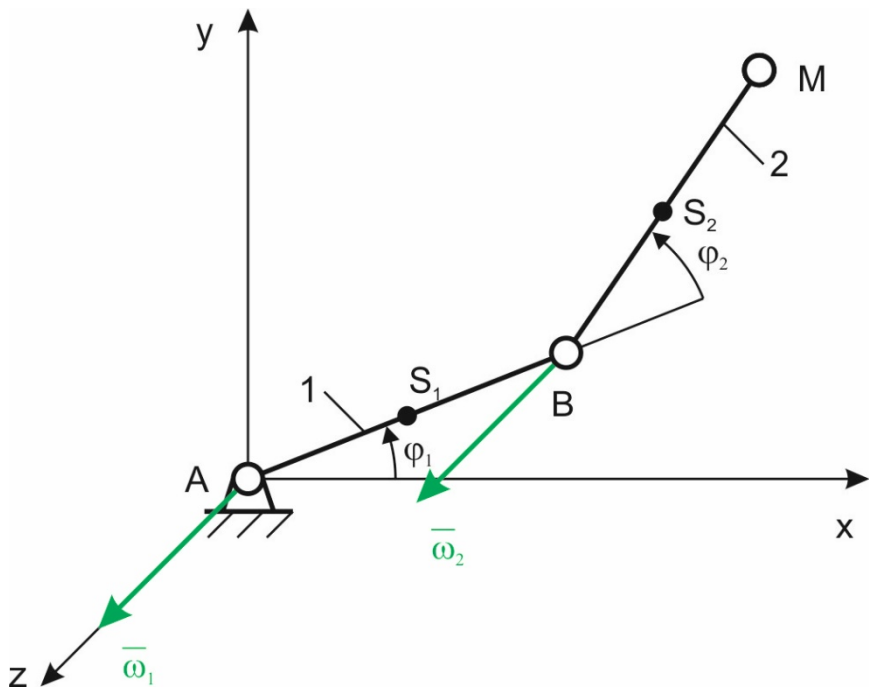
Rozważmy płaski otwarty łańcuch kinematyczny czyli manipulator, który został przedstawiony na rys. 1. Ruchliwość układu wyznaczymy ze znanego wzoru (1), w którym:

$n = 2 \{1, 2\}$ – liczba członów ruchomych,

$p_5 = 2 \{0-1, 1-2\}$ – liczba par kinematycznych klasy 5,

$p_4 = 0$ – liczba par kinematycznych klasy 4,

więc $w = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 0 = 2$.



$$\begin{aligned} \overline{\omega_1} \parallel \overline{\omega_2} \parallel z \\ |\overline{AB}| = l_1 \\ |\overline{BM}| = l_2 \\ |\overline{AS_1}| = l_{c1} \\ |\overline{BS_2}| = l_{c2} \end{aligned}$$

Rys. 1. Schemat dwuczłonowego manipulatora płaskiego

Jest to więc układ o dwóch stopniach swobody, którego człony w czasie ruchu pozostają w płaszczyźnie xy . Pary kinematyczne obrotowe w punktach A i B umożliwiają wykonywanie ruchów obrotowych względem osi prostopadłych do płaszczyzny xy . Zakładamy, że środek masy członu 1 leży na odcinku \overline{AB} w punkcie S_1 , zaś środek masy członu 2 leży na odcinku \overline{BM} w punkcie S_2 , gdzie $|\overline{AS_1}| = l_{c1}$ oraz $|\overline{BS_2}| = l_{c2}$. Człon 1 ma prędkość kątową $\overline{\omega_1}$ równoległą do osi z , co do wartości $\omega_1 = \dot{\varphi}_1$. Natomiast człon 2 ma prędkość kątową $\overline{\omega} = \overline{\omega_1} + \overline{\omega_2}$ także równoległą do osi z , co do wartości

$\omega = \omega_1 + \omega_2 = \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2$, przy czym $\bar{\omega}_2$ to prędkość kątowa z jaką człon 2 obraca się względem członu 1.

Wyznamy teraz wektor prędkości punktu B, czyli

$$\bar{v}_B = \bar{\omega}_1 \times \overline{AB} \quad (1)$$

Wektor ten możemy zapisać inaczej w postaci wyznacznikowej:

$$\bar{v}_B = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega_1 \\ l_1 \cos \varphi_1 & l_1 \sin \varphi_1 & 0 \end{vmatrix} \quad (2)$$

gdzie $l_1 \cos \varphi_1 = x_B$, $l_1 \sin \varphi_1 = y_B$. Wyznacznik możemy przedstawić w postaci:

$$\bar{v}_B = v_{Bx} \bar{i} + v_{By} \bar{j} + v_{Bz} \bar{k} \quad (3)$$

Wartość wektora prędkości wyznaczymy z zależności:

$$v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2 + v_{Bz}^2} \quad (4)$$

Wielkości pod pierwiastkiem wyznaczamy, wykorzystując zapis wyznacznikowy:

$$\begin{cases} v_{Bx} = -\omega_1 l_1 \sin\varphi_1 \\ v_{By} = \omega_1 l_1 \cos\varphi_1 \\ v_{Bz} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Podane wzory (5) to rzuty wektora prędkości punktu B na poszczególne osie.

Wyznamy teraz wektor prędkości punktu M, stosując metodę wyznaczania prędkości dowolnego punktu bryły w ruchu płaskim, znaną z mechaniki ogólnej, czyli

$$\bar{v}_M = \bar{v}_B + \bar{v}_{MB} \quad (6)$$

Wektor prędkości \bar{v}_B określa wzór (1), natomiast wektor prędkości \bar{v}_{MB} zapiszemy

$$\bar{v}_{MB} = \bar{\omega} \times \overline{BM} \quad (7)$$

Wyjaśnienia wymaga tutaj fakt, że we wzorze (7) występuje wektor prędkości $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$. Jeżeli jako obserwatorzy staniemy w punkcie B, to będziemy widzieli ruch członu 2 jako ruch obrotowy właśnie z chwilową prędkością kątową $\bar{\omega}$. Wektor \bar{v}_{MB} możemy zapisać w postaci wyznaczkowej:

$$\bar{v}_{MB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega_1 + \omega_2 \\ l_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & l_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & 0 \end{vmatrix} \quad (8)$$

Wyznacznik możemy przedstawić w postaci:

$$\bar{v}_{MB} = v_{MBx}\bar{i} + v_{MBy}\bar{j} + v_{MBz}\bar{k} \quad (9)$$

a wielkości v_{MBx} , v_{MBy} , v_{MBz} wyznaczamy, wykorzystując zapis wyznacznikowy:

$$\begin{cases} v_{MBx} = -(\omega_1 + \omega_2)l_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ v_{MBy} = (\omega_1 + \omega_2)l_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \\ v_{MBz} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Wektor prędkości punktu M możemy również zapisać w postaci

$$\bar{v}_M = v_{Mx}\bar{i} + v_{My}\bar{j} + v_{Mz}\bar{k} \quad (11)$$

Uwzględniając równania (3), (9) i (11), wektor prędkości \bar{v}_M dany wzorem (6) zapiszemy

$$\begin{aligned} \bar{v}_M = v_{Mx}\bar{i} + v_{My}\bar{j} + v_{Mz}\bar{k} &= v_{Bx}\bar{i} + v_{By}\bar{j} + v_{Bz}\bar{k} + v_{MBx}\bar{i} + v_{MBy}\bar{j} + v_{MBz}\bar{k} = \\ &= (v_{Bx} + v_{MBx})\bar{i} + (v_{By} + v_{MBy})\bar{j} + (v_{Bz} + v_{MBz})\bar{k} \end{aligned} \quad (12)$$

Porównując odpowiednie wyrażenia przy \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} , otrzymamy:

$$\begin{cases} v_{Mx} = v_{Bx} + v_{MBx} \\ v_{My} = v_{By} + v_{MBy} \\ v_{Mz} = v_{Bz} + v_{MBz} \end{cases} \quad (13)$$

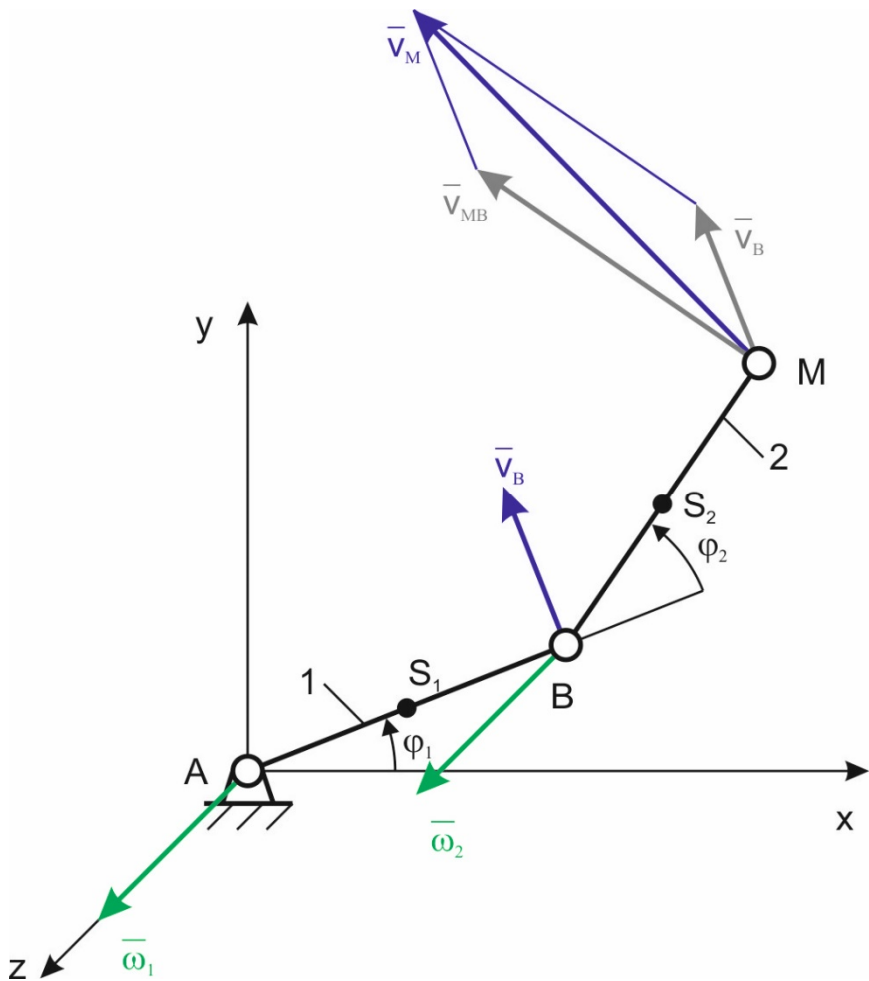
Uwzględniając wzory (5) i (10), powyższy zapiszemy jako

$$\begin{cases} v_{Mx} = -\omega_1 l_1 \sin \varphi_1 - (\omega_1 + \omega_2) l_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ v_{My} = \omega_1 l_1 \cos \varphi_1 + (\omega_1 + \omega_2) l_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \\ v_{Mz} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Podane wzory (14) to rzuty wektora prędkości punktu M na poszczególne osie. Wartość wektora prędkości punktu M wyznaczymy z zależności:

$$v_M = \sqrt{v_{Mx}^2 + v_{My}^2 + v_{Mz}^2} \quad (15)$$

Rozkład prędkości analizowanych punktów przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Rozkład prędkości punktów B i M manipulatora

Przez analogię do wektora prędkości punktu B określimy wektor prędkości punktu S_1

$$\bar{v}_{S_1} = \bar{\omega}_1 \times \overline{AS_1} \quad (16)$$

a w postaci wyznacznikowej:

$$\bar{v}_{S_1} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega_1 \\ l_{c1} \cos \varphi_1 & l_{c1} \sin \varphi_1 & 0 \end{vmatrix} \quad (17)$$

skąd otrzymamy

$$\begin{cases} v_{S_1x} = -\omega_1 l_{c1} \sin \varphi_1 \\ v_{S_1y} = \omega_1 l_{c1} \cos \varphi_1 \\ v_{S_1z} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Podane wzory (18) to rzuty wektora prędkości punktu S_1 na poszczególne osie. Wartość wektora prędkości punktu S_1 wyznaczmy z zależności:

$$v_{S_1} = \sqrt{v_{S_1x}^2 + v_{S_1y}^2 + v_{S_1z}^2} \quad (19)$$

Przez analogię do wektora prędkości punktu M określimy wektor prędkości punktu S_2 .

$$\bar{v}_{S_2} = \bar{v}_B + \bar{v}_{S_2B} \quad (20)$$

gdzie

$$\bar{v}_{S_2B} = \bar{\omega} \times \overline{BS_2} \quad (21)$$

a w postaci wyznacznikowej zapiszemy:

$$\bar{v}_{S_2B} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega_1 + \omega_2 \\ l_{c2} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & l_{c2} \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & 0 \end{vmatrix} \quad (22)$$

skąd otrzymamy

$$\begin{cases} v_{S_2Bx} = -(\omega_1 + \omega_2)l_{c2} \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ v_{S_2By} = (\omega_1 + \omega_2)l_{c2} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \\ v_{S_2Bz} = 0 \end{cases} \quad (23)$$

Przez analogię do rzutów wektora prędkości punktu M na poszczególne osie, zapiszemy teraz rzuty wektora prędkości punktu S_2 na poszczególne osie:

$$\begin{cases} v_{S_2x} = v_{Bx} + v_{S_2Bx} \\ v_{S_2y} = v_{By} + v_{S_2By} \\ v_{S_2z} = v_{Bz} + v_{S_2Bz} \end{cases} \quad (24)$$

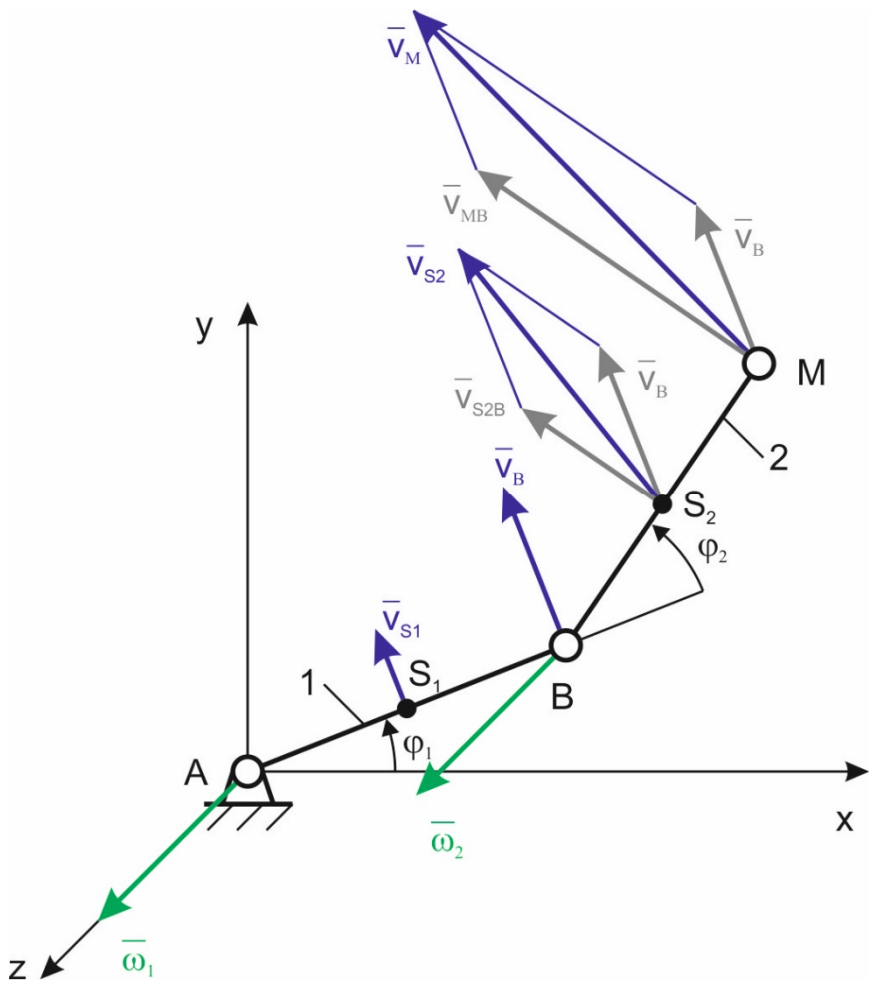
Uwzględniając wzory (5) i (23), powyższy zapiszemy jako

$$\begin{cases} v_{S_2x} = -\omega_1 l_1 \sin \varphi_1 - (\omega_1 + \omega_2) l_{c2} \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ v_{S_2y} = \omega_1 l_1 \cos \varphi_1 + (\omega_1 + \omega_2) l_{c2} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \\ v_{S_2z} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

Podane wzory (25) to rzuty wektora prędkości punktu S_2 na poszczególne osie. Wartość wektora prędkości punktu S_2 wyznaczymy z zależności:

$$v_{S_2} = \sqrt{v_{S_2x}^2 + v_{S_2y}^2 + v_{S_2z}^2} \quad (26)$$

Rozkład prędkości analizowanych punktów przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Rozkład prędkości charakterystycznych punktów manipulatora

Zajmiemy się teraz bardziej złożonym zagadnieniem przyspieszeń. Wartości prędkości kątowych mogą zmieniać się w czasie, czyli będą występować przyspieszenia kątowe odpowiednio $\bar{\varepsilon}_1 = \dot{\bar{\omega}}_1$, $\bar{\varepsilon}_2 = \dot{\bar{\omega}}_2$, $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2$.

Aby wyznaczyć wektor przyspieszenia punktu B, równanie (1) różniczkujemy względem czasu i otrzymujemy:

$$\dot{\bar{v}}_B = \dot{\bar{\omega}}_1 \times \overline{AB} + \bar{\omega}_1 \times \overline{\dot{AB}} \quad (27)$$

Wiemy, że:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{v}}_B &= \bar{a}_B, \\ \dot{\bar{\omega}}_1 &= \bar{\varepsilon}_1, \\ \overline{\dot{AB}} &= \bar{\omega}_1 \times \overline{AB} = \bar{v}_B \end{aligned}$$

co uwzględnimy w podanym wzorze i otrzymamy:

$$\bar{a}_B = \bar{\varepsilon}_1 \times \overline{AB} + \bar{\omega}_1 \times \bar{v}_B = \bar{a}_{B\tau} + \bar{a}_{Bn} \quad (28)$$

gdzie $\bar{a}_{B\tau} = \bar{\varepsilon}_1 \times \overline{AB}$, $\bar{a}_{Bn} = \bar{\omega}_1 \times \bar{v}_B$. Równanie (28) możemy zapisać inaczej w postaci wyznacznikowej:

$$\bar{a}_B = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ l_1 \cos \varphi_1 & l_1 \sin \varphi_1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega_1 \\ v_{Bx} & v_{By} & v_{Bz} \end{vmatrix} \quad (29)$$

Wyznacznik możemy przedstawić w postaci:

$$\bar{a}_B = a_{Bx}\bar{i} + a_{By}\bar{j} + a_{Bz}\bar{k} \quad (30)$$

Wartość wektora przyspieszenia wyznaczmy z zależności:

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2 + a_{Bz}^2} \quad (31)$$

Wielkości pod pierwiastkiem wyznaczamy, wykorzystując zapis wyznacznikowy:

$$\begin{cases} a_{Bx} = -\varepsilon_1 l_1 \sin\varphi_1 - \omega_1^2 l_1 \cos\varphi_1 \\ a_{By} = \varepsilon_1 l_1 \cos\varphi_1 - \omega_1^2 l_1 \sin\varphi_1 \\ a_{Bz} = 0 \end{cases} \quad (32)$$

Podane wzory (32) to rzuty wektora przyspieszenia punktu B na poszczególne osie. Wyznaczmy teraz wektor przyspieszenia punktu M. W tym celu zróżniczkujemy równanie (6)

$$\dot{\vec{v}}_M = \dot{\vec{v}}_B + \dot{\vec{v}}_{MB} \quad (33)$$

Oznaczając $\dot{\vec{v}}_M = \bar{a}_M$, $\dot{\vec{v}}_B = \bar{a}_B$ i $\dot{\vec{v}}_{MB} = \bar{a}_{MB}$, zapiszemy

$$\bar{a}_M = \bar{a}_B + \bar{a}_{MB} \quad (34)$$

Wektor przyspieszenia punktu B określiliśmy poprzednio. Teraz określimy wektor przyspieszenia \bar{a}_{MB} wynikający z obrotu punktu M względem punktu B

$$\bar{a}_{MB} = \dot{\bar{v}}_{MB} = \dot{\bar{\omega}} \times \overline{BM} + \bar{\omega} \times \overline{BM} \quad (35)$$

Wiemy, że:

$$\dot{\bar{\omega}} = \dot{\bar{\omega}}_1 + \dot{\bar{\omega}}_2 = \dot{\bar{\varepsilon}}_1 + \dot{\bar{\varepsilon}}_2 = \bar{\varepsilon},$$

$$\overline{BM} = \bar{\omega} \times \overline{BM} = \bar{v}_{MB}$$

co uwzględnimy w podanym wzorze i otrzymamy:

$$\bar{a}_{MB} = \bar{\varepsilon} \times \overline{BM} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{MB} = \bar{a}_{MB\tau} + \bar{a}_{MBn} \quad (36)$$

gdzie $\bar{a}_{MB\tau} = \bar{\varepsilon} \times \overline{BM}$, $\bar{a}_{MBn} = \bar{\omega} \times \bar{v}_{MB}$. Wektor \bar{a}_{MB} możemy zapisać w postaci wyznacznikowej:

$$\bar{a}_{MB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ l_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & l_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega_1 + \omega_2 \\ v_{MBx} & v_{MBy} & 0 \end{vmatrix} \quad (37)$$

Wyznacznik możemy przedstawić w postaci:

$$\bar{a}_{MB} = a_{MBx}\bar{i} + a_{MBy}\bar{j} + a_{MBz}\bar{k} \quad (38)$$

a wielkości a_{MBx} , a_{MBy} , a_{MBz} wyznaczamy, wykorzystując zapis wyznacznikowy:

$$\begin{cases} a_{MBx} = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)l_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - (\omega_1 + \omega_2)^2 l_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \\ a_{MBy} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)l_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - (\omega_1 + \omega_2)^2 l_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ a_{MBz} = 0 \end{cases} \quad (39)$$

Wektor przyspieszenia punktu M możemy również zapisać w postaci

$$\bar{a}_M = a_{Mx}\bar{i} + a_{My}\bar{j} + a_{Mz}\bar{k} \quad (40)$$

Uwzględniając równania (30), (38) i (40), wektor przyspieszenia \bar{a}_M dany wzorem (34) zapiszemy jako

$$\begin{aligned} \bar{a}_M &= a_{Mx}\bar{i} + a_{My}\bar{j} + a_{Mz}\bar{k} = a_{Bx}\bar{i} + a_{By}\bar{j} + a_{Bz}\bar{k} + a_{MBx}\bar{i} + a_{MBy}\bar{j} + a_{MBz}\bar{k} \\ &= (a_{Bx} + a_{MBx})\bar{i} + (a_{By} + a_{MBy})\bar{j} + (a_{Bz} + a_{MBz})\bar{k} \end{aligned} \quad (41)$$

Porównując odpowiednie wyrażenia przy \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} , otrzymamy:

$$\begin{cases} a_{Mx} = a_{Bx} + a_{MBx} \\ a_{My} = a_{By} + a_{MBy} \\ a_{Mz} = a_{Bz} + a_{MBz} \end{cases} \quad (42)$$

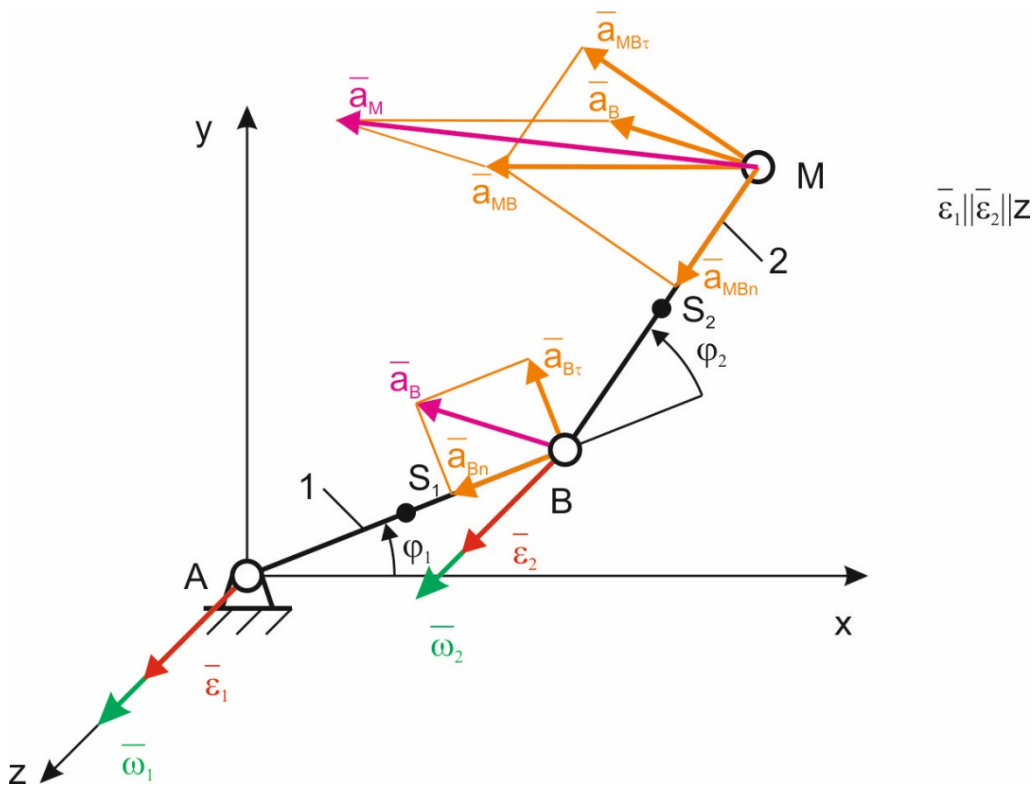
Uwzględniając wzory (32) i (39), powyższy zapiszemy jako

$$\begin{cases} a_{Mx} = -\varepsilon_1 l_1 \sin \varphi_1 - \omega_1^2 l_1 \cos \varphi_1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) l_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - (\omega_1 + \omega_2)^2 l_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \\ a_{My} = \varepsilon_1 l_1 \cos \varphi_1 - \omega_1^2 l_1 \sin \varphi_1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) l_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - (\omega_1 + \omega_2)^2 l_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ a_{Mz} = 0 \end{cases} \quad (43)$$

Podane wzory (43) to rzuty wektora przyspieszenia punktu M na poszczególne osie. Wartość wektora przyspieszenia punktu M wyznaczymy z zależności:

$$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2 + a_{Mz}^2} \quad (44)$$

Rozkład przyspieszeń analizowanych punktów przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Rozkład przyspieszeń punktów B i M manipulatora

Wektor przyspieszenia punktu S_1 określimy jako

$$\bar{a}_{S_1} = \bar{\varepsilon}_1 \times \overline{AS_1} + \bar{\omega}_1 \times \bar{v}_{S_1} = \bar{a}_{S_1\tau} + \bar{a}_{S_1n} \quad (45)$$

gdzie $\bar{a}_{S_1\tau} = \bar{\varepsilon}_1 \times \overline{AS_1}$, $\bar{a}_{S_1n} = \bar{\omega}_1 \times \bar{v}_{S_1}$. Wektor \bar{a}_{S_1} zapiszemy w postaci wyznacznikowej:

$$\bar{a}_{S_1} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ l_{c1} \cos \varphi_1 & l_{c1} \sin \varphi_1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega_1 \\ v_{S_1x} & v_{S_1y} & v_{S_1z} \end{vmatrix} \quad (46)$$

skąd otrzymamy

$$\begin{cases} a_{S_1x} = -\varepsilon_1 l_{c1} \sin \varphi_1 - \omega_1^2 l_{c1} \cos \varphi_1 \\ a_{S_1y} = \varepsilon_1 l_{c1} \cos \varphi_1 - \omega_1^2 l_{c1} \sin \varphi_1 \\ a_{S_1z} = 0 \end{cases} \quad (47)$$

Podane wzory (47) to rzuty wektora przyspieszenia punktu S_1 na poszczególne osie. Wartość wektora przyspieszenia punktu S_1 wyznaczmy z zależności:

$$a_{S_1} = \sqrt{a_{S_1x}^2 + a_{S_1y}^2 + a_{S_1z}^2} \quad (48)$$

Wektor przyspieszenia punktu S_2 określimy jako

$$\bar{a}_{S_2} = \bar{a}_B + \bar{a}_{S_2B} \quad (49)$$

gdzie

$$\bar{a}_{S_2B} = \bar{\varepsilon} \times \overline{BS_2} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{S_2B} = \bar{a}_{S_2B\tau} + \bar{a}_{S_2Bn} \quad (50)$$

gdzie $\bar{a}_{S_2B\tau} = \bar{\varepsilon} \times \overline{BS_2}$, $\bar{a}_{S_2Bn} = \bar{\omega} \times \bar{v}_{S_2B}$. Wektor \bar{a}_{S_2B} zapiszemy w postaci wyznacznikowej

$$\bar{a}_{S_2B} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ l_{c2} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & l_{c2} \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega_1 + \omega_2 \\ v_{S_2Bx} & v_{S_2By} & 0 \end{vmatrix} \quad (51)$$

skąd otrzymamy

$$\begin{cases} a_{S_2Bx} = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)l_{c2} \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - (\omega_1 + \omega_2)^2 l_{c2} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \\ a_{S_2By} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)l_{c2} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - (\omega_1 + \omega_2)^2 l_{c2} \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ a_{S_2Bz} = 0 \end{cases} \quad (52)$$

Przez analogię do rzutów wektora przyspieszenia punktu M na poszczególne osie, zapiszemy teraz rzuty wektora przyspieszenia punktu S_2 na poszczególne osie:

$$\begin{cases} a_{S_2x} = a_{Bx} + a_{S_2Bx} \\ a_{S_2y} = a_{By} + a_{S_2By} \\ a_{S_2z} = a_{Bz} + a_{S_2Bz} \end{cases} \quad (53)$$

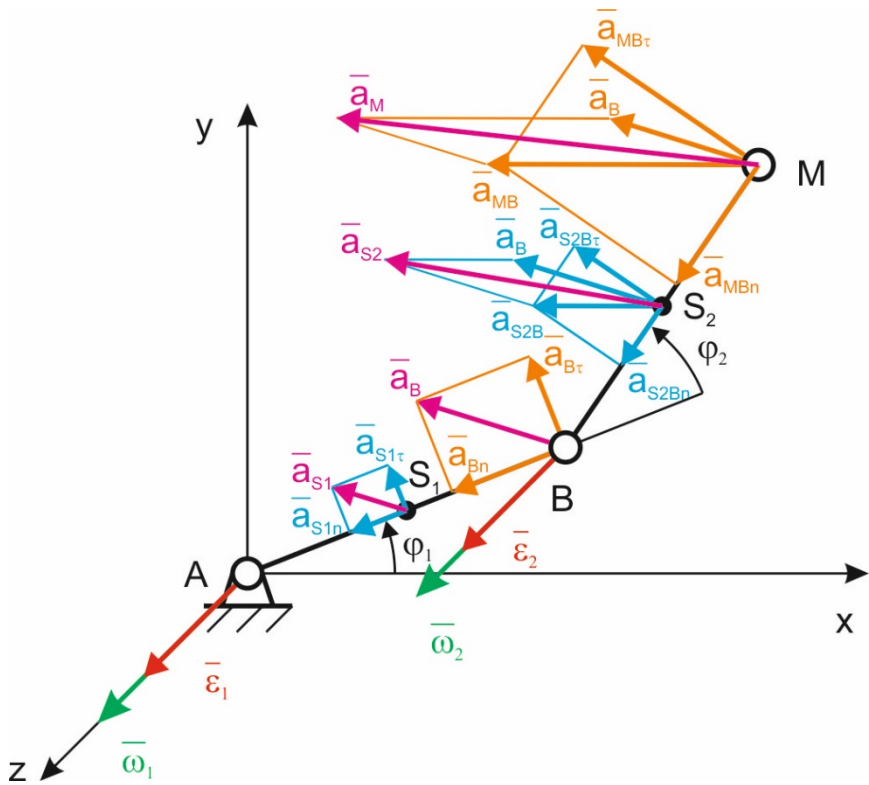
Uwzględniając wzory (32) i (52), powyższy zapiszemy jako

$$\begin{cases} a_{S_2x} = -\varepsilon_1 l_1 \sin\varphi_1 - \omega_1^2 l_1 \cos\varphi_1 \\ -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) l_{c2} \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - (\omega_1 + \omega_2)^2 l_{c2} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \\ a_{S_2y} = \varepsilon_1 l_1 \cos\varphi_1 - \omega_1^2 l_1 \sin\varphi_1 \\ +(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) l_{c2} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) - (\omega_1 + \omega_2)^2 l_{c2} \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ a_{S_2z} = 0 \end{cases} \quad (54)$$

Podane wzory (54) to rzuty wektora przyspieszenia punktu S_2 na poszczególne osie. Wartość wektora przyspieszenia punktu S wyznaczmy z zależności:

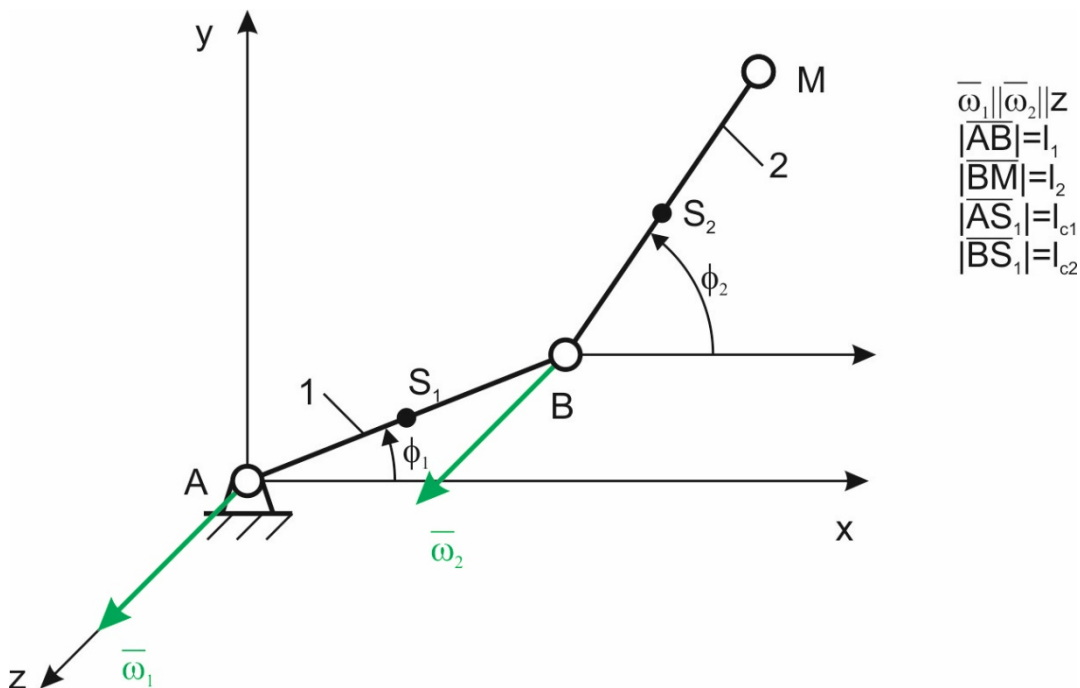
$$a_{S_2} = \sqrt{a_{S_2x}^2 + a_{S_2y}^2 + a_{S_2z}^2} \quad (55)$$

Rozkład przyspieszeń analizowanych punktów przedstawiono na rys. 5.



Rys. 5. Rozkład przyspieszeń charakterystycznych punktów manipulatora

Niekiedy wygodnie jest przyjąć inny sposób odmierzania kątów obrotu członów, np. taki jak przedstawiono na rys. 6.



Rys. 6. Schemat dwuczłonowego manipulatora płaskiego

Wówczas prędkości kątowe oraz przyspieszenia kątowe członu 2 będą rozumiane inaczej niż poprzednio, czyli:

$$\omega_1 = \dot{\phi}_1 - \text{prędkość kątowa członu 1}$$

$$\omega_2 = \dot{\phi}_2 - \text{prędkość kątowa członu 2}$$

$\bar{\varepsilon}_1 = \dot{\bar{\omega}}_1, \varepsilon_1 = \dot{\omega}_1 = \ddot{\phi}_1$ - przyspieszenie kątowe członu 1

$\bar{\varepsilon}_2 = \dot{\bar{\omega}}_2, \varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = \ddot{\phi}_2$ - przyspieszenie kątowe członu 2

Natomiast prędkości i przyspieszenia poszczególnych analizowanych punktów manipulatora będą miały postać:

$$\begin{cases} v_{Bx} = -\omega_1 l_1 \sin\phi_1 \\ v_{By} = \omega_1 l_1 \cos\phi_1 \\ v_{Bz} = 0 \end{cases} \quad (56)$$

$$\begin{cases} v_{Mx} = -\omega_1 l_1 \sin\phi_1 - \omega_2 l_2 \sin\phi_2 \\ v_{My} = \omega_1 l_1 \cos\phi_1 + \omega_2 l_2 \cos\phi_2 \\ v_{Mz} = 0 \end{cases} \quad (57)$$

$$\begin{cases} v_{S_1x} = -\omega_1 l_{c1} \sin\phi_1 \\ v_{S_1y} = \omega_1 l_{c1} \cos\phi_1 \\ v_{S_1z} = 0 \end{cases} \quad (58)$$

$$\begin{cases} v_{S_2x} = -\omega_1 l_1 \sin\phi_1 - \omega_2 l_{c2} \sin\phi_2 \\ v_{S_2y} = \omega_1 l_1 \cos\phi_1 + \omega_2 l_{c2} \cos\phi_2 \\ v_{S_2z} = 0 \end{cases} \quad (59)$$

$$\begin{cases} a_{Bx} = -\varepsilon_1 l_1 \sin\phi_1 - \omega_1^2 l_1 \cos\phi_1 \\ a_{By} = \varepsilon_1 l_1 \cos\phi_1 - \omega_1^2 l_1 \sin\phi_1 \\ a_{Bz} = 0 \end{cases} \quad (60)$$

$$\begin{cases} a_{Mx} = -\varepsilon_1 l_1 \sin\phi_1 - \omega_1^2 l_1 \cos\phi_1 - \varepsilon_2 l_2 \sin\phi_2 - \omega_2^2 l_2 \cos\phi_2 \\ a_{My} = \varepsilon_1 l_1 \cos\phi_1 - \omega_1^2 l_1 \sin\phi_1 + \varepsilon_2 l_2 \cos\phi_2 - \omega_2^2 l_2 \sin\phi_2 \\ a_{Mz} = 0 \end{cases} \quad (61)$$

$$\begin{cases} a_{S_1x} = -\varepsilon_1 l_{c1} \sin\phi_1 - \omega_1^2 l_{c1} \cos\phi_1 \\ a_{S_1y} = \varepsilon_1 l_{c1} \cos\phi_1 - \omega_1^2 l_{c1} \sin\phi_1 \\ a_{S_1z} = 0 \end{cases} \quad (62)$$

$$\begin{cases} a_{S_2x} = -\varepsilon_1 l_1 \sin\phi_1 - \omega_1^2 l_1 \cos\phi_1 - \varepsilon_2 l_{c2} \sin\phi_2 - \omega_2^2 l_{c2} \cos\phi_2 \\ a_{S_2y} = \varepsilon_1 l_1 \cos\phi_1 - \omega_1^2 l_1 \sin\phi_1 + \varepsilon_2 l_{c2} \cos\phi_2 - \omega_2^2 l_{c2} \sin\phi_2 \\ a_{S_2z} = 0 \end{cases} \quad (63)$$

Przedstawiona analiza kinematyki manipulatora zostanie zastosowana w opisie jego dynamiki w następnym rozdziale.

12.2. Kinematyka mechanizmów zębatych

Przekładnie mechaniczne to mechanizmy stosowane w budowie maszyn, których zadaniem jest przenoszenie ruchu z wału napędzającego (czynnego) na wał napędzany (bierny). Zwykle występuje wówczas zmiana wartości prędkości i momentu obrotowego.

Przekładnia zębata –to przekładnia mechaniczna, w której ruch obrotowy jednego wału jest przenoszony na drugi, w wyniku zazębienia się koła zębatego czynnego z kołem biernym. Zasadniczym elementem przekładni zębatej jest para kół zębatych, zwanych przekładnią zębatą, prostą.

Koło zębate to część mechanizmu lub maszyny, służąca do przenoszenia ruchu bez poślizgu za pomocą zębów rozmieszczonych na obwodach współpracujących kół. Elementy koła zębatego to: wieniec zębaty, piasta, łącznik, łączący piastę z wieńcem.

Przekładnie zębate są najpowszechniej stosowanymi przekładniami w budowie maszyn, ze względu na ich zalety, z których główne to:

- łatwość wykonania,
- stosunkowo małe gabaryty,
- stosunkowo cicha praca, przy odpowiednim smarowaniu,
- duża równomierność pracy,
- wysoka sprawność dochodząca do 98% (z wyjątkiem przekładni ślimakowej).

Do wad przekładni zębatych zalicza się:

- stosunkowo niskie przełożenie dla pojedynczego stopnia,
- sztywna geometria,
- brak naturalnego zabezpieczenia przed przeciążeniem.

Klasyfikacja kół zębatach ze względu na kształt wieńca

1. Koła walcowe:

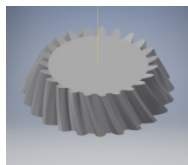
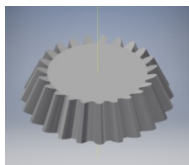
- a) o zębach prostych,
- b) o zębach skośnych,
- c) o zębach daszkowych,
- d) o zębach łukowych.



Rys. 7. Koła walcowe: a) o zębach prostych, b) o zębach skośnych

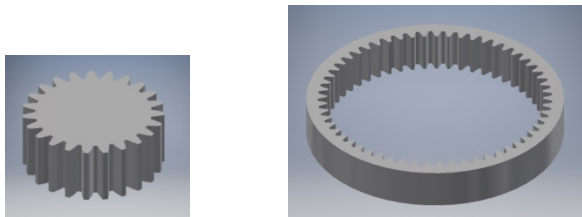
2. Koła stożkowe:

- a) o zębach prostych,
- b) o zębach skośnych,
- c) o zębach łukowych.



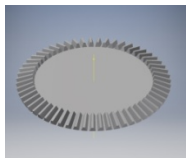
Rys. 8. Koła stożkowe: a) o zębach prostych, b) o zębach skośnych

Zarówno koła walcowe jak i stożkowe mogą mieć uzębienie zewnętrzne jak i wewnętrzne.



Rys. 9. Koła walcowe o zębach prostych: a) o uzębieniu zewnętrznym, b) o uzębieniu wewnętrznym

Szczególną postać koła walcowego stanowi zębatka prosta, którą można uważać za koło walcowe o nieskończenie dużej średnicy. Podobnie szczególną postacią koła zębatego stożkowego jest koło płaskie, które nazywamy zębatką pierścieniową lub kołem koronowym.

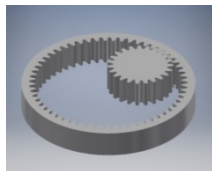
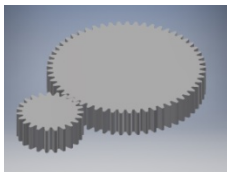


Rys. 10. Koło koronowe

Typy przekładni zębatych

Przekładnie można pogrupować ze względu na różne kryteria:

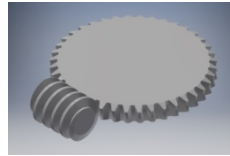
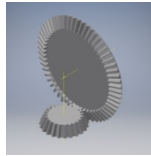
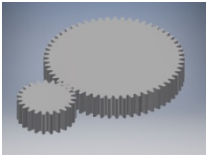
1. Ze względu na liczbę stopni:
 - a) proste (przekładnia jednostopniowa),
 - b) wielokrotne (złożone, przekładnia wielostopniowa).
2. Ze względu na umiejscowienie zazębienia:
 - a) zazębienie zewnętrzne,
 - b) zazębienie wewnętrzne.



3. Ze względu na rodzaj przenoszonego ruchu:
 - a) przekładnia obrotowa – składa się z dwóch kół zębatych,
 - b) przekładnia liniowa - koło zębate współpracuje z listwą zębatą tzw. zębatką.
4. Ze względu na wzajemne usytuowanie osi obrotu:
 - a) przekładnia czołowa - w której obie osie obrotu leżą w jednej płaszczyźnie. Takie przekładnie występują w dwóch odmianach:
 - przekładnia walcowa,
 - przekładnia stożkowa,

b) przekładnia śrubowa (zębata) - w której osie obrotu leżą w dwóch różnych płaszczyznach. Takie przekładnie występują w dwóch odmianach:

- przekładnia ślimakowa (o osiach prostopadłych),
- przekładnia hiperboloidalna (o osiach zwichrowanych).



5. Ze względu na ruchomość osi:

a) przekładnia o osiach stałych,

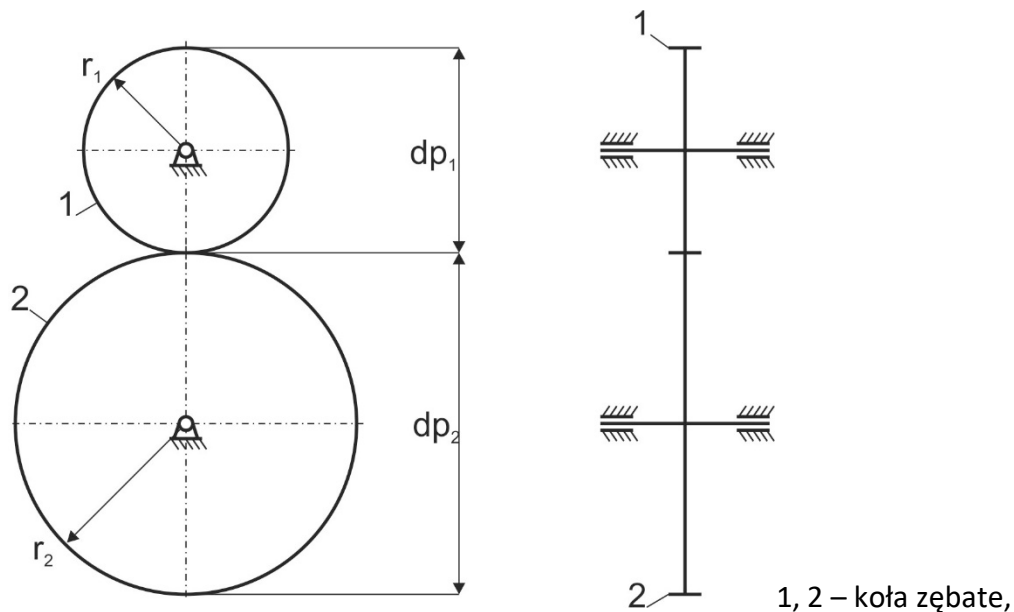
b) przekładnia obiegowa – w których osie niektórych kół, zwanych obiegowymi wykonują ruch obrotowy wokół osi kół centralnych

- przekładnia planetarna – w której przynajmniej jedno koło centralne jest nieruchome,
- przekładnia różnicowa – w której wszystkie koła centralne są ruchome.

Ze względu na specyfikę przekładni obiegowych, kolejne przykłady w tym punkcie poświęcone zostaną wyjaśnieniu zagadnień związanych z analityczną metodą opisu kinematyki tych przekładni.

W przykładzie 1 wprowadzone zostaną podstawowe pojęcia charakteryzujące przekładnię oraz opisana zostanie kinematyka przekładni o osiach stałych o zazębieniu zewnętrznym. W przykładzie 2 opisana zostanie kinematyka przekładni o osiach stałych o zazębieniu wewnętrznym. W przykładzie 3 zostanie rozważona elementarna przekładnia obiegowa, w której unieruchamiane będą kolejno poszczególne człony (koło centralne i jarzmo), co pozwoli przeanalizować elementarne ruchy, które mogą być realizowane. Następnie zostanie przeanalizowana kinematyka przekładni, w której obrót żadnego z elementów nie jest blokowany, czyli zostanie podany opis kinematyki przekładni różnicowej.

Przykład 1. Przekładnia walcowa o osiach stałych o zazębieniu zewnętrznym (rys. 7)



Rys. 7. Przekładnia walcowa o osiach stałych

Podstawowe wielkości geometryczne charakteryzujące koła zębate to: r_1 , r_2 – promienie kół, lub dp_1 , dp_2 – średnice podziałowe kół. Można je wyrazić następująco

$$\left. \begin{aligned} dp_1 &= mz_1 \\ dp_2 &= mz_2 \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

gdzie: z_1, z_2 – liczby zębów kół,
 m – moduł zębów (wielkość znormalizowana).

Z powyższych zależności wynika, że stosunek promieni, średnic podziałowych i liczby zębów jest taki sam dla zębów o takim samym module, ponieważ

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{dp_1}{dp_2} = \frac{mz_1}{mz_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad (65)$$

Założmy prędkość kątową ω_1 [rad/s] koła 1 i wyznaczmy prędkość kątową koła 2 ω_2 [rad/s], jeśli znane są promienie kół. Wiadomo, że prędkość liniowa punktu styku A kół będzie taka sama niezależnie od tego czy ten punkt przypiszemy do koła 1 czy do koła 2. Będzie ona równa

$$v_A = \omega_1 r_1 \quad \text{jeśli punkt A przypiszemy do koła 1, lub} \quad (66)$$

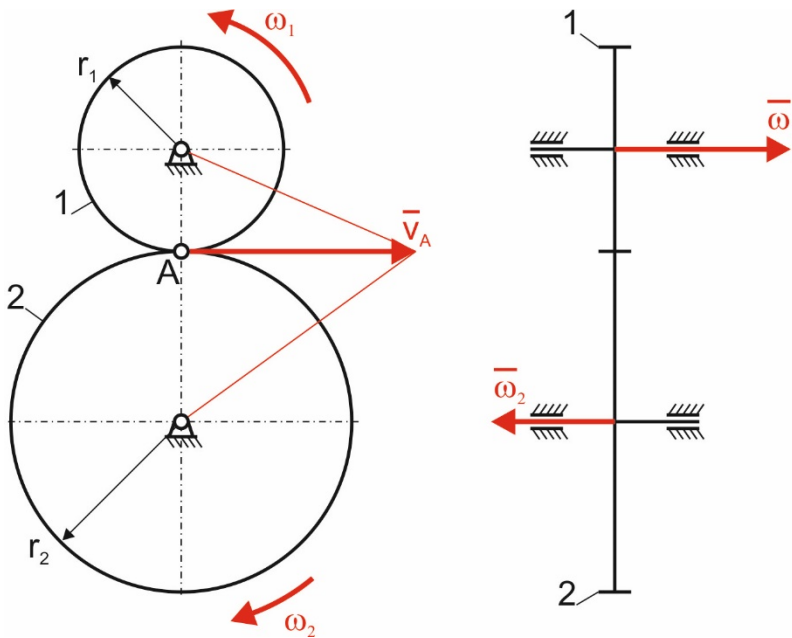
$$v_A = \omega_2 r_2 \quad \text{jeśli punkt A przypiszemy do koła 2.} \quad (67)$$

Z porównania przytoczonych wzorów wynika, że

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = i_{12} \quad (68)$$

czyli stosunek prędkości jest odwrotnie proporcjonalny do stosunku promieni. Tak określony stosunek prędkości nazywany jest przełożeniem (w tym przypadku i_{12}).

We wzorze (68) nie ma żadnej informacji o tym, czy zwroty prędkości kątowych kół 1 i 2 są zgodne czy przeciwne. Z rozkładu prędkości przedstawionego na rys. 8 wynika, że są one przeciwne.



Rys. 8. Rozkład prędkości w przekładni walcowej o osiach stałych o zazębieniu zewnętrznym

Wynika stąd potrzeba uwzględnienia znaku „-”, w zapisie analitycznym, czyli

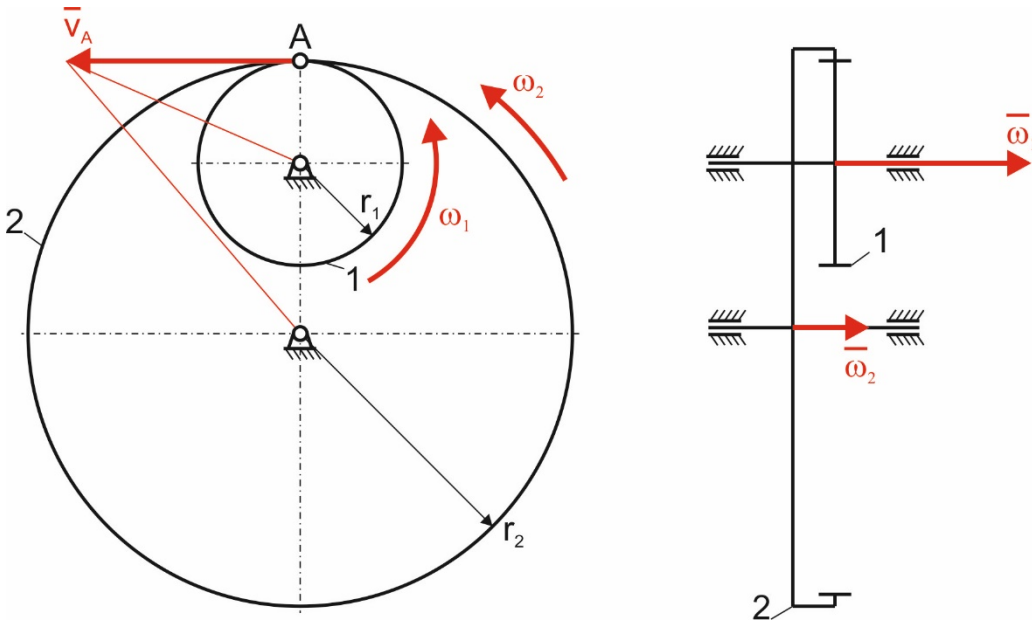
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1} = -i_{12} \quad (69)$$

Wówczas można poprawnie określić prędkość kątową koła 2

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{-i_{12}} \quad (70)$$

Przykład 2. Przekładnia walcowa o osiach stałych o zazębieniu wewnętrznym (rys. 9)

Założmy prędkość kątową ω_1 [rad/s] koła 1 i wyznaczmy prędkość kątową koła 2 ω_2 [rad/s]. Promienie kół są znane.



Rys. 9. Rozkład prędkości w przekładni walcowej o osiach stałych o zazębieniu wewnętrznym

Wiadomo, że prędkość liniowa punktu styku A kół będzie taka sama niezależnie od tego czy ten punkt przypiszemy do koła 1 czy do koła 2. Będzie ona równa

$$v_A = \omega_1 r_1 \quad \text{jeśli punkt A przypiszemy do koła 1, lub} \quad (71)$$

$$v_A = \omega_2 r_2 \quad \text{jeśli punkt A przypiszemy do koła 2.} \quad (72)$$

Z porównania przytoczonych wzorów wynika, że

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = i_{12} \quad (73)$$

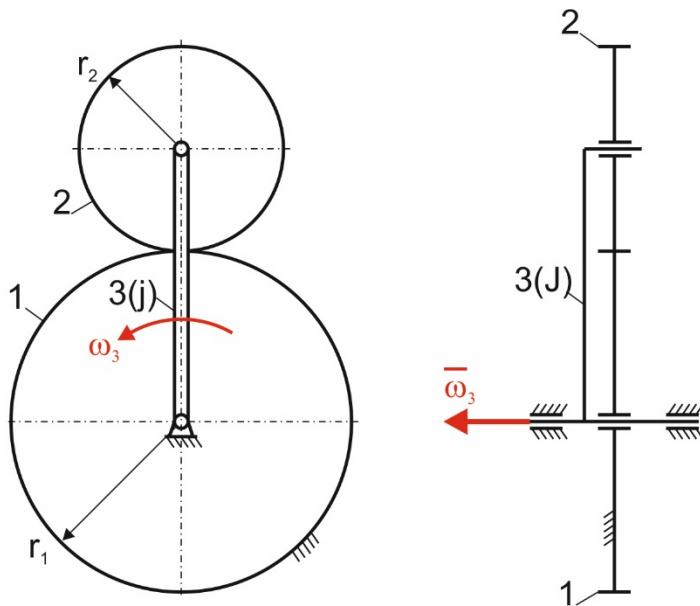
Z rozkładu prędkości przedstawionego na rys. 9 wynika, że ich zwroty (znaki) są zgodne. Można więc określić prędkość kątową koła 2 jako

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{i_{12}} \quad (74)$$

UWAGA: Z przytoczonych przykładów wynika wniosek, że w przypadku zazębienia zewnętrznego kół, należy we wzorze analitycznym uwzględnić znak „-”, przy przełożeniu (zazębienie zewnętrzne powoduje zmianę kierunku obracania się kół), natomiast w przypadku zazębienia wewnętrznego nie ma takiej potrzeby.

Przykład 3. Przekładnia obiegowa (rys. 10)

Założmy prędkość kątową ω_3 [rad/s] jarzma 3 i wyznaczmy prędkość kątową koła 2 ω_2 [rad/s], jeśli koło 1 jest unieruchomione (symbol /////). W takim przypadku mamy przekładnię obiegową planetarną. Znane są promienie kół.



Rys. 10. Przekładnia planetarna

W rozważanym przypadku oś koła 2 jest ruchoma i „obiega” oś centralną koła 1. Analizowana przekładnia nie jest przekładnią o osiach stałych, zatem przestaje obowiązywać tu poprzednia definicja przełożenia. Jest to przekładnia obiegowa, szczególny przypadek przekładni planetarnej – kiedy koło centralne jest

unieruchomione. Dla takich przekładni stosuje się tzw. wzór Willis'a, z którego można określić prędkości kątowe kół. Przyjmuje się pewien schemat myślowy, w którym zostaje unieruchomione jarzmo 3 tak, że wszystkie pozostałe elementy tej przekładni obracają się względem jarzma: - należy więc analizować prędkości względne. Dla tej przekładni wzór Willis'a będzie miał postać

$$\frac{\omega_2^J}{\omega_1} = -i_{21} \quad (75)$$

gdzie przełożenie i_{21} określa się jak dla przekładni o osiach stałych, znak „-” wynika z faktu zazębienia zewnętrznego kół 1 i 2, ω_1^J , ω_2^J - prędkości względne kół 1 i 2 względem jarzma 3 (zamiast 3 stosujemy ogólnie J). Prędkości względne to

$$\omega_1^J = \omega_1 - \omega_J \quad (76)$$

$$\omega_2^J = \omega_2 - \omega_J \quad (77)$$

Wzór Willis'a przyjmie więc postać

$$\frac{\omega_2 - \omega_J}{\omega_1 - \omega_J} = -i_{21} \quad (78)$$

a stąd znajdziemy szukaną prędkość koła 2

$$\omega_2 = -i_{21}(\omega_1 - \omega_J) + \omega_J \quad (79)$$

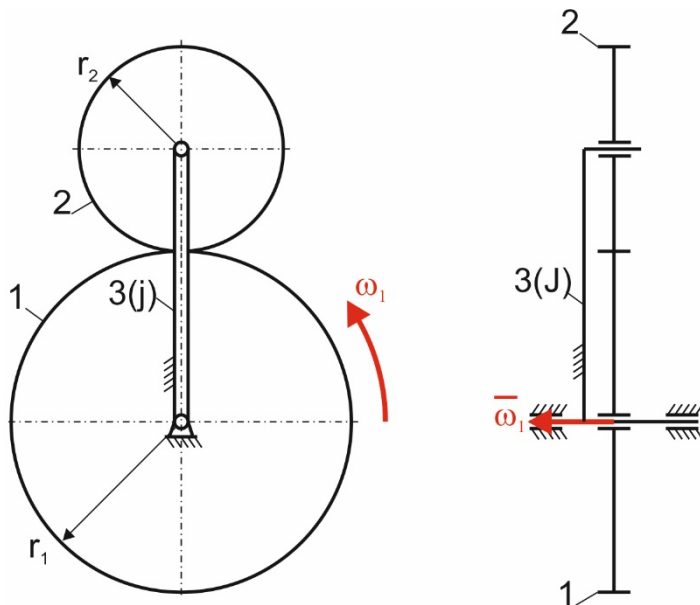
Wiadomo, że

$$\left. \begin{aligned} \omega_J &= \omega_3 \\ \omega_1 &= 0 \\ i_{21} &= \frac{r_1}{r_2} \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

co ostatecznie pozwala zapisać prędkość kątową koła 2 w następującej postaci

$$\omega_2 = \omega_3 \left(\frac{r_1}{r_2} + 1 \right) \quad (81)$$

Założmy teraz prędkość kątową ω_1 [rad/s] koła 1 i wyznaczmy prędkość kątową koła 2 ω_2 [rad/s], jeśli jazdmo 3 jest unieruchomione (symbol //) (rys. 11). Znane są promienie kół.

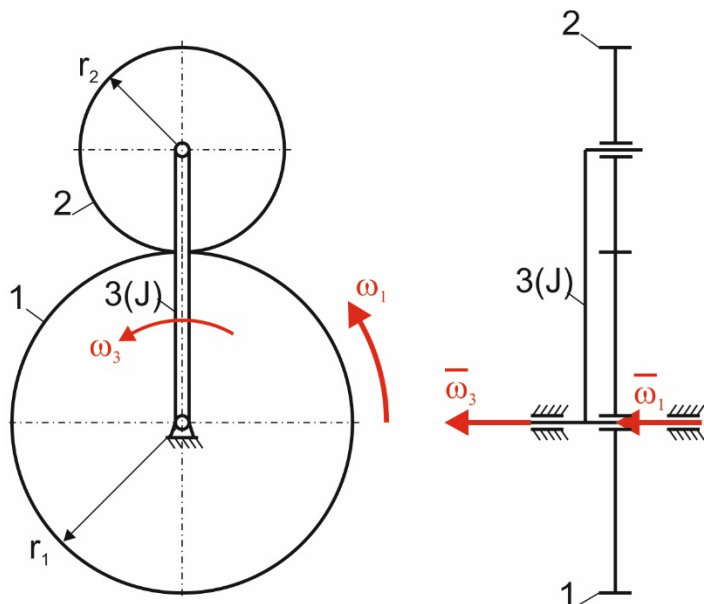


Rys. 11. Przekładnia o osiach stałych

Jest to ten sam przypadek co w przykładzie 1 – przekładnia o osiach stałych, więc zapiszemy

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{-i_{12}} = -\omega_1 \frac{r_1}{r_2} \quad (82)$$

Przeanalizujemy teraz przypadek, w którym żaden element przekładni nie będzie unieruchomiony i znane są prędkości ω_1 [rad/s] i ω_3 [rad/s]. Będzie to przekładnia obiegowa różnicowa – układ o dwóch stopniach swobody (rys. 12).



Rys. 12. Przekładnia obiegowa o dwóch stopniach swobody

Zastosujemy znany już wzór Willisa, z którego wynika, że prędkość koła 2 to

$$\omega_2 = -i_{21}(\omega_1 - \omega_J) + \omega_J \quad (83)$$

Uwzględniając, że

$$\left. \begin{aligned} \omega_J &= \omega_3 \\ i_{21} &= \frac{r_1}{r_2} \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

zapiszemy ostatecznie prędkość kątową koła 2

$$\omega_2 = -\frac{r_1}{r_2}(\omega_1 - \omega_3) + \omega_3 \quad (85)$$

Prędkość kątowa koła 2 jest liniową kombinacją prędkości kątowych koła 1 i jarzma 3.

UWAGA: Wzór Willisa można uogólnić przyjmując symboliczne prędkości kół n i k

$$\frac{\omega_n - \omega_J}{\omega_k - \omega_J} = i_{nk}(-1)^m \quad (86)$$

gdzie:

ω_n – prędkość kątowa koła n ,

ω_k – prędkość kątowa koła k ,

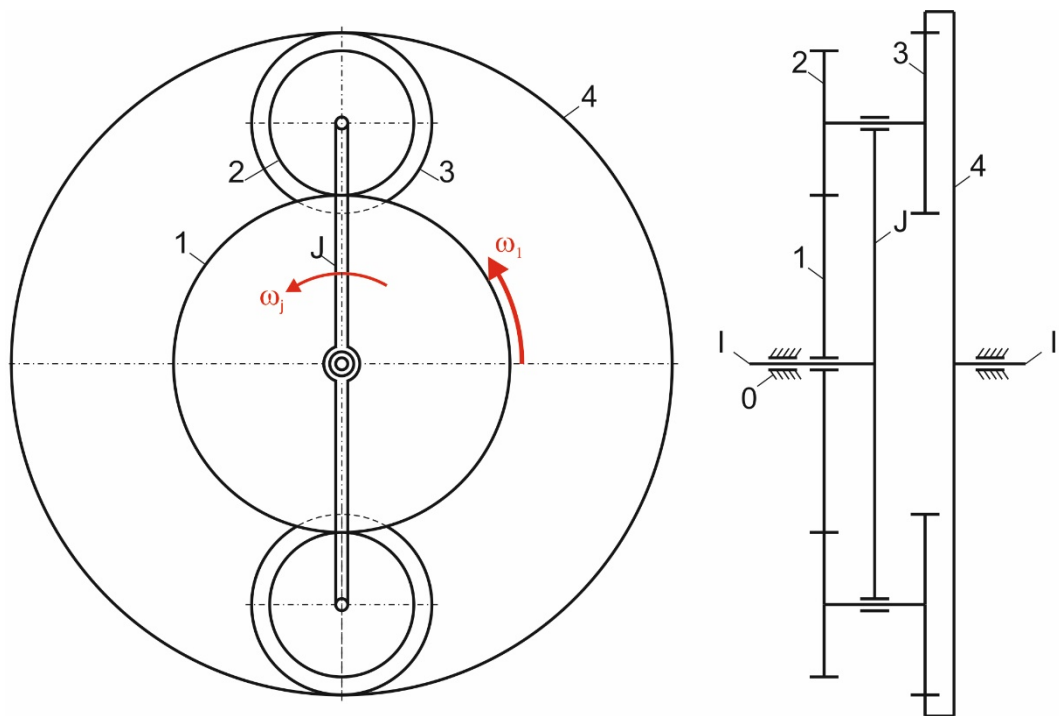
i_{nk} – przełożenie między kołami n i k ,

m – liczba zazębnień zewnętrznych pomiędzy kołami n i k .

Z zapisu wynika, że można stosować wzór dla arbitralnie wybranych kół przekładni, z pominięciem kół pośredniczących (jeśli takie występują) pomiędzy kołami n i k . We wzorze Willisa można również stosować prędkości obrotowe członów wyrażone w [obr/min]

Przykład 4. Przekładnia obiegowa o dwóch stopniach swobody (rys. 13).

Przeanalizujemy kinematykę przekładni obiegowej, której schemat pokazano na rys. 13. Wał I połączony jest z jarzmem J, w którym ułożyskowane jest koło satelitarne z podwójnym wieńcem zębatym. Koło 4 z uzębieniem wewnętrznym połączone jest z wałem II. Założmy prędkość kątową ω_I [rad/s] wału I oraz prędkość kątową ω_1 [rad/s] koła 1 i wyznaczmy prędkości kątowe pozostałych ruchomych członów przekładni. Znana jest geometria przekładni. Dane: ω_I [rad/s], ω_1 [rad/s], r_1 [m], r_2 [m], r_3 [m].



Rys. 13. Przekładnia obiegowa o dwóch stopniach swobody

W pierwszym etapie wyznaczymy ruchliwość mechanizmu, składającego się z następujących członów czynnych:

0 - ostoja,

1 – koło centralne o uzębieniu zewnętrznym,

2-3 – koło zębate satelitarne, (liczba kół satelitarnych nie wpływa na ruchliwość układu – w obliczeniach uwzględniamy tylko jedno koło satelitarne a pozostałe traktujemy jako człony bierne i nie uwzględniamy w analizie ruchliwości),

4 – koło centralne o uzębieniu wewnętrznym (razem z wałem II stanowi jeden człon),

J – jarzmo (razem z wałem I stanowi jeden człon).

Ruchliwość mechanizmu w obliczymy ze wzoru (1), w którym uwzględnimy, że

$n = 4 \{1, 2-3, 4, J\}$ – w nawiasie podano ruchome człony czynne,

$p_5 = 4 \{0-I, I-1 (2-3)-J, 0-II\}$ - w nawiasie podano pary kinematyczne klasy 5 (łożyska) tworzone przez człony czynne,

$p_4 = 2 \{1-2, 3-4\}$ – w nawiasie podano pary kinematyczne klasy 4 (zazębienia kół) tworzone przez człony czynne.

Z analizy ruchliwości wynika, że $w=2$, czyli ruch wszystkich członów może być jednoznacznie określony, jeśli podamy ruch dwóch członów, np. koła 1 i wału I.

Kolejnym etapem jest analiza kinematyczna układu, której celem jest określenie prędkości ruchomych członów układu w funkcji prędkości członów 1 i I. Korzystając z wzoru Willis'a (86) zapiszemy równanie z którego wyznaczymy prędkość kątową koła 2:

$$\frac{\omega_2 - \omega_J}{\omega_1 - \omega_J} = i_{21}(-1)^m \quad (87)$$

gdzie $i_{21} = \frac{r_1}{r_2}$, $m = 1$, $\omega_J = \omega_I$. Wyznamy prędkość kątową koła satelitarne jako

$$\omega_2 = -\frac{r_1}{r_2}(\omega_1 - \omega_I) + \omega_I \quad (88)$$

Koło satelitarne ma podwójny wieniec zębaty, czyli prędkości kół 2 i 3 są takie same, zatem możemy zapisać $\omega_2 = \omega_3 = \omega_{2-3}$. Prędkość kątową koła 4 wyznaczymy z wzoru Willisa zapisanego w postaci

$$\frac{\omega_4 - \omega_J}{\omega_1 - \omega_J} = i_{41}(-1)^m \quad (89)$$

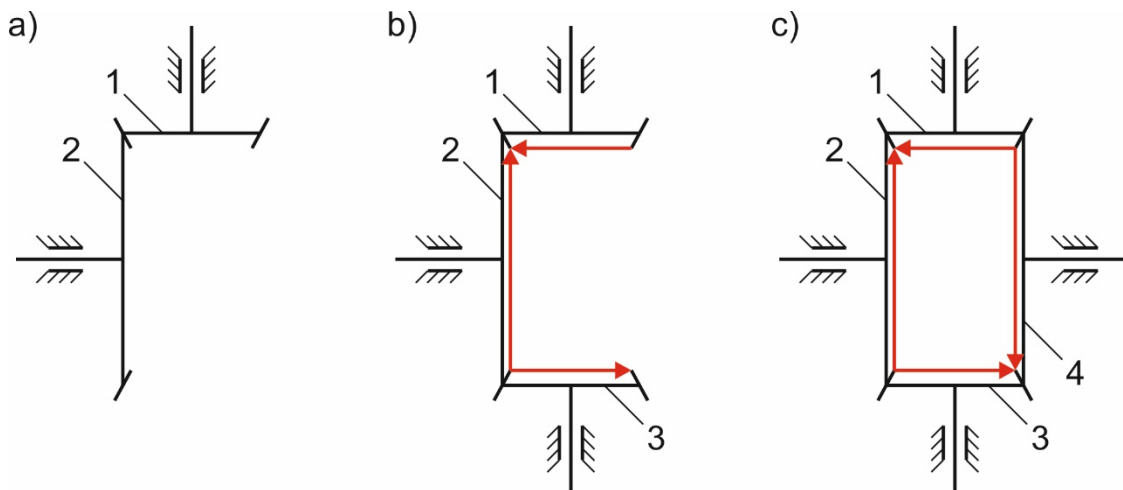
gdzie $i_{41} = i_{43}i_{21} = \frac{r_3 r_1}{r_4 r_2}$, $r_4 = r_1 + r_2 + r_3$, $m = 1$, $\omega_J = \omega_I$. Prędkość kątowa koła 4 jest równa prędkości kątowej wału II ($\omega_4 = \omega_{II}$), więc ze wzoru (89) wyznaczymy

$$\omega_{II} = \omega_4 = -\frac{r_1 r_3}{r_2(r_1 + r_2 + r_3)}(\omega_1 - \omega_I) + \omega_I \quad (90)$$

Prędkość kątowa wału II jest liniową kombinacją prędkości kątowych koła 1 i wału I.

Przykład 5. Przekładnia z kołami stożkowymi (rys. 14).

W przypadku zastosowania w przekładni kół stożkowych zachodzi przypadek, że osie obrotu kół nie są równoległe. Kąty pomiędzy osiami obrotu zazębiających się kół mogą być bardzo różne, lecz najczęściej wynoszą one 90° , jak pokazano na rys. 14.



Rys. 14. Przekładnia stożkowa o osiach stałych

Jeśli przekładnie stożkowe są przekładniami o osiach stałych, prędkości kątowe kół będziemy określać tak samo jak w przekładniach o osiach równoległych, czyli np. dla przekładni z rys. 14a zapiszemy

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = i_{21} = \frac{r_1}{r_2} \quad (91)$$

Dla przekładni z rys. 14b będzie

$$\begin{cases} \frac{\omega_2}{\omega_1} = i_{21} = \frac{r_1}{r_2} \\ \frac{\omega_3}{\omega_1} = i_{31} = i_{32}i_{21} = \frac{r_2 r_1}{r_3 r_2} = \frac{r_1}{r_3} \end{cases} \quad (92)$$

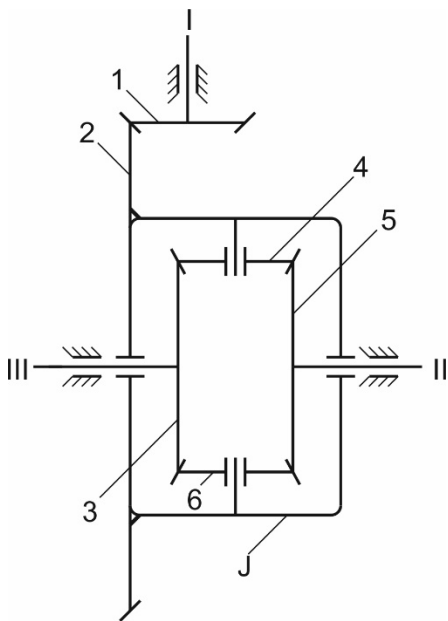
a dla przekładni z rys. 14c otrzymamy

$$\begin{cases} \frac{\omega_2}{\omega_1} = i_{21} = \frac{r_1}{r_2} \\ \frac{\omega_3}{\omega_1} = i_{31} = i_{32}i_{21} = \frac{r_2 r_1}{r_3 r_2} = \frac{r_1}{r_3} \\ \frac{\omega_4}{\omega_1} = i_{41} = i_{43}i_{32}i_{21} = \frac{r_3 r_2 r_1}{r_4 r_3 r_2} = \frac{r_1}{r_4} \end{cases} \quad (93)$$

Nie można natomiast powiedzieć, czy prędkości kół 1 i 2 są zgodne lub przeciwne, bo kierunki wektorów prędkości kątowych kół mają różne kierunki. Można natomiast określić, czy prędkości kół 1 i 3 są zgodne czy nie. Do tego celu stosuje się tzw. kod strzałkowy. Zwrotowi prędkości kątowej koła 1 przypisujemy strzałkę np. z grotem w kierunku zazębienia koła 1 z kołem 2. Wówczas zwrotowi prędkości kątowej koła 2 przypisujemy strzałkę również skierowaną grotem do zazębienia z kołem 1. Zwrotowi prędkości kątowej koła 3 przypisujemy strzałkę z grotem tak ustawionym, aby w zazębieniu kół 2 i 3 nie było grotów. Innymi słowy, strzałki powinny być skierowane „do zazębienia” lub „od zazębienia”. Na rysunku 14 widać, że strzałki przypisane kołom 1 i 3 mają przeciwne zwroty, zatem koła te obracają się w przeciwne strony. Podobnie koła 2 i 4 obracają się w przeciwne strony. Układ przedstawiony na rys. 14c, po pewnej modyfikacji będzie stanowić część układu przedstawionego w następnym przykładzie.

Przykład 6. Przekładnia obiegowa z kołami stożkowymi (rys. 15).

Przeanalizujemy kinematykę przekładni obiegowej, której schemat pokazano na rys. 15. Wał I połączony jest z kołem 1, które napędza koło talerzowe 2 połączone z jarzmem J w postaci ramki (obudowy). W jarzmie ułożyskowane są satelity (4, 6), które napędzają koła koronowe 3 i 5. Koła koronowe połączone są z wałami wyjściowymi II i III. Wszystkie koła w przedstawionej przekładni są kołami stożkowymi.



Rys. 15. Przekładnia obiegowa różnicowa

W pierwszym etapie analizy kinematyki wyznaczmy ruchliwość mechanizmu, składającego się z następujących członów czynnych:

0 - ostoja,

- 1 – koło stożkowe na wale wejściowym,
- 2 – koło stożkowe talerzowe (razem z kołem 2 stanowi jeden człon),
- 3 – koło stożkowe koronowe (razem z wałem III stanowi jeden człon),
- 4 – koło stożkowe satelitarne,
- 5 – koło stożkowe koronowe (razem z wałem II stanowi jeden człon),

Koło satelitarne 6 jest członem biernym i nie ma wpływu na kinematykę układu.

Ruchliwość mechanizmu w obliczymy ze wzoru (1), w którym uwzględnimy, że

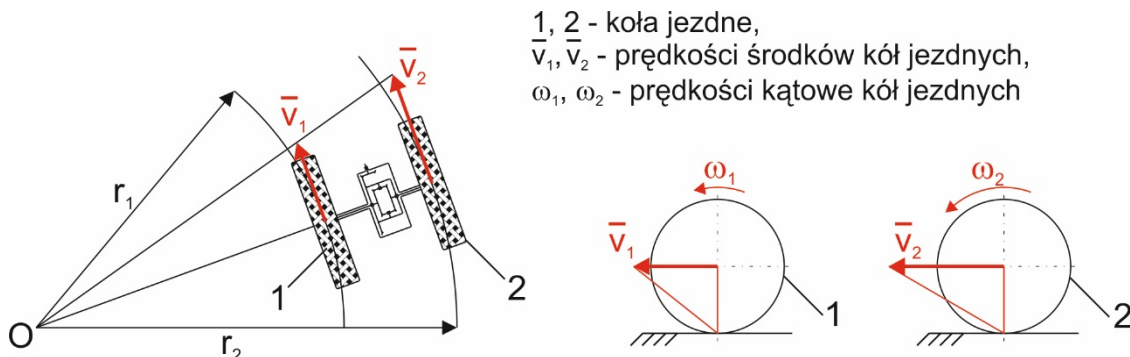
$n = 5 \{1, 2, 3, 4, 5\}$ – w nawiasie podano ruchome człony czynne,

$p_5 = 5 \{0-I, 0-II, 0-III, 2-III, J-4\}$ - w nawiasie podano pary kinematyczne klasy 5 (łożyska) tworzone przez człony czynne,

$p_4 = 3 \{1-2, 3-4, 4-5\}$ – w nawiasie podano pary kinematyczne klasy 4 (zazębienia kół) tworzone przez człony czynne.

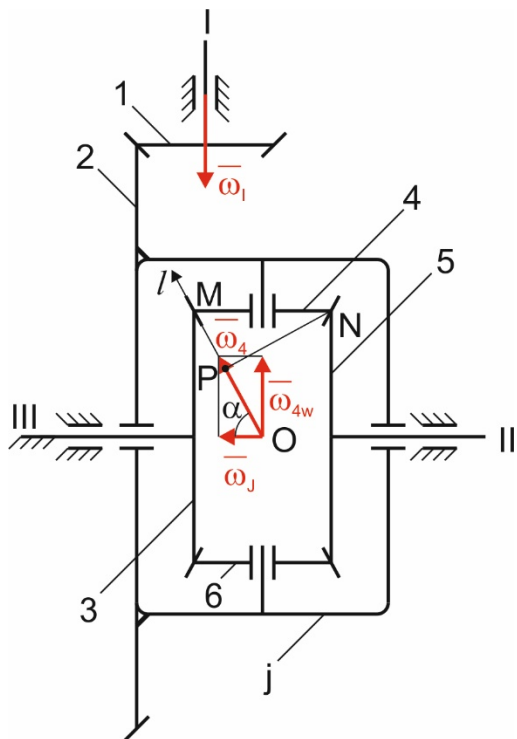
Para klasy p_5 J-II (łożysko) nie jest brane pod uwagę w analizie ruchliwości, ponieważ nie ma ona wpływu na kinematykę mechanizmu, a występuje w mechanizmie ze względów konstrukcyjnych. Z analizy ruchliwości wynika więc, że $w=2$, czyli ruch wszystkich członów może być jednoznacznie określony, jeśli podamy ruch dwóch członów. Jednak w praktyce przedstawiony mechanizm jest stosowany w układach napędowych pojazdów samochodowych, w których silnik napędza jeden człon, czyli wał I. Wały II i III to tzw. półosie, które połączone są z kołami jezdny. Omawiana przekładnia jest powszechnie nazywana mechanizmem różnicowym, którego rolą jest „rozdzielenie” napędu na obydwie napędzane koła jezdne, które podczas jazdy mogą pokonywać różną drogę lub obracać się z różnymi prędkościami kątowymi. Np. podczas

jazdy pojazdu po łuku, koło „wewnętrzne” pokonuje mniejszą drogę niż koło „zewewnętrzne”. Z kolei jeśli występuje różnica w wartościach promieni dynamicznych kół (np. ze względu na różnicę ciśnień w ogumieniu lub na niesymetryczne obciążenie pojazdu), wówczas nawet podczas ruchu po prostej prędkości kół muszą być różne pomimo tego, że droga pokonywana przez środki kół jest taka sama.



Rys. 16. Mechanizm różnicowy stosowany do napędu kół pojazdu

Ze względu na złożoność mechanizmu różnicowego, analizę kinematyki rozpoczniemy od przypadku, kiedy wał wejściowy będzie obracać się z prędkością kątową ω_1 [rad/s], natomiast wał wyjściowy III będzie unieruchomiony (rys. 17). Wówczas mechanizm będzie miał jeden stopień swobody. Załóżmy, że znana jest geometria przekładni, czyli r_1 [m], r_2 [m], $r_3=r_5$ [m], r_4 [m].



Rys. 17. Analiza kinematyki mechanizmu różnicowego z zablokowanym jednym wałem wyjściowym

Dla pary kół 1 i 2 zapiszemy

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = i_{21} = \frac{r_1}{r_2} \quad (94)$$

skąd wyznaczymy prędkość kątową koła 2 jako

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \omega_1 = \frac{r_1}{r_2} \omega_1 \quad (95)$$

gdzie uwzględniono, że $\omega_1 = \omega_I$. Jednocześnie zauważamy, że prędkość kątowna jarzma jest równa prędkości koła 2, czyli $\omega_J = \omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \omega_I$.

Koło satelitarne 4, które jest ułożyskowane w jarzmie, obraca się z prędkością kątowną $\bar{\omega}_4$, która wynika z obrotu jarzma z prędkością $\bar{\omega}_J$ oraz z obrotu własnego koła z prędkością $\bar{\omega}_{4W}$, czyli

$$\bar{\omega}_4 = \bar{\omega}_J + \bar{\omega}_{4W} \quad (96)$$

Ruch, który wykonuje koło satelitarne to ruch kulisty o środku w nieruchomym punkcie O. Innym punktem koła 4, którego chwilowa prędkość jest równa zero jest punkt styku kół 3 i 4, czyli punkt M. Punkty O i M wyznaczają oś obrotu chwilowego l , która przechodzi przez wszystkie punkty koła 4 o chwilowej prędkości równej zero (leży na tworzącej stożka, na bazie którego utworzone jest koło 4). Wektor prędkości całkowitej koła 4 $\bar{\omega}_4$ leży na osi obrotu chwilowego l . Natomiast wektor prędkości obrotu własnego koła 4 $\bar{\omega}_{4W}$ jest prostopadły do wektora prędkości jarzma $\bar{\omega}_J$. Znając geometrię układu można wyznaczyć kąt α , który określa położenie osi l , czyli

$$tg\alpha = \frac{r_3}{r_4} \quad (97)$$

Z kolei z rozkładu wektorów prędkości wynika, że

$$tg\alpha = \frac{\omega_{4W}}{\omega_J} \quad (98)$$

co pozwala na określenie prędkości obrotu własnego koła satelitarne

$$\omega_{4w} = \omega_J \operatorname{tg} \alpha = \omega_J \frac{r_3}{r_4} = \omega_I \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}. \quad (99)$$

Prędkość całkowita koła 4 to

$$\omega_4 = \sqrt{\omega_J^2 + \omega_{4w}^2} = \omega_J \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \omega_I \frac{r_1}{r_2} \sqrt{1 + \left(\frac{r_3}{r_4}\right)^2} \quad (100)$$

Można teraz określić prędkość chwilową punktu N, czyli punktu styku kół 4 i 5 jako iloczyn prędkości kąto

$$v_N = \omega_4 PN \quad (101)$$

Z geometrii układu wynika, że

$$PN = 2r_4 \sin \alpha = 2r_4 \frac{r_3}{\sqrt{r_3^2 + r_4^2}} \quad (102)$$

zatem korzystając z (100) i (102) zapiszemy (101) jako

$$v_N = \omega_I \frac{r_1}{r_2} \sqrt{1 + \left(\frac{r_3}{r_4}\right)^2} 2r_4 \frac{r_3}{\sqrt{r_3^2 + r_4^2}} = 2\omega_I \frac{r_1 r_3}{r_2} \quad (103)$$

Prędkość punktu N można zapisać również jako

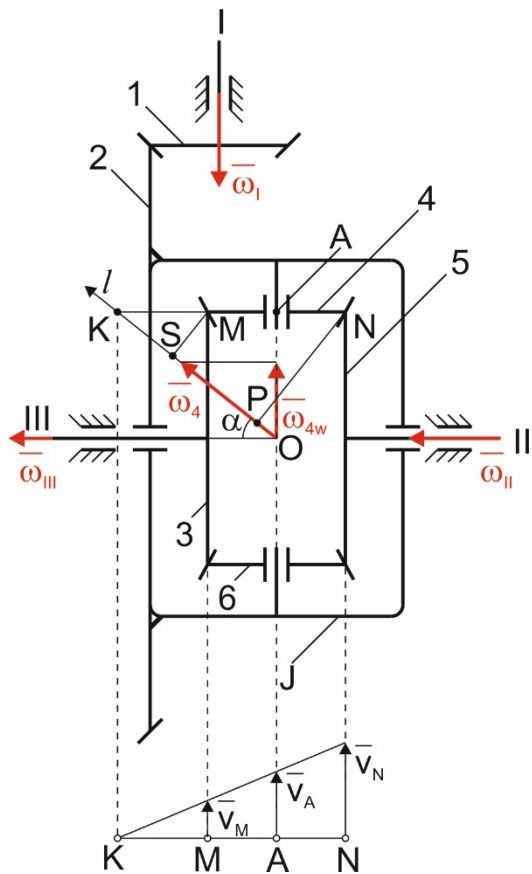
$$v_N = \omega_5 r_5 \quad (104)$$

Porównując wyrażenia (103) i (104) określimy prędkość kątową koła 5, która jest równa prędkości kątowej wału II

$$\omega_{II} = \omega_5 = 2\omega_I \frac{r_1}{r_2} \quad (105)$$

gdzie uwzględniono, że $r_5 = r_3$.

Rozpatrzmy teraz przypadek, kiedy wał wejściowy będzie obracać się z prędkością kątową ω_I [rad/s], natomiast wał wyjściowy III będzie się obracał z prędkością ω_{III} [rad/s] (rys. 18). Załóżmy, że kierunek obrotów wału III jest taki sam jak kierunek obrotów jarzma. Wyznamy teraz prędkość kątową satelity oraz wału wyjściowego II.



Rys. 18. Analiza kinematyki mechanizmu różnicowego

Prędkość kątową jarzma wyznaczymy analogicznie jak w poprzednim przykładzie, czyli

$$\omega_J = \omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \omega_I \quad (106)$$

W dalszej analizie, w celu przejrzystości rozważań, nie będziemy za prędkość kątową jarzma podstawiać zależności określonej równaniem (106), lecz pozostaniemy przy symbolu ω_J .

Koło satelitarne 4, które jest ułożyskowane w jarzmie, obraca się z prędkością kątową $\bar{\omega}_4$, która wynika z obrotu jarzma z prędkością $\bar{\omega}_J$, z obrotu własnego koła z prędkością $\bar{\omega}_{4w}$ oraz z obrotu koła 3 z prędkością $\bar{\omega}_{III}$ (prędkość koła 3 i wału III to ta sama prędkość). Koło satelitarne 4 będzie pozostawało w ruchu kulistym wokół punktu O, ale oś obrotu chwilowego koła będzie przechodziła przez punkty O i K. Na rys. 18 pokazano położenie punktu K oraz chwilowej osi obrotu / koła 4. Położenie punktu K wynika z rozkładu prędkości punktów leżących na promieniu koła 4. Z rozkładu prędkości wynika, że

$$\frac{v_M}{KM} = \frac{v_A}{KM+MA} \quad (107)$$

Prędkość punktu M, który jest punktem styku kół 3 i 4 wyznaczmy jako

$$v_M = \omega_{III} r_3 \quad (108)$$

zaś prędkość punktu A, który jest środkiem koła 4, wynika z obrotu jarzma, czyli

$$v_A = \omega_J r_3 \quad (109)$$

Korzystając z wzorów (106)-(109) określimy odległość KM

$$KM = \frac{v_M}{v_A - v_M} MA = \frac{\omega_{III}}{\omega_J - \omega_{III}} r_4 \quad (110)$$

gdzie uwzględniono, że $MA = r_4$. Znając położenie punktu K określimy teraz kąt α wyznaczający położenie osi l

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r_3}{AK} = \frac{r_3}{r_4 + KM} = \frac{r_3}{r_4 \left(1 + \frac{\omega_{III}}{\omega_J - \omega_{III}}\right)} \quad (111)$$

Prędkość kątową koła 4 można obliczyć następująco. Prędkość punktu styku kół 3 i 4 można zapisać w postaci wzoru (108) jeśli punkt M przypiszemy do koła 3 lub jako

$$v_M = \omega_4 SM \quad (112)$$

jeśli punkt M przypiszemy do koła 4, które obraca się wokół osi l . Porównując wzory (108) i (112) i uwzględniając, że $SM = KM \sin \alpha$ otrzymamy

$$\omega_4 = \omega_{III} \frac{r_3}{KM \sin \alpha} \quad (113)$$

Z geometrii układu wynika, że

$$\sin \alpha = \frac{r_3}{\sqrt{r_3^2 + (AK)^2}} \quad (114)$$

Uwzględniając (110) i (114) w równaniu (113), prędkość koła 4 wyrazimy jako

$$\omega_4 = (\omega_J - \omega_{III}) \frac{\sqrt{r_3^2 + (AK)^2}}{r_4} \quad (115)$$

gdzie $AK = r_4 + KM$. Prędkość kątowna obrotu własnego koła satelitarne go wyznaczmy z wzoru

$$\omega_{4w} = \omega_4 \sin \alpha \quad (116)$$

który po uwzględnieniu (114) i (115) będzie mieć postać

$$\omega_{4w} = (\omega_J - \omega_{III}) \frac{r_3}{r_4} \quad (117)$$

Jeśli chcemy wyznaczyć prędkość wału II, który obraca się razem z kołem 5, to wystarczy porównać prędkość punktu N przypisanego kołu 4

$$v_N = \omega_4 PN \quad (118)$$

z prędkością tego punktu jeśli przypiszemy go do koła 5

$$v_N = \omega_{II} r_5 \quad (119)$$

Porównując dwa ostatnie wyrażenia oraz uwzględniając, że

$$PN = (KM + 2r_4) \sin \alpha \quad (120)$$

zapiszemy

$$\omega_{II} = \omega_4 \frac{(KM+2r_4)\sin\alpha}{r_5} \quad (121)$$

Korzystając z wyrażeń (114), (115) i faktu, że $r_5 = r_3$, prędkość kątową wału II możemy zapisać w bardzo prostej postaci

$$\omega_{II} = 2\omega_J - \omega_{III} \quad (122)$$

Zapisując wzór (122) w innej formie

$$\omega_{II} + \omega_{III} = 2\omega_J \quad (123)$$

widzimy, że suma prędkości kątowych wałów wyjściowych z mechanizmu różnicowego równa jest dwukrotnej prędkości kątowej jarzma. Z wzoru (123) wynika również wniosek, że jeśli prędkość kątowa wału II wzrośnie (zmaleje) o pewną wartość, to prędkość kątowa wału III zmaleje (wzrośnie) o taką samą wartość. Jeśli zdarzyłoby się, że prędkość kątowa jednego z wałów jest równa prędkości kątowej jarzma, np. $\omega_{II} = \omega_J$, wówczas ze wzoru (123) wynika, że również prędkość kątowa drugiego wału jest równa prędkości kątowej jarzma, czyli $\omega_{III} = \omega_J$. Wtedy analizując wzór (117) wyciągniemy wniosek, że prędkość obrotu własnego satelity $\omega_{4W} = 0$. Reasumując możemy powiedzieć, że w przypadku, gdy wały II i III mają te same prędkości kątowe, wówczas satelity nie obracają się wokół własnej osi i mechanizm różnicowy nie pracuje.

13. Dynamika układów mechanicznych

Dynamika układów mechanicznych zajmuje się opisem ich ruchu i przyczynami, które ten ruch powodują. Jest to zagadnienie bardzo szerokie obejmujące m.in. modelowanie układów mechanicznych, analizę właściwości strukturalnych modeli matematycznych, analizę ruchu układów czy drgania mechaniczne układów. Badanie ruchu maszyny oraz zjawisk towarzyszących ruchowi może odbywać się na drodze analiz teoretycznych, symulacji komputerowych i badań obiektów rzeczywistych (badania eksperymentalne lub eksploatacyjne). Rzeczywisty stan ruchu maszyny można określić najdokładniej tylko w przypadku bezpośrednich pomiarów, jednak już w fazie projektowania konieczna jest znajomość parametrów ruchu oraz wpływu sił i rozkładu mas na zachowanie maszyny. Stosowne informacje można uzyskać badając model analityczny ruchu maszyny. Ten rozdział będzie poświęcony wybranym metodom i formalizmom służącym do modelowania dynamiki układów, takim jak:

- zasada równowagi kinetostatycznej,
- redukcja mas i sił,
- równania Lagrange'a drugiego rodzaju.

Nie są to jedyne znane formalizmy, lecz jedne z częściej stosowanych do modelowania i analizy ruchu maszyn.

13.1. Zasada równowagi kinetostatycznej

Równanie ruchu dowolnego punktu materialnego ma postać wynikającą z drugiej zasady dynamiki Newtona

$$m\bar{a}_M = \bar{P} \quad (1)$$

gdzie $\bar{P} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i$. Równanie (1) możemy zapisać w innej postaci, przenosząc wszystkie wyrazy na jedną stronę, czyli

$$\bar{P} + (-m\bar{a}_M) = 0 \quad (2)$$

Jeśli wprowadzimy następujące oznaczenia

$\bar{B} = -m\bar{a}_M$ - tzw. siła bezwładności (siła fikcyjna),

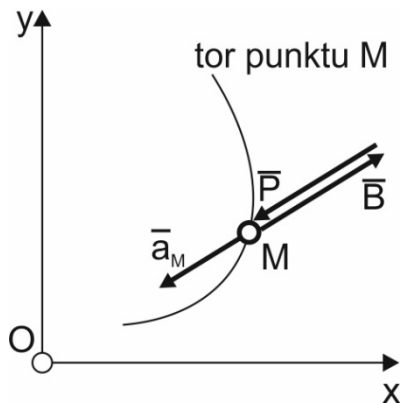
$B = ma_M$ - wartość siły bezwładności,

to równanie ruchu zapiszemy w postaci

$$\bar{P} + \bar{B} = 0 \quad (3)$$

Równanie (3) przedstawia zasadę d’Alamberta (zasadę równowagi kinetostatycznej), która mówi, że w każdej chwili suma geometryczna sił prawdziwych \bar{P} działających na punkt materialny oraz sił fikcyjnych \bar{B} jest równa zero. Zasadę tę, przedstawiającą sposób opisu ruchu punktu, można rozszerzyć na opis zjawiska ruchu bryły lub układu brył. W przypadku opisu ruchu bryły wszystkie siły bezwładności zastępujemy

wektorem głównym i momentem głównym tych sił. Wektory te wynikają z redukcji sił bezwładności do dowolnie wybranego bieguna redukcji.



Rys. 1. Zasada d'Alamberta

Wyniki redukcji w przypadku brył w ruchu postępowym, obrotowym i płaskim, są następujące (pomijamy znane z mechaniki ogólnej szczegóły dotyczące wyprowadzenia).

Ruch obrotowy bryły

Za biegun redukcji możemy przyjmować dowolny punkt, np. środek masy bryły S , lub nieruchomy punkt O leżący na osi obrotu bryły (środek obrotu bryły). W przypadku wyboru punktu S wynikiem redukcji jest wektor główny \bar{B}_S i moment główny \bar{H}_S

$$\bar{B}_S = -m\bar{a}_S \quad (4)$$

$$\bar{H}_S = -I_S\bar{\varepsilon} \quad (5)$$

a co do wartości:

$$B_S = ma_S = me\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \quad (6)$$

$$H_S = I_S\varepsilon \quad (7)$$

gdzie m – masa bryły, I_S – masowy moment bezwładności bryły względem jej środka masy, \bar{a}_S – wektor przyspieszenia środka masy bryły, $\bar{\varepsilon}$ – wektor przyspieszenia kąowego bryły, e – odległość środka masy od punktu obrotu bryły, ω – prędkość kąowa bryły.

Natomiast jeśli wybierzemy punkt O za biegun redukcji, wynikiem redukcji jest wektor główny \bar{B}_O i moment główny \bar{H}_O

$$\bar{B}_O = -m\bar{a}_S \quad (8)$$

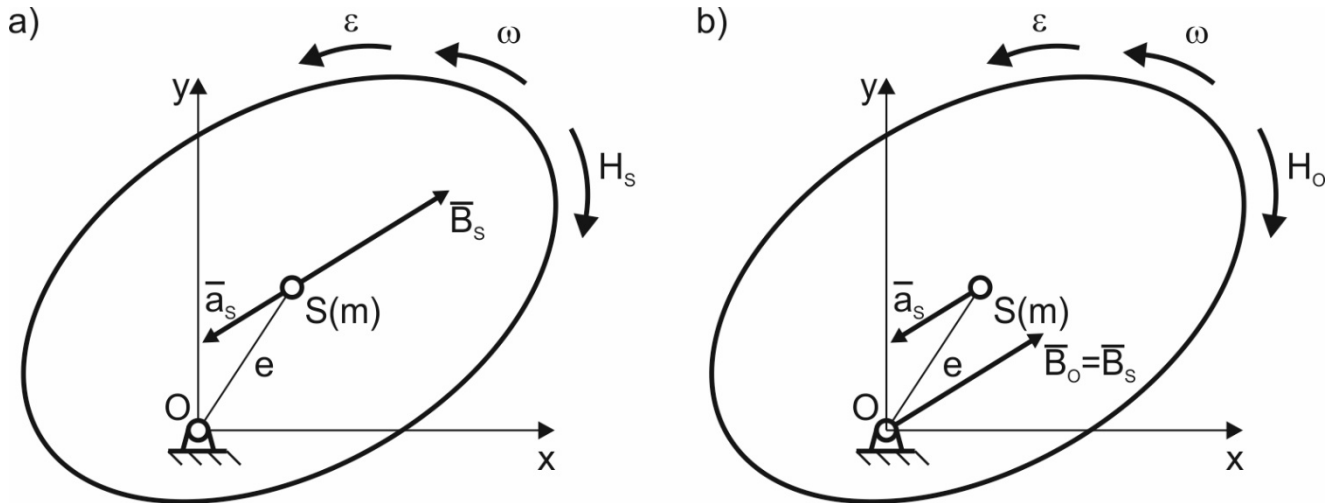
$$\bar{H}_O = -I_O\bar{\varepsilon} \quad (9)$$

a co do wartości:

$$B_O = ma_S = me\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \quad (10)$$

$$H_O = I_O\varepsilon \quad (11)$$

gdzie m – masa bryły, I_O – masowy moment bezwładności bryły względem jej osi obrotu, \bar{a}_S – wektor przyspieszenia środka masy bryły, $\bar{\varepsilon}$ – wektor przyspieszenia kąowego bryły e – odległość środka masy od punktu obrotu bryły, ω – prędkość kątowa bryły.



Rys. 2. Redukcja sił bezwładności w przypadku bryły w ruchu obrotowym: a) redukcja do środka masy (punkt S), b) redukcja do środka obrotu (punkt O)

Ruch postępowy bryły

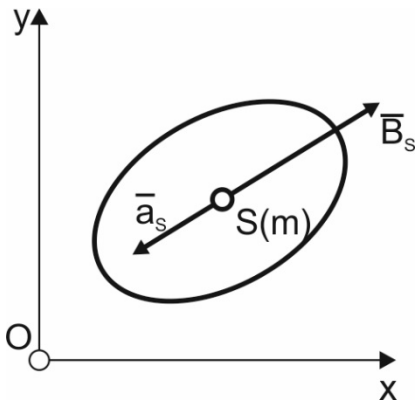
Za biegun redukcji przyjmujemy środek masy bryły S i jako wynik redukcji mamy wektor główny sił bezwładności

$$\bar{B}_S = -m\bar{a}_S \quad (12)$$

a co do wartości:

$$B_S = ma_S \quad (13)$$

gdzie m – masa bryły, \bar{a}_S – wektor przyspieszenia środka masy bryły. Ponieważ bryła jest w ruchu postępowym, to wektor momentu głównego sił bezwładności będzie $\bar{H}_S = 0$, gdyż $\bar{\varepsilon} = 0$.



Rys. 3. Redukcja sił bezwładności w przypadku bryły w ruchu postępowym

Ruch płaski bryły

Za biegun redukcji możemy przyjmować środek masy bryły S , lub chwilowy środek obrotu C bryły. Najczęściej wybiera się punkt S , wówczas wynikiem redukcji jest wektor główny \bar{B}_S i moment główny \bar{H}_S

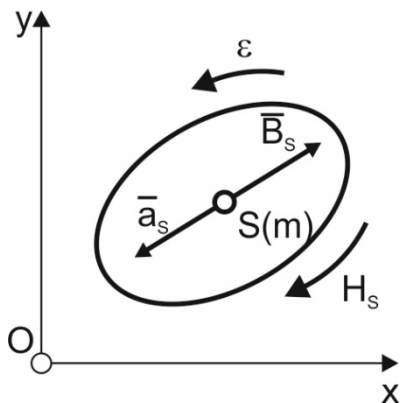
$$\bar{B}_S = -m\bar{a}_S \quad (14)$$

$$\bar{H}_S = -I_S\bar{\varepsilon} \quad (15)$$

a co do wartości:

$$B_S = ma_S \quad (16)$$

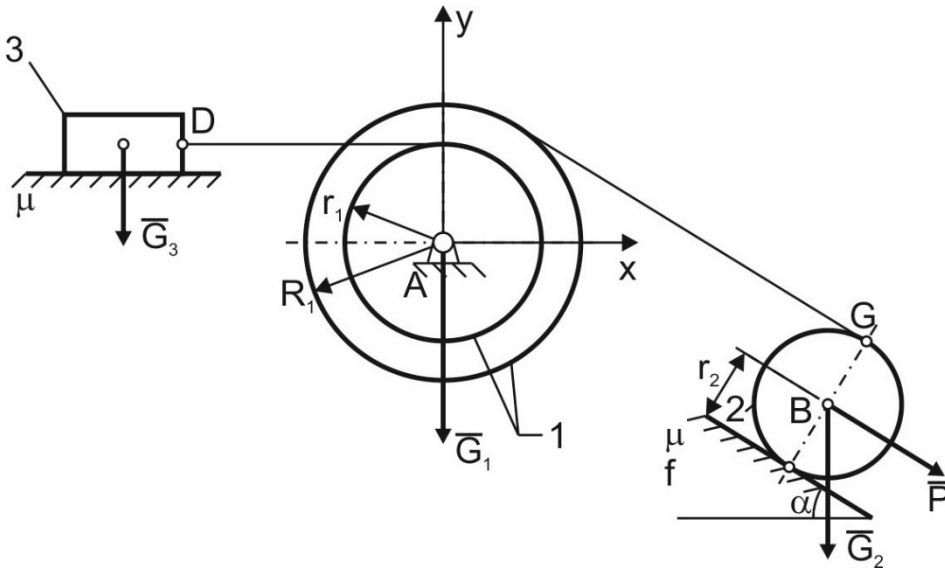
$$H_S = I_S\varepsilon \quad (17)$$



Rys. 4. Redukcja sił bezwładności w przypadku bryły w ruchu płaskim

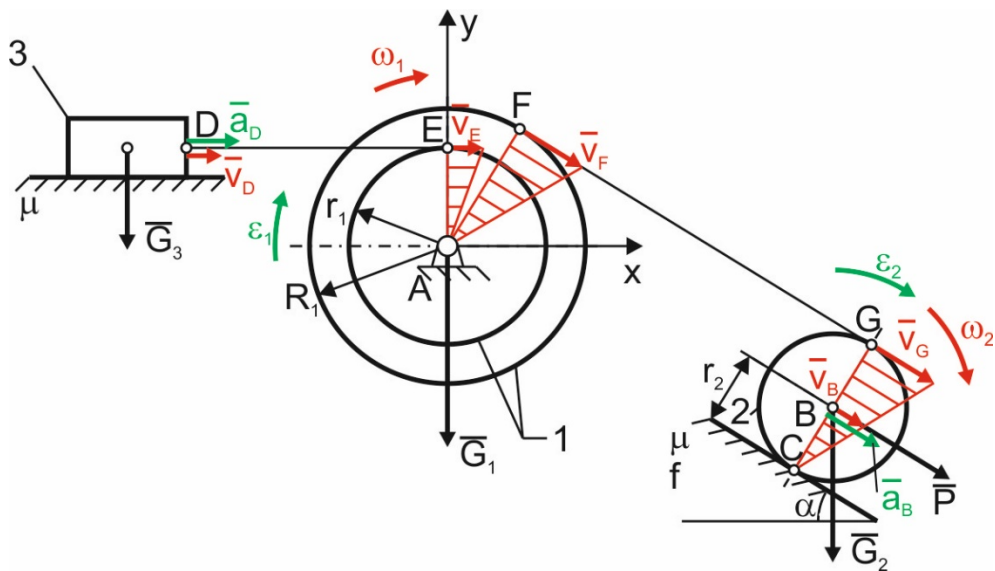
Przykład 1.

Dla układu mechanicznego pokazanego na rys .5, wyznaczyć kinematyczne parametry ruchu krążka 1 stosując zasadę równowagi kinetostaticznej. Znane są promienie krążków r_1 [m], R_1 [m], r_2 [m], promień bezwładności krążka 1 $i_A^{(1)} = r_1$ [m], współczynnik tarcia suchego μ , współczynnik tarcia toczenia f [m], kąt pochylenia równi α [rad], wartość siły P [N] oraz ciężary członów G_1 [N], G_2 [N], G_3 [N].



Rys. 5. Schemat układu mechanicznego

Pierwszym etapem rozwiązania jest analiza kinematyczna układu. Poszczególne bryły wykonują następujące ruchy: bryła 1 – ruchu obrotowy, bryła 2 – ruchu płaski, bryła 3 – ruch postępowy. Nie znamy prędkości żadnej bryły ani żadnego punktu układu, ale założmy np. prędkość kątową krążka 1.



Rys. 6. Rozkład prędkości

Z rozkładu prędkości przedstawionego na rys. 6 wynika, że wszystkie prędkości poszczególnych punktów i brył w układzie można wyrazić w funkcji prędkości ω_1 następująco:

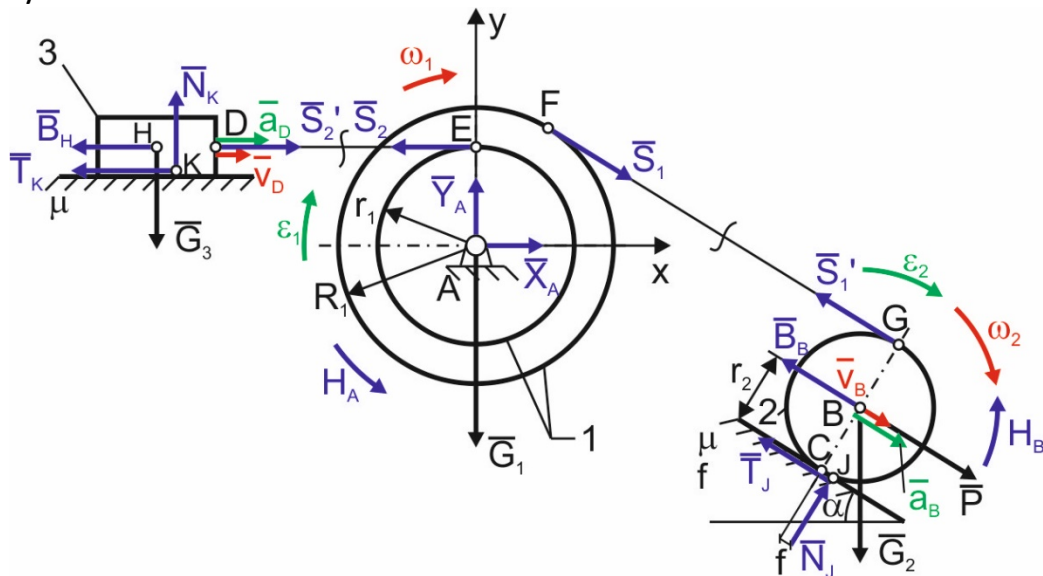
$$\begin{cases} v_D = v_E = r_1 \omega_1 \\ v_G = v_F = R_1 \omega_1 \\ v_G = 2r_2 \omega_2 \rightarrow \omega_2 = \frac{R_1}{2r_2} \omega_1 \\ v_B = \frac{1}{2} R_1 \omega_1 \end{cases} \quad (18)$$

Z kolei przyspieszenia poszczególnych punktów i brył to

$$\begin{cases} a_D = r_1 \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 = \frac{R_1}{2r_2} \varepsilon_1 \\ a_B = \frac{1}{2} R_1 \varepsilon_1 \end{cases} \quad (19)$$

gdzie $\varepsilon_1 = \dot{\omega}_1$ to przyspieszenie kątowe krążka 1.

W celu opisanego dynamiki układu przy pomocy zasady równowagi kinetostatycznej, układu się równania równowagi kinetostatycznej osobno dla każdej bryły. W tym celu najpierw wprowadza się wszystkie siły prawdziwe oraz siły fikcyjne (tzw. siły bezwładności) i twierdzi się, że są one w równowadze. Wprowadzone siły pokazano na rys. 7.



Rys. 7. Siły prawdziwe i fikcyjne działające na układ

Siły działające na układ to:

a) siły prawdziwe:

\bar{X}_A, \bar{Y}_A - siły reakcji podpory w punkcie A,
 \bar{T}_J, \bar{N}_J - siły reakcji równi w punkcie J,
 \bar{T}_K, \bar{N}_K - siły reakcji równi w punkcie K,
 $\left. \begin{array}{l} \bar{S}_1, \bar{S}'_1 \\ \bar{S}_2, \bar{S}'_2 \end{array} \right\}$ - siły reakcji lin, to siły wewnętrzne układu.

b) siły fikcyjne

Bryła 1 jest w ruchu obrotowym względem punktu A, który jest jej środkiem masy.

Redukcja sił bezwładności bryły 1 do punktu A daje

$$\bar{B}_A = -m_1 \bar{a}_A = 0 \quad (20)$$

ponieważ punkt A jest nieruchomy, oraz moment główny sił bezwładności

$$\begin{cases} \bar{H}_A = -I_A \bar{\varepsilon}_1 \\ H_A = I_A \varepsilon_1 = \frac{G_1}{g} \left(i_A^{(1)} \right)^2 \varepsilon_1 \end{cases} \quad (21)$$

Bryła 2 jest w ruchu płaskim, a punkt B to jej środek masy. Siły bezwładności działające na bryłę 2 wynoszą

$$\begin{cases} \bar{B}_B = -m_2 \bar{a}_B \\ B_B = m_2 a_B \end{cases} \quad (22)$$

Uwzględniając zależności kinematyczne, wartość tych sił to

$$B_B = \frac{1}{2} \frac{G_2}{g} R_1 \varepsilon_1 \quad (23)$$

Moment główny sił bezwładności to

$$\begin{cases} \bar{H}_B = -I_B \bar{\varepsilon}_2 \\ H_B = I_B \varepsilon_2 \end{cases} \quad (24)$$

a po uwzględnieniu zależności kinematycznych wartość tego momentu to

$$H_B = I_B \varepsilon_2 = \frac{G_2}{2g} r_2^2 \frac{R_1}{2r_2} \varepsilon_1 = \frac{G_2}{4g} r_2 R_1 \varepsilon_1 \quad (25)$$

Bryła 3 jest w ruchu postępowym z przyspieszeniem środka masy H równym $\bar{a}_H = \bar{a}_D$.

Siły bezwładności działające na bryłę to

$$\begin{cases} \bar{B}_H = -m_3 \bar{a}_H \\ B_H = m_3 a_H \end{cases} \quad (26)$$

a po uwzględnieniu zależności kinematycznych siły te mają wartość

$$\left\{ B_H = \frac{G_3}{g} r_1 \varepsilon_1 \right. \quad (27)$$

Równania równowagi kinetostatycznej bryły 1 to:

$$X_A - S_2 + S_1 \cos \alpha = 0 \quad (28)$$

$$Y_A - S_1 \sin \alpha - G_1 = 0 \quad (29)$$

$$S_1 R_1 - S_2 r_1 - H_A = 0 \quad (30)$$

Równania równowagi kinetostatycznej bryły 2:

$$P + G_2 \sin \alpha - T_J - S'_1 - B_B = 0 \quad (31)$$

$$N_J - G_2 \cos \alpha = 0 \quad (32)$$

$$T_J r_2 - N_J f - S'_1 r_2 - H_B = 0 \quad (33)$$

Równania równowagi kinetostatycznej bryły 3:

$$S'_2 - T_K - B_H = 0 \quad (34)$$

$$N_K - G_3 = 0 \quad (35)$$

Siła tarcia rozwiniętego w punkcie K to

$$T_K = \mu N_K \quad \bar{S}_1, \bar{S}'_1 \quad (36)$$

Siły reakcji lin spełniają zależności

$$S_1 = S'_1 \quad (37)$$

$$S_2 = S'_2 \quad (38)$$

Rozwiązanie równań (21) – (38) daje

$$\varepsilon_1 = \frac{\frac{1}{2}PR_1 + \frac{1}{2}G_2 \left(\sin\alpha - \cos\alpha \frac{f}{r_2} \right) R_1 - \mu G_3 r_1}{G_1 \left(i_A^{(1)} \right)^2 + \frac{3}{8}G_2 R_1^2 + G_3 r_1^2} g = \varepsilon = \text{const.} \quad (39)$$

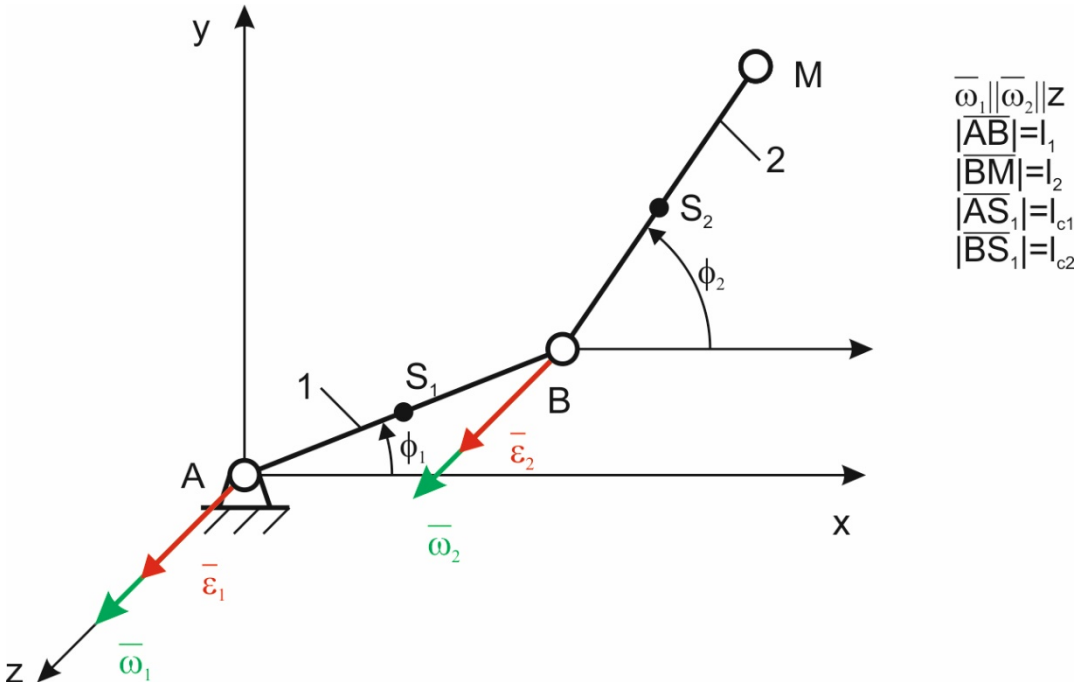
Całkując dwukrotnie powyższe równanie z zerowymi warunkami początkowymi otrzymano prędkość kątową i kąt obrotu krążka 1

$$\omega_1 = \int_0^t \varepsilon_1 dt = \varepsilon t \quad (40)$$

$$\varphi_1 = \int_0^t \omega_1 dt = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 \quad (41)$$

Przykład 2.

Dla układu mechanicznego pokazanego na rys. 8, podać równania równowagi kinetostatycznej. Znale są długości członów $|AB| = l_1$ [m], $|BM| = l_2$ [m] oraz odległości $|AS_1| = l_{c1}$ [m] $|BS_2| = l_{c2}$ [m] i ciężary członów G_1 [N], G_2 [N]. Układ porusza się w płaszczyźnie xy .



Rys. 8. Schemat manipulatora dwuczłonowego płaskiego

Kinematyka układu została omówiona szczegółowo w punkcie dotyczącym kinematyki układów. Z punktu widzenia dynamiki układu istotne jest, że:

Bryła 1 jest w ruchu obrotowym względem punktu A z prędkością kątową $\bar{\omega}_1$ i przyspieszeniem kątowym $\bar{\varepsilon}_1$, środek masy bryły jest odsunięty od osi obrotu przechodzącej przez punkt A na odległość l_{c1} . Wynika z tego, że

$$\bar{v}_{S_1} = v_{S_1x}\bar{i} + v_{S_1y}\bar{j} \quad (42)$$

gdzie

$$\begin{cases} v_{S_1x} = -\omega_1 l_{c1} \sin\phi_1 \\ v_{S_1y} = \omega_1 l_{c1} \cos\phi_1 \end{cases} \quad (43)$$

oraz

$$\bar{a}_{S_1} = a_{S_1x}\bar{i} + a_{S_1y}\bar{j} \quad (44)$$

gdzie

$$\begin{cases} a_{S_1x} = -\varepsilon_1 l_{c1} \sin\phi_1 - \omega_1^2 l_{c1} \cos\phi_1 \\ a_{S_1y} = \varepsilon_1 l_{c1} \cos\phi_1 - \omega_1^2 l_{c1} \sin\phi_1 \end{cases} \quad (45)$$

Bryła 2 jest w ruchu płaskim, który możemy traktować jako złożenie dwóch elementarnych ruchów: ruchu postępowego środka masy członu, czyli punktu S_2 , oraz ruchu obrotowego członu względem punktu S_2 . Ruch postępowy punktu S_2 zachodzi z prędkością liniową \bar{v}_{S_2} i przyspieszeniem \bar{a}_{S_2} . Ze względu na to, że ruch zachodzi w płaszczyźnie xy to

$$\bar{v}_{S_2} = v_{S_2x}\bar{i} + v_{S_2y}\bar{j} \quad (46)$$

gdzie

$$\begin{cases} v_{S_2x} = -\omega_1 l_1 \sin\phi_1 - \omega_2 l_{c2} \sin\phi_2 \\ v_{S_2y} = \omega_1 l_1 \cos\phi_1 + \omega_2 l_{c2} \cos\phi_2 \end{cases} \quad (47)$$

oraz

$$\bar{a}_{S_2} = a_{S_2x}\bar{i} + a_{S_2y}\bar{j} \quad (48)$$

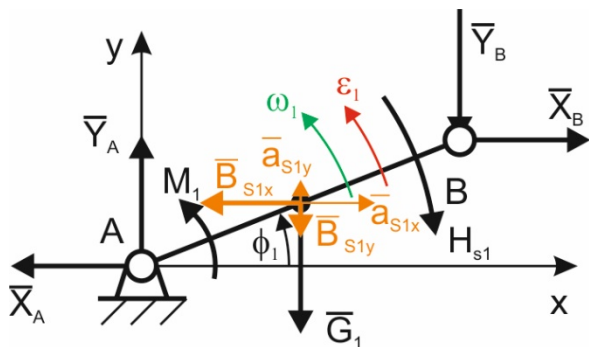
gdzie

$$\begin{cases} a_{S_2x} = -\varepsilon_1 l_1 \sin\phi_1 - \omega_1^2 l_1 \cos\phi_1 - \varepsilon_2 l_{c2} \sin\phi_2 - \omega_2^2 l_{c2} \cos\phi_2 \\ a_{S_2y} = \varepsilon_1 l_1 \cos\phi_1 - \omega_1^2 l_1 \sin\phi_1 + \varepsilon_2 l_{c2} \cos\phi_2 - \omega_2^2 l_{c2} \sin\phi_2 \end{cases} \quad (49)$$

Natomiast ruch obrotowy członu 2 względem punktu S_2 zachodzi z prędkością kątową $\bar{\omega}_2$ i przyspieszeniem kątowym $\bar{\varepsilon}_2$.

W celu opisanego dynamiki układu przy pomocy zasady równowagi kinetostatycznej, układu się równania równowagi kinetostatycznej osobno dla każdego członu. W tym celu najpierw wprowadza się wszystkie siły prawdziwe i/lub momenty sił prawdziwych oraz siły fikcyjne (tzw. siły bezwładności) i/lub momenty tych sił i twierdzi się, że są one w równowadze.

Wprowadzone siły działające na człon 1 pokazano na rys. 9.



Rys. 9. Układ sił działających na człon 1

Siły działające na człon 1 to:

a) siły prawdziwe:

\bar{X}_A, \bar{Y}_A - siły reakcji podpory w punkcie A,

\bar{X}_B, \bar{Y}_B - siły reakcji z członem 2 w punkcie B,

\bar{G}_1 - ciężar członu 1,

oraz para sił o momencie M_1 – to moment napędzający,

b) siły fikcyjne

Bryła 1 jest w ruchu obrotowym względem punktu A, natomiast środek masy jest w punkcie S_1 . Redukcja sił bezwładności bryły 1 do punktu S_1 daje moment główny sił bezwładności

$$\begin{cases} \bar{H}_{S_1} = -I_{S_1}^{(1)} \bar{\varepsilon}_1 \\ H_{S_1} = I_{S_1}^{(1)} \varepsilon_1 \end{cases} \quad (50)$$

oraz wektor główny sił bezwładności

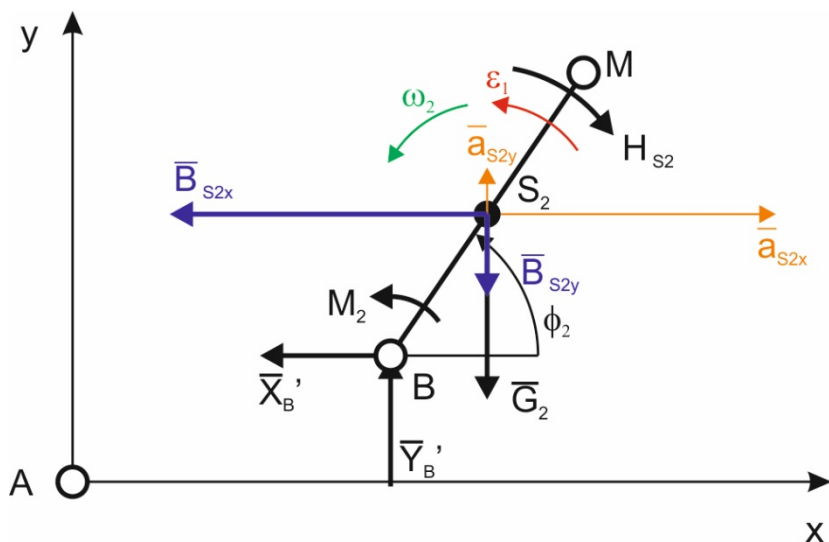
$$\bar{B}_{S_1} = -m_1 \bar{a}_{S_1} \quad (51)$$

Rzutuując równanie (51) na osie otrzymamy

$$\begin{cases} \bar{B}_{S_1x} = -m_1 \bar{a}_{S_1x} \\ B_{S_1x} = m_1 a_{S_1x} \end{cases} \quad (52)$$

$$\begin{cases} \bar{B}_{S_1y} = -m_1 \bar{a}_{S_1y} \\ B_{S_1y} = m_1 a_{S_1y} \end{cases} \quad (53)$$

Wprowadzone siły działające na człon 2 pokazano na rys. 10.



Rys. 10. Układ sił działających na człon 2

Siły działające na człon 2 to:

a) siły prawdziwe:

\bar{X}'_B, \bar{Y}'_B - siły reakcji z członem 1 w punkcie B,

\bar{G}_2 - ciężar członu 2,

oraz para sił o momencie M_2 – to moment napędzający,

b) siły fikcyjne

Bryła 2 jest w ruchu płaskim, dlatego wprowadzamy moment główny sił bezwładności

$$\begin{cases} \bar{H}_{S_2} = -I_{S_2}^{(2)} \bar{\varepsilon}_2 \\ H_{S_2} = I_{S_2}^{(2)} \varepsilon_2 \end{cases} \quad (54)$$

oraz wektor główny sił bezwładności

$$\bar{B}_{S_2} = -m_2 \bar{a}_{S_2 1} \quad (55)$$

Rzutuując równanie (55) na osie otrzymamy

$$\begin{cases} \bar{B}_{S_2 x} = -m_2 \bar{a}_{S_2 x} \\ B_{S_2 x} = m_2 a_{S_2 x} \end{cases} \quad (56)$$

$$\begin{cases} \bar{B}_{S_2 y} = -m_2 \bar{a}_{S_2 y} \\ B_{S_2 y} = m_2 a_{S_2 y} \end{cases} \quad (57)$$

Równania równowagi kinetostatycznej członu 1:

$$-X_A + X_B - B_{S_1 x} = 0 \quad (58)$$

$$Y_A - G_1 - Y_B - B_{S_1 y} = 0 \quad (59)$$

$$\begin{aligned} M_1 - X_B l_1 \sin \phi_1 - Y_B l_1 \cos \phi_1 + B_{S_1 x} l_{c1} \sin \phi_1 - B_{S_1 y} l_{c1} \cos \phi_1 + \dots \\ \dots - G_1 l_{c1} \cos \phi_1 - H_{S_1} = 0 \end{aligned} \quad (60)$$

Równania równowagi kinetostatycznej bryły 2:

$$-X'_B - B_{S_2x} = 0 \quad (61)$$

$$Y'_B - G_2 - B_{S_2y} = 0 \quad (62)$$

$$M_2 + B_{S_2x}l_{c2}\sin\phi_2 - B_{S_2y}l_{c2}\cos\phi_2 - G_2l_{c2}\cos\phi_2 - H_{S_2} = 0 \quad (63)$$

Siły reakcji w parze kinematycznej w punkcie B

$$X_B = X'_B \quad (64)$$

$$Y_B = Y'_B \quad (65)$$

Równania (61) i (62) umożliwiają określenie reakcji w parze kinematycznej w punkcie B:

$$X_B = X'_B = -B_{S_2x} \quad (66)$$

$$Y_B = Y'_B = G_2 + B_{S_2y} \quad (67)$$

gdzie uwzględniono także równania (64) i (65). Podstawiając równanie (66) do (58) oraz równanie (67) do (59) określono reakcje w parze kinematycznej w punkcie A

$$X_A = -B_{S_1x} - B_{S_2x} \quad (68)$$

$$Y_A = G_1 + G_2 + B_{S_1y} + B_{S_2y} \quad (69)$$

Reasumując tę część rozwiązania, należy stwierdzić, że reakcje w parach kinematycznych składają się z części statycznej zależnej od ciężaru członów oraz z części dynamicznej zależnej od sił bezwładności. Uwzględniając zależności (52), (53), (56) i (57), wartości sił reakcji w parach kinematycznych zapiszemy jako

$$\begin{cases} X_A = -m_1 a_{S_1x} - m_2 a_{S_2x} \\ Y_A = G_1 + G_2 + m_1 a_{S_1y} + m_2 a_{S_2y} \\ X_B = X'_B = -m_2 a_{S_2x} \\ Y_B = Y'_B = G_2 + m_2 a_{S_2y} \end{cases} \quad (70)$$

gdzie odpowiednie składowe przyspieszeń określają wzory (45) i (49), które po podstawieniu do (70) dają

$$\begin{cases} X_A = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1)(\varepsilon_1 \sin\phi_1 + \omega_1^2 \cos\phi_1) + m_2 l_{c2}(\varepsilon_2 \sin\phi_2 + \omega_2^2 \cos\phi_2) \\ Y_A = G_1 + G_2 + (m_1 l_{c1} + m_2 l_1)(\varepsilon_1 \cos\phi_1 - \omega_1^2 \sin\phi_1) + m_2 l_{c2}(\varepsilon_2 \cos\phi_2 - \omega_2^2 \sin\phi_2) \\ X_B = X'_B = m_2 l_1(\varepsilon_1 \sin\phi_1 + \omega_1^2 \cos\phi_1) + m_2 l_{c2}(\varepsilon_2 \sin\phi_2 + \omega_2^2 \cos\phi_2) \\ Y_B = Y'_B = G_2 + m_2 l_1(\varepsilon_1 \cos\phi_1 - \omega_1^2 \sin\phi_1) + m_2 l_{c2}(\varepsilon_2 \cos\phi_2 - \omega_2^2 \sin\phi_2) \end{cases} \quad (71)$$

Wróćmy teraz do równań (60) i (63).

$$M_1 - X_B l_1 \sin\phi_1 - Y_B l_1 \cos\phi_1 + B_{S_1x} l_{c1} \sin\phi_1 + \dots \\ \dots - B_{S_1y} l_{c1} \cos\phi_1 - G_1 l_{c1} \cos\phi_1 - H_{S_1} = 0$$

$$M_2 + B_{S_2x} l_{c2} \sin\phi_2 - B_{S_2y} l_{c2} \cos\phi_2 - G_2 l_{c2} \cos\phi_2 - H_{S_2} = 0$$

Jeśli wprowadzimy do nich wartości reakcji w parach kinematycznych oraz wartości sił i momentów sił bezwładności, to otrzymamy

$$\begin{cases} I_{S_1}^{(1)} \varepsilon_1 + m_2 l_1 (-a_{S_2 x} \sin \phi_1 + a_{S_2 y} \cos \phi_1) + \dots \\ + m_1 l_{c1} (-a_{S_1 x} \sin \phi_1 + a_{S_1 y} \cos \phi_1) + (G_1 l_{c1} + G_2 l_1) \cos \phi_1 = M_1 \\ I_{S_2}^{(2)} \varepsilon_2 + m_2 l_{c2} (-a_{S_2 x} \sin \phi_2 + a_{S_2 y} \cos \phi_2) + G_2 l_{c2} \cos \phi_2 = M_2 \end{cases} \quad (72)$$

a po uwzględnieniu równań kinematyki (45) i (49) otrzymamy,

$$\begin{cases} \left(I_{S_1}^{(1)} + m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 \right) \varepsilon_1 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(\phi_2 - \phi_1) \varepsilon_2 + \dots \\ \dots - m_2 l_1 l_{c2} \sin(\phi_2 - \phi_1) \omega_2^2 + (G_1 l_{c1} + G_2 l_1) \cos \phi_1 = M_1 \\ \left(I_{S_2}^{(2)} + m_2 l_{c2}^2 \right) \varepsilon_2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(\phi_2 - \phi_1) \varepsilon_1 + \dots \\ \dots + m_2 l_1 l_{c2} \sin(\phi_2 - \phi_1) \omega_1^2 + G_2 l_{c2} \cos \phi_2 = M_2 \end{cases} \quad (73)$$

Układ równań (73) zapiszemy w postaci macierzowej

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} \quad (74)$$

gdzie

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad (75)$$

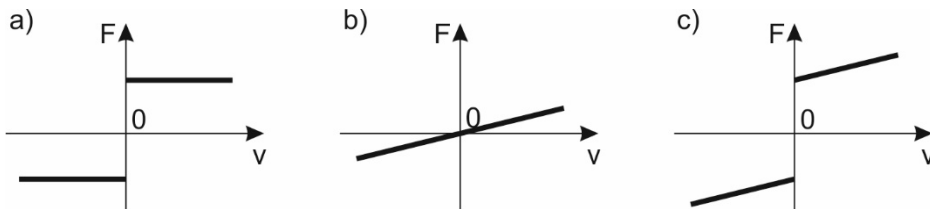
$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} I_{S_1}^{(1)} + m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 & m_2 l_1 l_{c2} \cos(\phi_2 - \phi_1) \\ m_2 l_1 l_{c2} \cos(\phi_2 - \phi_1) & I_{S_2}^{(2)} + m_2 l_{c2}^2 \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 l_{c2} \sin(\phi_2 - \phi_1) \dot{\phi}_2 \\ m_2 l_1 l_{c2} \sin(\phi_2 - \phi_1) \dot{\phi}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (77)$$

$$G(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (G_1 l_{c1} + G_2 l_1) \cos \phi_1 \\ G_2 l_{c2} \cos \phi_2 \end{bmatrix} \quad (78)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (79)$$

W układach rzeczywistych występują opory ruchu w parach kinematycznych. W przypadku manipulatorów opory te modeluje się zwykle stosując model tarcia suchego połączony z modelem tarcia wiskotycznego (płynnego). Zjawiska oporów ruchu można oczywiście ująć w równaniach równowagi kinetostatycznej. Nie zrobiono tego ze względu na klarowność przykładu. Zjawiska te wprowadzimy teraz do modelu dynamiki manipulatora.



Rys. 11. Siły tarcia w funkcji prędkości ruchu: a) tarcie suche, b) tarcie wiskotyczne, c) tarcie suche połączone z wiskotycznym

Na rys. 11 przedstawiono wybrane charakterystyki oporów ruchu, gdzie:

a) tarcie suche, wartość siły oporu zapisujemy jako

$$F = \mu N sgn(v) \quad (80)$$

gdzie μ - współczynnik tarcia suchego, N – nacisk, v - prędkość ruchu,

b) tarcie wiskotyczne, wartość siły oporu zapisujemy jako

$$F = cv \quad (81)$$

gdzie c - współczynnik tarcia wiskotycznego, v - prędkość ruchu,

c) tarcie suche i wiskotyczne, wartość siły oporu zapisujemy jako

$$F = \mu N \operatorname{sgn}(v) + cv \quad (82)$$

W modelu manipulatora należy uwzględnić momenty od sił oporów ruchu wyrażone w funkcji prędkości kątowych członów, czyli:

$$\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} f_{c1} \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_1) + f_{v1} \dot{\phi}_1 \\ f_{c2} \operatorname{sgn}(\dot{\phi}_2) + f_{v2} \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} \quad (83)$$

gdzie f_{c1} , f_{c2} – momenty sił tarcia suchego, f_{v1} , f_{v2} – zredukowane współczynniki sił tarcia wiskotycznego.

Model dynamiki manipulatora z uwzględnieniem oporów ruchu będzie miał postać

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} \quad (84)$$

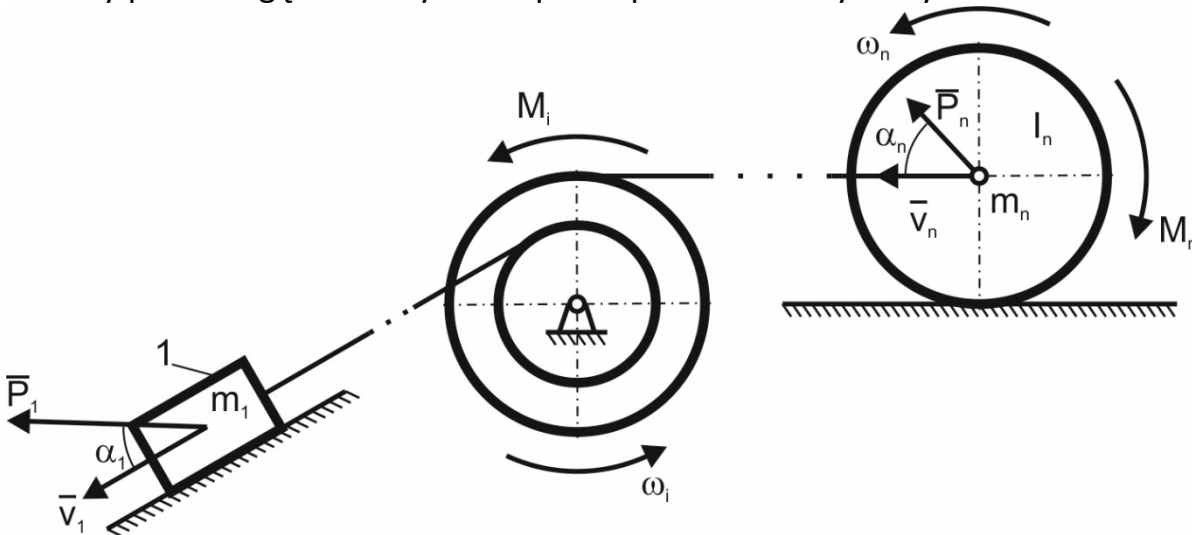
Równanie to może być zastosowane do rozwiązania zadania prostego i odwrotnego dynamiki.

13.2. Redukcja mas i sił

Podając problem modelowania przyjmijmy trzy założenia:

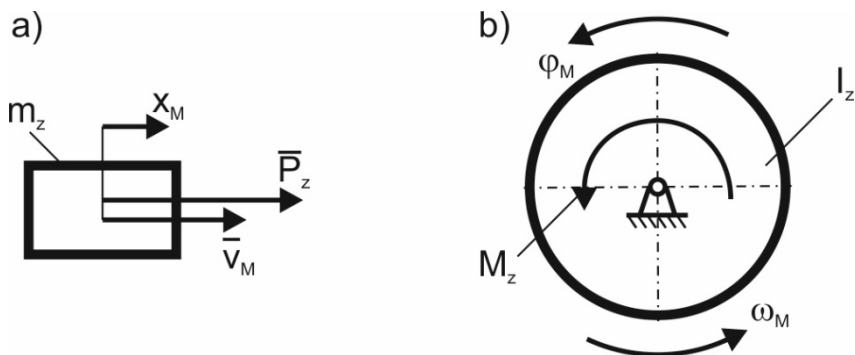
- w układach o jednym stopniu swobody (takie występują najczęściej w maszynach) ruch każdego członu jest określony względem dowolnego innego członu, możemy więc zająć się badaniem ruchu jednego członu, tzw. modelu układu,
- obciążenia przyłożone do poszczególnych członów układu zastępujemy jedną siłą lub parą sił przyłożoną do wybranego członu – dokonujemy tzw. redukcji sił,
- układ ruchomych mas układu zastępujemy jedną masą (lub masowym momentem bezwładności) przyłożoną do wybranego członu – dokonujemy tzw. redukcji mas.

Weźmy pod uwagę dowolny układ płaski przedstawiony na rys. 12.



Rys. 12. Układ płaski o jednym stopniu swobody

Dowolny układ płaski o jednym stopniu swobody może być zamodelowany jako człon w ruchu postępowym lub obrotowym (rys. 13).



Rys. 13. Model mechanizmu jako człon w ruchu: a) postępowym, b) obrotowym

Opis ruchu modelu będzie odzwierciedlał opis ruchu układu jeśli będą spełnione dwa warunki:

- równość energii kinetycznej układu rzeczywistego i modelu,
- równość mocy układu sił działających na układ rzeczywisty i model.

Na podstawie tych dwóch warunków przeprowadzimy redukcję mas i sił.

Redukcja mas

Energia kinetyczna dowolnego układu płaskiego jest dana wzorem:

$$E = \sum_{i=1}^n \left(\frac{m_i v_i^2}{2} + \frac{I_i \omega_i^2}{2} \right) \quad (85)$$

gdzie m_i – masa i -tego członu, I_i – masowy moment bezwładności i -tego członu względem jego środka masy, v_i – prędkość środka masy i -tego członu, ω_i – prędkość kątowa i -tego członu.

Energia kinetyczna modelu w ruchu postępowym to

$$E_M^{(p)} = \frac{m_z v_M^2}{2} \quad (86)$$

natomiast w ruchu obrotowym

$$E_M^{(o)} = \frac{I_z \omega_M^2}{2} \quad (87)$$

gdzie m_z – masa zredukowana układu, I_z – zredukowany masowy moment bezwładności układu, v_M – prędkość modelu w ruchu postępowym, ω_M – prędkość kątowa modelu w ruchu obrotowym.

Porównując wzory (85) i (86) oraz wzory (85) i (87) otrzymujemy zależności określające masę zastępczą (zredukowaną) oraz zastępczy (zredukowany) masowy moment bezwładności

$$E = E_M^{(p)} \rightarrow m_z = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{v_i}{v_M} \right)^2 + I_i \left(\frac{\omega_i}{\omega_M} \right)^2 \right] \quad (88)$$

$$E = E_M^{(o)} \rightarrow I_z = \sum_{i=1}^n \left[m_i \left(\frac{v_i}{\omega_M} \right)^2 + I_i \left(\frac{\omega_i}{\omega_M} \right)^2 \right] \quad (89)$$

W ten sposób przeprowadziliśmy redukcję mas układu na wybrany człon stanowiący model całego układu.

Redukcja sił

Moc układu sił działającego na dowolny układ płaski to

$$N = \sum_{i=1}^n (P_i v_i \cos \alpha_i + M_i \omega_i) \quad (90)$$

gdzie P_i – siła działająca na i-ty człon (ściśle rzecz biorąc jest to wartość wektora sumy sił działających na i-ty człon), M_i – moment sił działający na i-ty człon określony względem środka masy członu, α_i – kąt pomiędzy wektorami \vec{P}_i i \vec{v}_i . We wzorze (90) iloczynowi $M_i \omega_i$ przyporządkowujemy znak (+) jeśli zwroty momentu i prędkości kątowej są zgodne, znak (-) zaś jeśli ich zwroty są przeciwne.

Moc układu sił działającego na model w ruchu postępowym to:

$$N_M^{(p)} = P_z v_M \quad (91)$$

natomiast w ruchu obrotowym

$$N_M^{(o)} = M_Z \omega_M \quad (92)$$

gdzie P_Z – zredukowana siła działająca na model w ruchu postępowym, M_Z – zredukowany moment sił działający na model w ruchu obrotowym.

Porównując wzory (90) i (91) oraz wzory (90) i (92) otrzymujemy zależności określające siłę zastępczą (zredukowaną) oraz zastępczy (zredukowany) moment sił

$$N = N_M^{(p)} \rightarrow P_Z = \sum_{i=1}^n \left(P_i \frac{v_i}{v_M} \cos \alpha_i + M_i \frac{\omega_i}{v_M} \right) \quad (93)$$

$$N = N_M^{(o)} \rightarrow M_Z = \sum_{i=1}^n \left(P_i \frac{v_i}{\omega_M} \cos \alpha_i + M_i \frac{\omega_i}{\omega_M} \right) \quad (94)$$

W ten sposób przeprowadziliśmy redukcję sił układu na wybrany człon stanowiący model całego układu.

Modele zastępcze i równania ruchu

Wyprowadzimy teraz równanie opisujące ruch modelu przyjętego jak człon w ruchu postępowym. Z mechaniki wiemy, że przyrost energii kinetycznej jest równy pracy elementarnej układu sił

$$dE = \delta L \quad (95)$$

Rozważając ruch postępowy modelu możemy zapisać równanie

$$dE_M^{(p)} = \delta L_M^{(p)} \quad (96)$$

w którym przyrost energii kinetycznej to

$$dE_M^{(p)} = d\left(\frac{m_z v_M^2}{2}\right) \quad (97)$$

oraz praca elementarna to

$$\delta L_M^{(p)} = P_z dr_M \quad (98)$$

gdzie dr_M – elementarne przemieszczenie modelu. Równanie (96) zapiszemy teraz w postaci

$$d\left(\frac{m_z v_M^2}{2}\right) = P_z dr_M \quad (99)$$

a po przekształceniu otrzymamy

$$\frac{d}{dr_M}\left(\frac{m_z v_M^2}{2}\right) = P_z \quad (100)$$

Różniczkując lewą stronę względem przemieszczenia elementarnego zapiszemy

$$\frac{1}{2} \frac{dm_z}{dr_M} v_M^2 + m_z v_M \frac{dv_M}{dr_M} = P_z \quad (101)$$

Rozważmy wyrażenie

$$\frac{dv_M}{dr_M} = \frac{dv_M}{dr_M} \frac{dt}{dt} = \frac{dv_M}{dt} \frac{dt}{dr_M} = a_M \frac{1}{v_M} \quad (102)$$

Podstawiając (18) do (17) otrzymamy

$$\frac{1}{2} \frac{dm_z}{dr_M} v_M^2 + m_z v_M a_M \frac{1}{v_M} = P_z \quad (103)$$

i po uporządkowaniu

$$m_z a_M + \frac{1}{2} \frac{dm_z}{dr_M} v_M^2 = P_z \quad a_M = \dot{v}_M = \ddot{r}_M \quad (104)$$

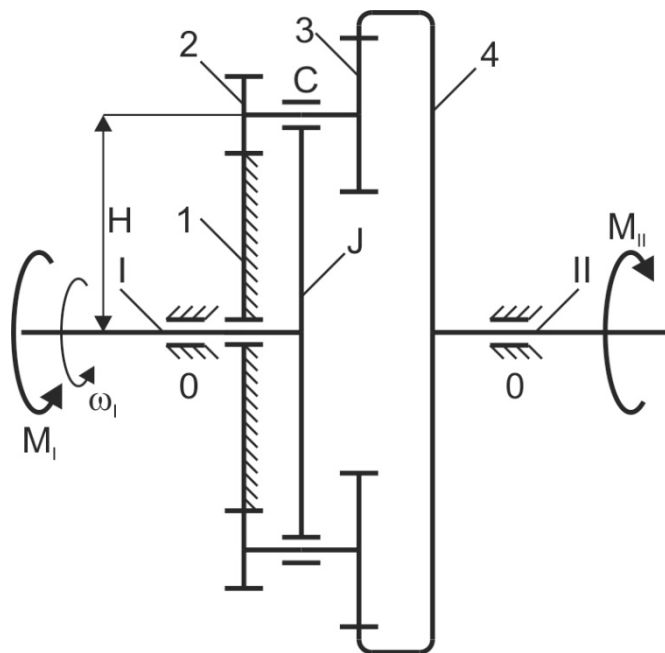
Wzór (104) to równanie ruchu postępowego członu, którym zamodelowaliśmy układ. Analogicznie można wyprowadzić równanie ruchu obrotowego członu przyjętego jako model. Zapiszemy jego końcową formę w postaci równania

$$I_z \varepsilon_M + \frac{1}{2} \frac{dI_z}{d\varphi_M} \omega_M^2 = M_z \quad \varepsilon_M = \dot{\omega}_M = \ddot{\varphi}_M \quad (105)$$

Prostota otrzymanych równań ruchu jest pozorna, ponieważ masa zastępcza oraz zastępczy masowy moment bezwładności mogą być funkcjami położenia układu. Również siła zastępcza oraz zastępczy moment sił mogą mieć złożoną postać. W istocie uzyskane równania nie różnią się od równań uzyskanych z zastosowaniem innych znanych formalizmów matematycznych np. różniczkowych równań ruchu.

Przykład 3.

W celu zilustrowania omówionej teorii rozważmy przykład układu mechanicznego w postaci przekładni obiegowej, pokazanej na rys. 14. Do wału wejściowego I połączonego z jarzmem J jest przyłożona para sił o momencie M_I . Koło satelitarne 2-3 jest ułożyskowane w jarzmie. Koło centralne 1 jest unieruchomione, natomiast ruchome koło centralne 4 połączone jest z wałem wyjściowym II. Wał wyjściowy jest obciążony momentem oporu użytecznego M_{II} . Należy przyjąć model układu i sformułować równanie ruchu modelu.



Rys. 14. Przekładnia obiegowa - planetarna

W pierwszym etapie wyznaczmy ruchliwość mechanizmu, składającego się z następujących członów:

0 - ostoja,

1 – koło centralne nieruchome,

2-3 – koło zębate satelitarne, (liczba kół satelitarnych nie wpływa na ruchliwość układu – w obliczeniach uwzględniamy tylko jedno koło satelitarne a pozostałe traktujemy jako człon bierny i nie uwzględniamy w analizie ruchliwości),

4 – koło centralne o uzębieniu wewnętrznym (razem z wałem II stanowi jeden człon),

J – jarzmo (razem z wałem I stanowi jeden człon).

Ruchliwość mechanizmu obliczymy ze wzoru

$$w = 3n - 2p_5 - p_4 = 1 \quad (106)$$

w którym uwzględniono, że

$n = 3 \{2-3, 4, J\}$ – w nawiasie podano człony ruchome,

$p_5 = 3 \{0-I, (2-3)-J, 0-II\}$ - w nawiasie podano pary kinematyczne klasy 5 (łożyska),

$p_4 = 2 \{1-2, 3-4\}$ – w nawiasie podano pary kinematyczne klasy 4 (zazębienia kół).

Z analizy ruchliwości wynika, że ruch wszystkich członów może być jednoznacznie określony, jeśli podamy ruch jednego wybranego członu.

Kolejnym etapem jest analiza kinematyczna układu, której celem jest określenie prędkości ruchomych członów układu w funkcji prędkości członu wybranego jako model. Założmy, że zamodelujemy przekładnię wałem wejściowym I, czyli przyjmujemy

model w ruchu obrotowym. Zatem powinniśmy wyznaczyć prędkość kątową oraz prędkość środka masy koła satelitarne 2-3 oraz prędkość kątową wału wyjściowego II w funkcji prędkości kątowej wału I, czyli ω_I . Korzystając z wzoru Willisa zapiszemy dwa równania opisujące związki pomiędzy prędkościami:

$$\frac{\omega_2 - \omega_J}{\omega_1 - \omega_J} = i_{21}(-1)^1 = -\frac{r_1}{r_2} \quad (107)$$

$$\frac{\omega_4 - \omega_J}{\omega_1 - \omega_J} = i_{41}(-1)^1 = -\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} \quad (108)$$

Koło 1 jest unieruchomione, więc $\omega_1 = 0$, i z równań (107) oraz (108) otrzymujemy prędkość kątową koła satelitarne oraz wału wyjściowego

$$\omega_{2-3} = \omega_2 = \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) \omega_J = \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) \omega_I \quad (109)$$

$$\omega_{II} = \omega_4 = \left(1 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right) \omega_J = \left(1 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right) \omega_I \quad (110)$$

Prędkość liniowa środka masy koła satelitarne to

$$v_{C_{2-3}} = \omega_J H = \omega_I (r_1 + r_2) \quad (111)$$

Teraz kolejno zredukujemy masy i siły na wał I. Zredukowany masowy moment bezwładności przekładni określimy wg wzoru (89) jako

$$I_Z = I_I \left(\frac{\omega_I}{\omega_I} \right)^2 + 2m_{2-3} \left(\frac{v_{C_{2-3}}}{\omega_I} \right)^2 + 2I_{2-3} \left(\frac{\omega_{2-3}}{\omega_I} \right)^2 + I_{II} \left(\frac{\omega_{II}}{\omega_I} \right)^2 \quad (112)$$

a po podstawieniu równań kinematyki otrzymamy

$$I_Z = I_I + 2m_{2-3}(r_1 + r_2)^2 + 2I_{2-3} \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right)^2 + I_{II} \left(1 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} \right)^2 \quad (113)$$

Moment zastępczy sił określony wg zależności (94) to

$$M_Z = M_I \frac{\omega_I}{\omega_I} - M_{II} \frac{\omega_{II}}{\omega_I} = M_I - M_{II} \left(1 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} \right) \quad (114)$$

W analizowanym przypadku zredukowany masowy moment bezwładności $I_Z = const.$, więc $\frac{dI_Z}{d\varphi_I} = 0$. Zatem na podstawie równania (105) zapiszemy dynamiczne równanie ruchu modelu przekładni w postaci

$$I_Z \varepsilon_I = M_Z \quad \varepsilon_I = \dot{\omega}_I = \ddot{\varphi}_I \quad (115)$$

a po uwzględnieniu zależności (113) i (114) otrzymamy

$$\begin{aligned} & \left[I_I + 2m_{2-3}(r_1 + r_2)^2 + 2I_{2-3} \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right)^2 + I_{II} \left(1 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} \right)^2 \right] \varepsilon_I = \\ & = M_I - M_{II} \left(1 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} \right) \end{aligned} \quad (116)$$

13.3. Modelowanie dynamiki układów z zastosowaniem równań Lagrange'a drugiego rodzaju

Powszechnie znanym formalizmem, często stosowanym do opisu dynamiki układów mechanicznych są równania Lagrange'a drugiego rodzaju, znane z mechaniki analitycznej. Ich podstawowa postać jest dana wzorem

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_j} = Q_j \quad (117)$$

gdzie E – energia kinetyczna układu, q_j – współrzędna uogólniona, Q_j - siła uogólniona odpowiadająca j -tej współrzędnej uogólnionej. Wydzielając z sił uogólnionych część związaną z siłami pola potencjalnego zapiszemy

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j \quad (118)$$

gdzie V to potencjał układu.

Przykład 4.

Zastosujemy teraz formalizm Lagrange'a do opisu dynamiki przekładni obiegowej rozważanej jako przykład 3 w punkcie 2.2. Energia kinetyczna przekładni to:

$$E = \frac{1}{2} I_I \omega_I^2 + 2 \left(\frac{1}{2} m_{2-3} (v_{C_{2-3}})^2 + \frac{1}{2} I_{2-3} (\omega_{2-3})^2 \right) + \frac{1}{2} I_{II} \omega_{II}^2 \quad (119)$$

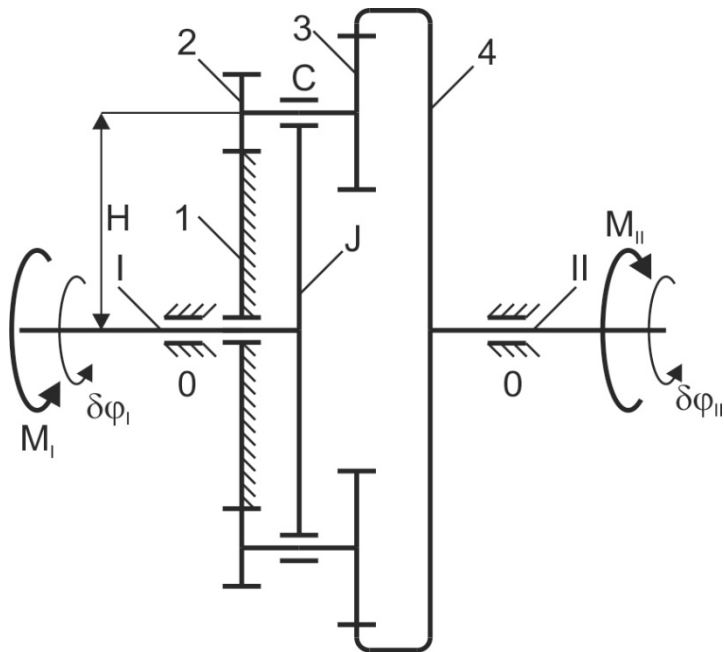
Korzystając z zależności kinematycznych (109) – (111), energię kinetyczną możemy zapisać w formie

$$E = \frac{1}{2} \left[I_I + 2m_{2-3}(r_1 + r_2)^2 + 2I_{2-3} \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right)^2 + I_{II} \left(1 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} \right)^2 \right] \dot{\phi}_I^2 \quad (120)$$

gdzie $\dot{\phi}_I = \omega_I$. Wyrażenie w nawiasie [] to zredukowany masowy moment bezwładności przekładni I_Z , dlatego energię kinetyczną można zapisać

$$E = \frac{1}{2} I_Z \dot{\phi}_I^2 \quad (121)$$

Energia potencjalna przekładni jest stała, ponieważ występujące siły pola potencjalnego ziemskiego stanowią obciążenie symetryczne względem osi obrotu. Siłę uogólnioną obliczymy stosując zasadę prac przygotowanych.



Rys. 15. Przekładnia planetarna – przemieszczenia przygotowane

Praca przygotowana siły uogólnionej $Q_I \delta \varphi_I$ jest równa pracy wykonanej przez wszystkie siły działające na przekładnię z wyłączeniem sił pola potencjalnego (są one już uwzględnione w potencjale układu). Przy założeniu braku deformacji elementów przekładni siły wewnętrzne nie wykonują pracy. Równanie określające pracę przygotowaną układu sił jest następujące:

$$Q_I \delta \varphi_I = M_I \delta \varphi_I - M_{II} \delta \varphi_{II} \quad (122)$$

Przemieszczenia przygotowane są proporcjonalne do prędkości, czyli na podstawie równania (110) zapiszemy

$$\delta\varphi_{II} = \left(1 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right) \delta\varphi_I \quad (123)$$

Uwzględniając równanie (123) w (122) otrzymamy

$$Q_I \delta\varphi_I = \left[M_I - M_{II} \left(1 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right) \right] \delta\varphi_I \quad (124)$$

Dzieląc powyższe wyrażenie przez $\delta\varphi_I$ otrzymujemy siłę uogólnioną zastępującą działanie wszystkich sił w układzie.

$$Q_I = M_I - M_{II} \left(1 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right) \quad (125)$$

Innymi słowy, jest to moment zastępczy sił zredukowany na wał I. Obliczamy teraz elementy lewej strony równania Lagrange'a

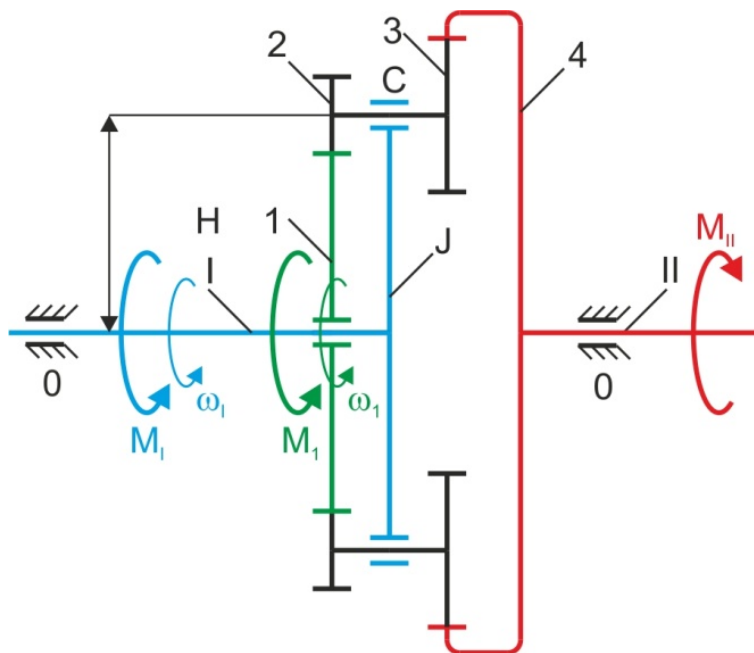
$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_I} = I_Z \dot{\varphi}_I, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_I} \right) = I_Z \ddot{\varphi}_I \\ \frac{\partial E}{\partial \varphi_I} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi_I} = 0 \end{cases} \quad (126)$$

Ostatecznie zapiszemy dynamikę przekładni w postaci następującego równania

$$I_z \ddot{\phi}_I = M_I - M_{II} \left(1 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} \right) \quad (127)$$

Przykład 5.

Rozważmy teraz dynamikę przekładni obiegowej o dwóch stopniach swobody (rys. 16). Konstrukcja przekładni jest podobna do przedstawionej w przykładach 3 i 4, przy czym obecnie założymy, że koło centralne 1 jest ruchome. Zarówno do wału wejściowego I jak i koła centralnego 1 przyłożono pary sił o momentach odpowiednio M_I i M_1 . Koło satelitarne 2-3 jest ułożyskowane w jarmie, które połączone jest z wałem wejściowym I. Wał wyjściowy II jest obciążony momentem oporu użytecznego M_{II} . Należy sformułować dynamiczne równanie ruchu przekładni.



Rys. 16. Przekładnia obiegowa

Kinematyka analizowanej przekładni została opisana w przykładzie 4 w rozdziale 2. Skorzystamy więc z uprzednio otrzymanych wyników. Prędkość kątowa koła satelitarne 2-3 to

$$\omega_{2-3} = \omega_2 = -\frac{r_1}{r_2}(\omega_1 - \omega_I) + \omega_I = -\frac{r_1}{r_2}\omega_1 + \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)\omega_I \quad (128)$$

natomiast prędkość kątowa wału II wynosi

$$\omega_{II} = \omega_4 = -\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}(\omega_1 - \omega_I) + \omega_I = -\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\omega_1 + \left(1 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)\omega_I \quad (129)$$

Gdzie dla skrócenia zapisu zastosowano $r_1 + r_2 + r_3 = r_4$. Prędkość liniowa środka masy koła satelitarne to

$$v_{C_{2-3}} = \omega_I H = \omega_I (r_1 + r_2) \quad (130)$$

Prędkości wszystkich elementów przekładni wyrażono w funkcji prędkości wału I i koła 1. W związku z tym:

ω_I, ω_1 to prędkości uogólnione
 φ_I, φ_1 to współrzędne uogólnione

W przypadku układów o liczbie stopni swobody większej niż 1, wygodnie jest zastosować do opisu dynamiki równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Skorzystamy tu

z formy równań danej wzorem (118). W tym celu najpierw określamy energię kinetyczną przekładni:

$$E = \frac{1}{2}I_I\omega_I^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + 2\left(\frac{1}{2}m_{2-3}(v_{C_{2-3}})^2 + \frac{1}{2}I_{2-3}(\omega_{2-3})^2\right) + \frac{1}{2}I_{II}\omega_{II}^2 \quad (131)$$

Korzystając z zależności kinematycznych (128) – (130), energię kinetyczną możemy zapisać w formie

$$E = \left[\frac{1}{2}I_I + m_{2-3}(r_1 + r_2)^2 + I_{2-3}\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \frac{1}{2}I_{II}\left(1 + \frac{r_1r_3}{r_2r_4}\right)^2\right]\dot{\phi}_I^2 + \left[\frac{1}{2}I_1 + I_{2-3}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \frac{1}{2}I_{II}\left(\frac{r_1r_3}{r_2r_4}\right)^2\right]\dot{\phi}_1^2 - \left[2I_{2-3}\frac{r_1}{r_2}\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) + I_{II}\frac{r_1r_3}{r_2r_4}\left(1 + \frac{r_1r_3}{r_2r_4}\right)\right]\dot{\phi}_1\dot{\phi}_I \quad (132)$$

gdzie $\dot{\phi}_I = \omega_I$, $\dot{\phi}_1 = \omega_1$. W celu uproszczenia zapisu przyjmijmy oznaczenia:

$$A = \frac{1}{2}I_I + m_{2-3}(r_1 + r_2)^2 + I_{2-3}\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \frac{1}{2}I_{II}\left(1 + \frac{r_1r_3}{r_2r_4}\right)^2 \quad (133)$$

$$B = \frac{1}{2}I_1 + I_{2-3}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \frac{1}{2}I_{II}\left(\frac{r_1r_3}{r_2r_4}\right)^2 \quad (134)$$

$$C = 2I_{2-3}\frac{r_1}{r_2}\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) + I_{II}\frac{r_1r_3}{r_2r_4}\left(1 + \frac{r_1r_3}{r_2r_4}\right) \quad (135)$$

dzięki którym możemy zapisać energię kinetyczną w następujący sposób:

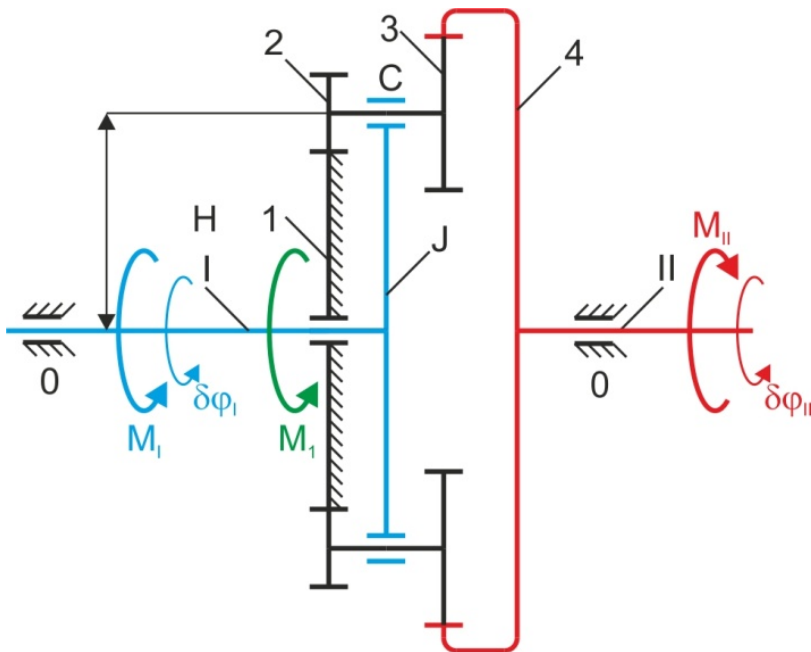
$$E = A\dot{\phi}_I^2 + B\dot{\phi}_1^2 - C\dot{\phi}_1\dot{\phi}_I \quad (136)$$

Energia kinetyczna przekładni jest funkcją prędkości kątowych wału I i koła 1, które są prędkościami uogólnionymi układu. Energia potencjalna przekładni jest stała, ponieważ występujące siły pola potencjalnego ziemskiego stanowią obciążenie symetryczne względem osi obrotu. Obliczamy teraz elementy lewej strony równania Lagrange'a

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_I} = 2A\dot{\varphi}_I - C\dot{\varphi}_1, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_I} \right) = 2A\ddot{\varphi}_I - C\ddot{\varphi}_1 \\ \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1} = 2B\dot{\varphi}_1 - C\dot{\varphi}_I, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = 2B\ddot{\varphi}_1 - C\ddot{\varphi}_I \\ \frac{\partial E}{\partial \varphi_I} = 0 & \\ \frac{\partial E}{\partial \varphi_1} = 0 & \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi_I} = 0 & \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi_1} = 0 & \end{array} \right. \quad (137)$$

Siły uogólnione obliczymy stosując zasadę prac przygotowanych. Ponieważ przekładnia ma dwa stopnie swobody, są również dwie siły uogólnione odpowiadające przemieszczeniom uogólnionym.

W celu wyznaczenia pierwszej siły uogólnionej zakładamy, że uogólnione przemieszczenie przygotowane $\delta\varphi_I \neq 0$, natomiast $\delta\varphi_1 = 0$. Odpowiada to przypadkowi, kiedy koło 1 jest unieruchomione.



Rys. 17. Przekładnia planetarna – przemieszczenia przygotowane

Praca przygotowana siły uogólnionej $Q_I \delta \varphi_I$ jest równa pracy wykonanej przez wszystkie siły działające na przekładnię z wyłączeniem sił pola potencjalnego (są one już uwzględnione w potencjale układu). Przy założeniu braku deformacji elementów przekładni siły wewnętrzne nie wykonują pracy. Równanie określające pracę przygotowaną pierwszej siły uogólnionej jest następujące:

$$Q_I \delta \varphi_I = M_I \delta \varphi_I + \underbrace{M_1 \delta \varphi_1}_0 - M_{II} \delta \varphi_{II} \quad (138)$$

Praca $M_1 \delta \varphi_1 = 0$ ponieważ $\delta \varphi_1 = 0$. Przemieszczenia przygotowane są proporcjonalne do prędkości, czyli na podstawie równania (129) zapiszemy zależność

$$\delta \varphi_{II} = -\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} \underbrace{\delta \varphi_1}_{\substack{|| \\ 0}} + \left(1 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right) \delta \varphi_I = \left(1 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right) \delta \varphi_I \quad (139)$$

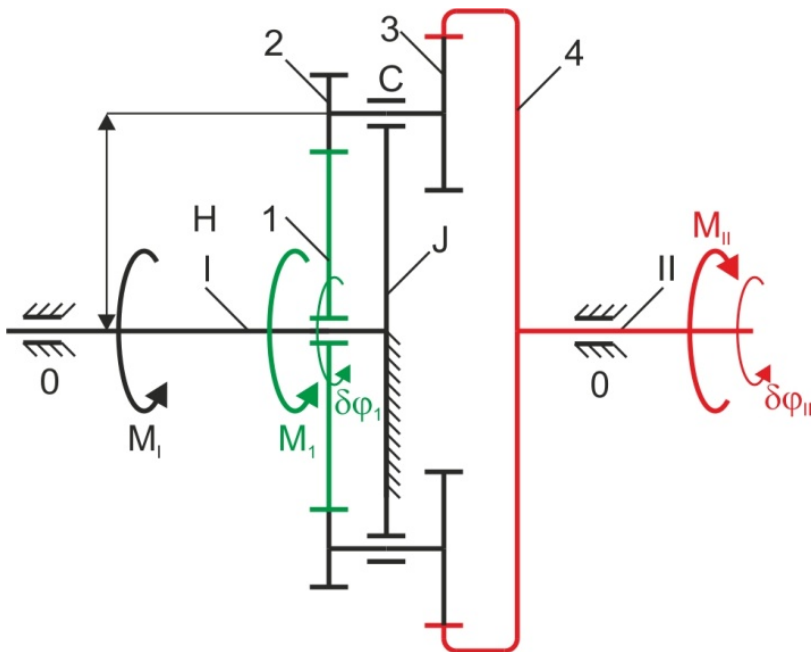
Uwzględniając równanie (139) w (138) otrzymamy

$$Q_I \delta \varphi_I = \left[M_I - M_{II} \left(1 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right) \right] \delta \varphi_I \quad (140)$$

Dzieląc powyższe wyrażenie przez $\delta \varphi_I$ otrzymujemy pierwszą siłę uogólnioną:

$$Q_I = M_I - M_{II} \left(1 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right) \quad (141)$$

W celu wyznaczenia drugiej siły uogólnionej zakładamy, że uogólnione przemieszczenie przygotowane $\delta \varphi_I = 0$, natomiast $\delta \varphi_1 \neq 0$. Odpowiada to przypadkowi, kiedy wał I wraz z jazdkiem jest unieruchomiony.



Rys. 18. Przekładnia planetarna – przemieszczenia przygotowane

Równanie określające pracę przygotowaną drugiej siły uogólnionej jest następujące:

$$Q_1 \delta \varphi_1 = \underbrace{M_I \delta \varphi_I}_0 + M_1 \delta \varphi_1 - M_{II} \delta \varphi_{II} \quad (142)$$

Praca $M_I \delta \varphi_I = 0$ ponieważ $\delta \varphi_I = 0$. Przemieszczenia przygotowane są proporcjonalne do prędkości, czyli na podstawie równania (129) zapiszemy zależność

$$\delta\varphi_{II} = -\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} \delta\varphi_1 + \left(1 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right) \underbrace{\delta\varphi_I}_{\substack{\parallel \\ 0}} = -\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} \delta\varphi_1 \quad (143)$$

Uwzględniając równanie (143) w (143) otrzymamy

$$Q_1 \delta\varphi_1 = \left(M_1 + M_{II} \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right) \delta\varphi_1 \quad (144)$$

Dzieląc powyższe wyrażenie przez $\delta\varphi_1$ otrzymujemy drugą siłę uogólnioną:

$$Q_1 = M_1 + M_{II} \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} \quad (145)$$

Ostatecznie, bazując na równaniu (118), można zapisać dynamiczne równania ruchu przekładni w postaci:

$$\begin{cases} 2A\ddot{\varphi}_I - C\ddot{\varphi}_1 = M_I - M_{II} \left(1 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right) \\ 2B\ddot{\varphi}_1 - C\ddot{\varphi}_I = M_1 + M_{II} \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} \end{cases} \quad (146)$$

Jeśli założymy, że moment oporu M_{II} nie zależy od współrzędnych lub prędkości uogólnionych, to można przedstawić rozwiązanie układu równań (146) w następującej postaci

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_I = \frac{2B\left[M_I - M_{II}\left(1 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)\right] + C\left[M_1 + M_{II}\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right]}{4AB - C^2} = \frac{2BM_I + CM_1 + \left[C\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} - 2B\left(1 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)\right]M_{II}}{4AB - C^2} \\ \ddot{\varphi}_1 = \frac{2A\left[M_1 + M_{II}\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right] + C\left[M_I - M_{II}\left(1 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)\right]}{4AB - C^2} = \frac{2AM_1 + CM_I + \left[2A\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} - C\left(1 + \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\right)\right]M_{II}}{4AB - C^2} \end{cases} \quad (147)$$

Z przykładów zaprezentowanych w tym rozdziale wynika, że każdy z omówionych formalizmów pozwala na sformułowanie dynamicznego równania ruchu układu. Nie wszystkie metody pozwalają natomiast na sformułowanie równań umożliwiających obliczenie reakcji w parach kinematycznych. Zatem formalizm matematyczny należy dobrać do zagadnienia, które jest rozważane. Jeśli interesująca jest znajomość reakcji w parach kinematycznych, np. ze względu na konieczność wyznaczenia obciążeń i dobór łożysk w parach, wówczas należy zastosować np. równania równowagi kinetostatycznej. Jeśli natomiast zachodzi potrzeba opisu ruchu układu, wówczas wystarczy zastosować metodę modelowania zastępczego lub równania Lagrange'a drugiego rodzaju.

14. Tarcie w parach kinematycznych

W uproszczonej analizie sił w parach kinematycznych układów mechanicznych często pomija się opory ruchu wynikające z sił tarcia i zakłada się idealne warunki współpracy par członów. Tarcie występuje jednak w wielu układach mechanicznych, np. w łożyskach tocznych i ślizgowych, przekładniach, zaworach, maszynach tłokowych hamulcach itp. Często siły tarcia są na tyle duże, że w znaczący sposób wpływają na siły reakcji w parach, tzn. mogą powodować zmianę wartości i kierunków działających sił.

Poza tym zjawisko tarcia powoduje powstanie oporów ruchu. W celu ich szczegółowej analizy konieczna jest znajomość m.in. takich zagadnień jak:

- deformacje sprężyste,
- deformacje plastyczne,
- mechanika płynów,
- materiałoznawstwo,
- zjawiska falowe.

Ze względu na tak szerokie spektrum zagadnień i zjawisk towarzyszących tarcia, opis tarcia i badania z nim związane nastręczają wielu problemów i wciąż należą do współczesnej tematyki prac naukowych.

Zjawisko tarcia zwykle jest niepożądane, gdyż powoduje następujące negatywne efekty:

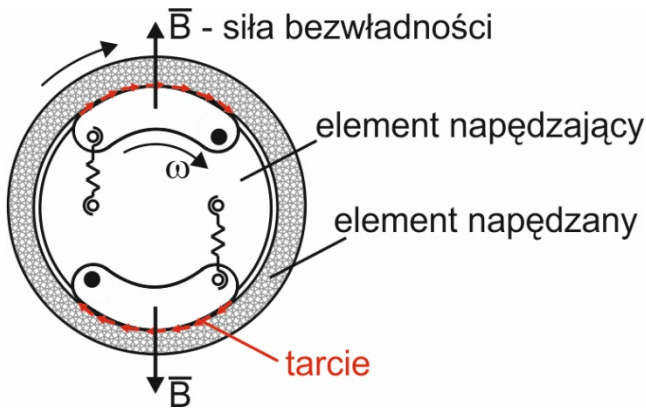
- zużycie współpracujących powierzchni,
- obniżenie sprawności urządzeń,
- nagrzewanie współpracujących powierzchni,
- powstawanie zanieczyszczeń.

W celu zmniejszenia niekorzystnego wpływu sił tarcia stosuje się przede wszystkim:

- odpowiednie przygotowanie współpracujących powierzchni poprzez obróbkę mechaniczną i cieplną,
- smary,
- oleje.

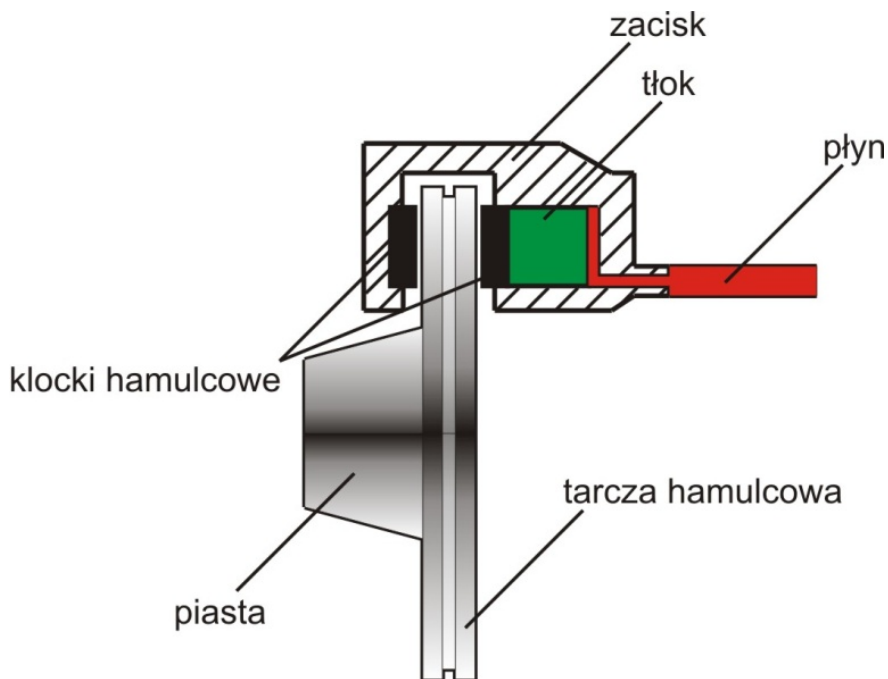
Istnieją jednak liczne przypadki układów, w których obecność tarcia jest konieczna do ich prawidłowego działania np.:

- sprzęgła (rys. 1),
- hamulce (rys. 2),
- przekładnie (rys. 3),
- idący człowiek (rys. 4).



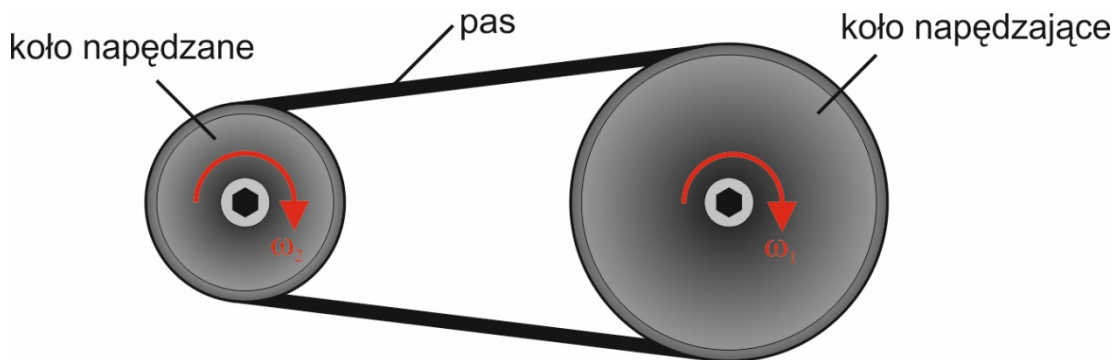
Rys. 1. Sprzęgło odśrodkowe

Zadaniem sprzęgła odśrodkowego pokazanego w uproszczeniu na rys. 1 jest przekazanie obrotów z elementu napędzającego na napędzany, przy wykorzystaniu sił tarcia. Na elemencie napędzanym zamontowane są ciężarki, na które podczas obracania się elementu napędzającego działają promieniowo siły odśrodkowe. Ciężarki mają możliwość przemieszczania się, które jest utrudniane przez zamontowane sprężyny. Przy odpowiednio wysokiej prędkości kątowej siły odśrodkowe są na tyle duże, że sprężyny rozciągają się, a ciężarki są dociskane do wewnętrznej powierzchni cylindrycznej elementu napędzanego. Dzięki tarceniu występującemu na powierzchni zetknięcia ciężarków z wewnętrzną powierzchnią cylindryczną, ruch jest przekazywany na element napędzany.



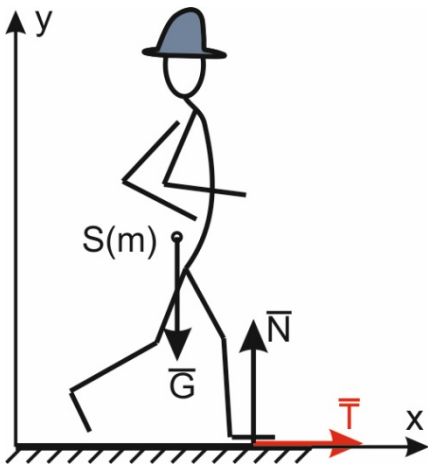
Rys. 2. Hamulec tarczowy

W hamulcu tarczowym przedstawionym na rys. 2, który jest stosowany np. w pojazdach samochodowych, siły tarcia powstające na styku powierzchni klocków z tarczą umożliwiają hamowanie tarczy. Zacisk jest montowany przesuwnie, dzięki czemu docisk klocków po obydwóch stronach tarczy może być jednakowy.



Rys. 3. Przekładnia pasowa

W przekładni pasowej pokazanej na rys. 3 ruch z koła napędzającego przenoszony jest poprzez siły tarcia na pas i następnie na koło napędzane. Zaletą takiej przekładni jest naturalne zabezpieczenie przed przeciążeniem dzięki możliwości wystąpienia poślizgów w przypadku zbyt dużego obciążenia.



Rys. 4. Siły reakcji człowiek-podłoże

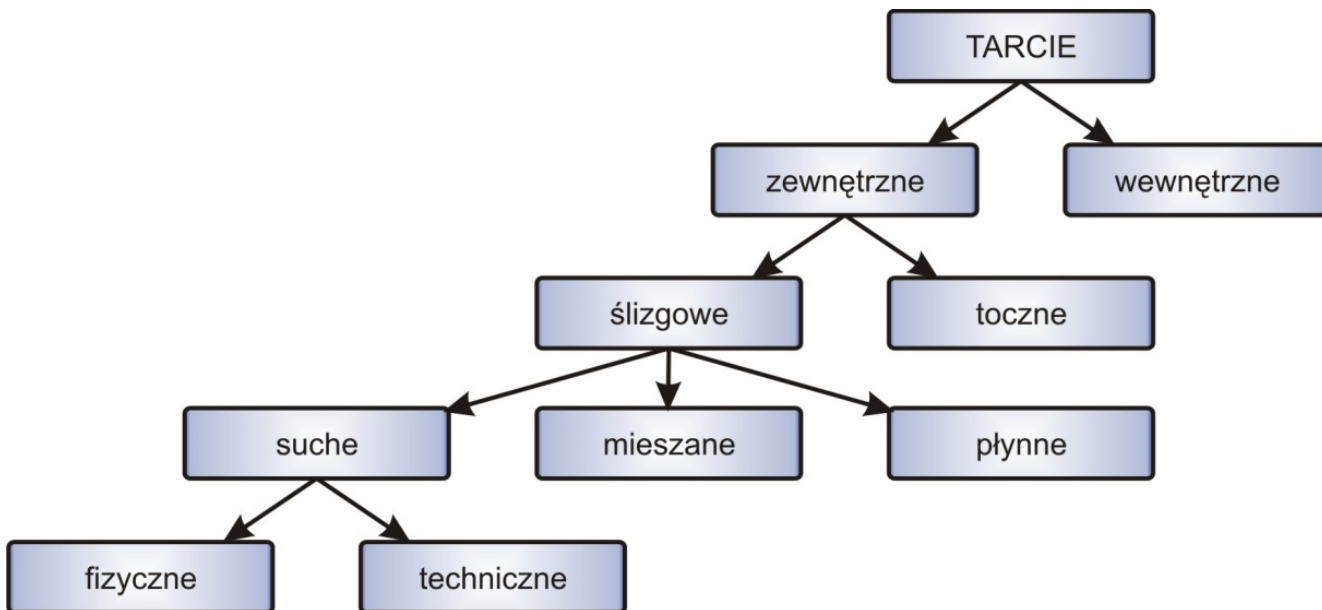
Na rys. 4. Przedstawiono uproszczony schemat przedstawiający rozkład sił działających na człowieka podczas chodu. Widzimy, że siła tarcia pomiędzy stopą i podłożem ma zwrot w prawo, ponieważ człowiek podczas chodu próbuje przesunąć stopę do tyłu (w lewo). Jeśli przeanalizujemy uproszczone równania ruchu środka masy człowieka

$$\begin{cases} m\ddot{x}_M = T \\ m\ddot{y}_M = N - G = 0 \end{cases} \quad (1)$$

to widzimy, iż wynika z nich, że środek masy człowieka może być przemieszczony w prawo (na kierunku x) tylko dzięki występowaniu siły tarcia \bar{T} o zwrocie w prawo. Oczywiście model dynamiki ruchu człowieka jest dużo bardziej złożony od przedstawionego, niemniej powyższy przykład wyjaśnia istotę zagadnienia.

14.1. Rodzaje tarcia

Rodzaje tarcia zostały przedstawione na rys. 5.

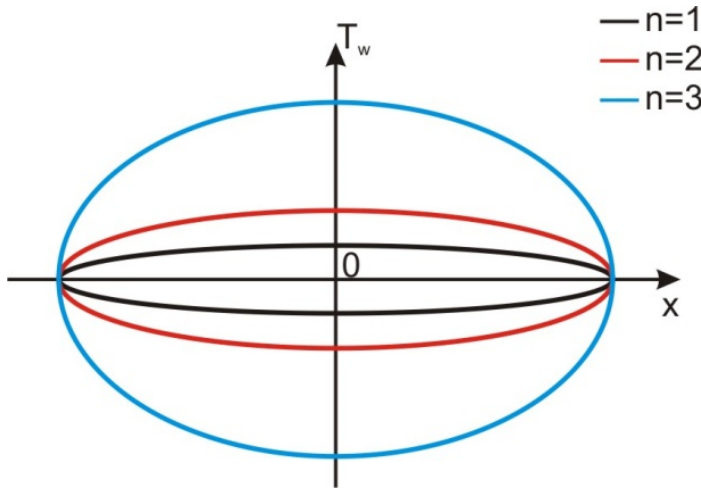


Rys. 5. Rodzaje tarcia

Tarcie wewnętrzne jest to opór występujący między elementami jednego ośrodka. W przypadku płynów tarcie wewnętrzne jest utożsamiane z lepkością. W ciałach stałych tarcie wewnętrzne wynika z sił kohezji i zależy od swobody przemieszczania się cząsteczek względem siebie. Siła tarcia wewnętrznego w materiałach konstrukcyjnych ma postać:

$$T_W = \pm \frac{\alpha_1 A^n}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2} \quad (2)$$

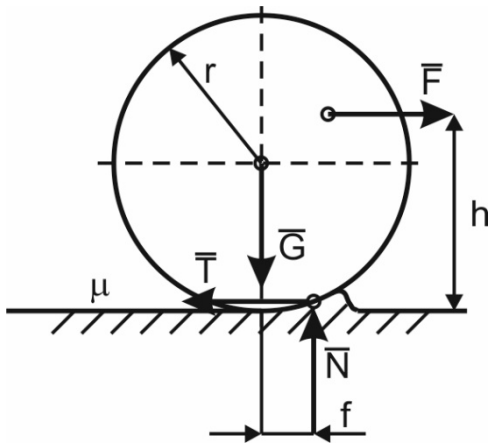
gdzie A to amplituda ruchu, x to bieżące odkształcenie, α_1 i n to stałe zależne od typu konstrukcji i materiału. Powyższą zależność przedstawiono na wykresie na rys. 6.



Rys. 6. Rodzaje tarcia

Tarcie zewnętrzne to tarcie występujące na powierzchniach przylegania współpracujących ciał. Można tutaj wyróżnić tarcie toczne i ślizgowe.

Tarcie toczne występuje gdy sprężyste ciało przetacza się po sprężystym podłożu (rys. 7). Występuje wówczas zjawisko odkształcania ciał w miejscu ich styku, co powoduje powstanie oporu toczenia.



Rys. 7. Tarcie toczone: \bar{G} – ciężar krążka, \bar{F} – siła czynna, \bar{N} – reakcja normalna podłoża, \bar{T} – reakcja styczna podłoża, r – promień krążka, f – współczynnik tarcia toczonego, μ - współczynnik tarcia suchego dla pary materiałów, z których wykonany jest krążek i równia, h – ramię siły czynnej

Z analizy przykładu wynika warunek toczenia bez poślizgu

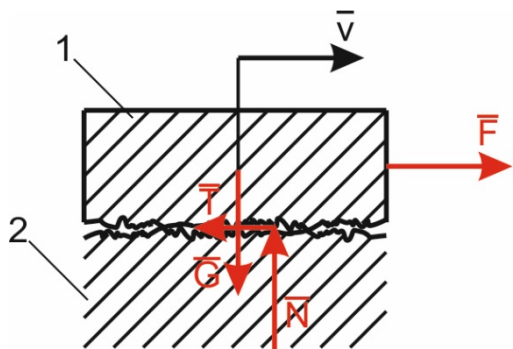
$$\frac{f}{h} < \mu \quad (3)$$

Orientacyjne wartości współczynnika tarcia toczonego dla wybranych par materiałów przedstawiono w poniższej Tabeli 1.

Tabela 1. Orientacyjne wartości współczynnika tarcia tocznego dla wybranych par materiałów

Materiał krążka	Materiał równi	f [m]
stal	stal	0.0005
drewno	stal	0.0012
drewno	drewno	0.0015
żelazo	żelazo	0.00051
żelazo	granit	0.0021
żelazo	drewno	0.0056
polimer	stal	0.002
ebonit	stal	0.0077
ebonit	beton	0.01-0.02
kauczuk	beton	0.015- 0.035

Tarcie ślizgowe powstaje na styku powierzchni, które przemieszczają się względem siebie, co przedstawiono na rys. 8.



Rys. 8. Tarcie ślizgowe: \vec{G} – ciężar bryły 1, \vec{F} – siła czynna, \vec{N} – reakcja normalna podłoża, \vec{T} – reakcja styczna podłoża, \vec{v} – prędkość względna ruchu brył

Siła tarcia \vec{T} ma zwrot przeciwny do zamierzonego lub możliwego przemieszczenia względnych stykających się powierzchni. Tarcie ślizgowe można podzielić na suche, płynne i mieszane.

Tarcie suche występuje, gdy powierzchnie styku współpracują ze sobą bez żadnego środka smarującego. Badania doświadczalne wykazują, że wartość siły tarcia suchego określa w przybliżeniu zależność

$$T \leq \mu N \quad (4)$$

gdzie μ to współczynnik tarcia suchego dla pary materiałów, z których wykonane są stykające się powierzchnie. Główna idea tego modelu polega na tym, że zwrot siły jest

przeciwny do prędkości ruchu względnego, a amplituda siły jest niezależna od prędkości ruchu względnego.

Wyniki szczegółowych badań doświadczalnych wskazują, że współczynnik tarcia suchego zależy od wielu czynników, takich jak:

- rodzaj stykających się powierzchni,
- stan stykających się powierzchni,
- temperatura,
- naciski jednostkowe,
- prędkość względna stykających się powierzchni,
- czas styku,
- geometria stykających się powierzchni,
- kierunek ruchu.

Przykładowe przebiegi współczynnika tarcia w funkcji wybranych wielkości przedstawiono na rys. 9.



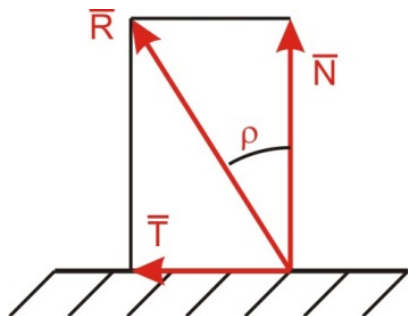
Rys. 9. Współczynnik tarcia suchego w funkcji: a) prędkości poślizgu, a) nacisków jednostkowych, a) chropowatości

Przedstawione na rysunku zależności są nieliniowe, dlatego w celu uproszczenia często przyjmuje się, że współczynnik tarcia suchego jest stały.

Całkowita reakcja w punkcie styku to

$$\bar{R} = \bar{N} + \bar{T} \quad (5)$$

co pokazano na rys. 10.



Rys. 10. Reakcja równi

W obliczeniach zwykle przyjmuje się maksymalną wartość siły tarcia określonej zależnością (4), czyli, że

$$T = \mu N \quad (6)$$

Wówczas wartość reakcji to

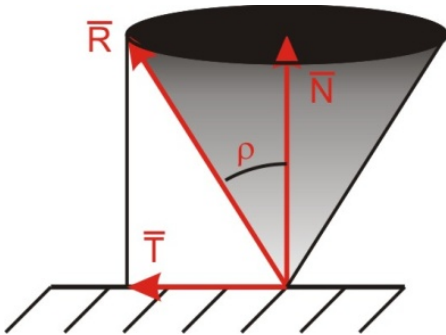
$$R = \sqrt{N^2 + T^2} = N\sqrt{1 + \mu^2} \quad (7)$$

Z rys. 10 wynika, że reakcja całkowita jest odchylna od reakcji normalnej o kąt ρ nazywany kątem tarcia i określany z zależności

$$tg\rho = \frac{T}{N} = \mu$$

(8)

Obracając reakcję całkowitą wokół reakcji normalnej o kąt 2ρ , utworzymy powierzchnię stożkową o kącie wierzchołkowym 2ρ . Utworzony stożek jest nazywany stożkiem tarcia.



Rys. 11. Stożek tarcia

Jeżeli linia działania siły reakcji całkowitej będzie przebiegać przez wierzchołek i wewnątrz tego stożka, to występuje tarcie nierozwinięte i nie występuje ruch względny stykających się powierzchni. Jeżeli linia działania siły będzie przebiegać przez tworzącą stożka tarcia, to występuje tarcie rozwinięte i występuje równowaga sił, zatem ruch względny nie występuje lub występuje ruch jednostajny. Jeżeli linia działania siły będzie przebiegać poza stożkiem tarcia, to występuje również tarcie rozwinięte i występuje ruch przyspieszony.

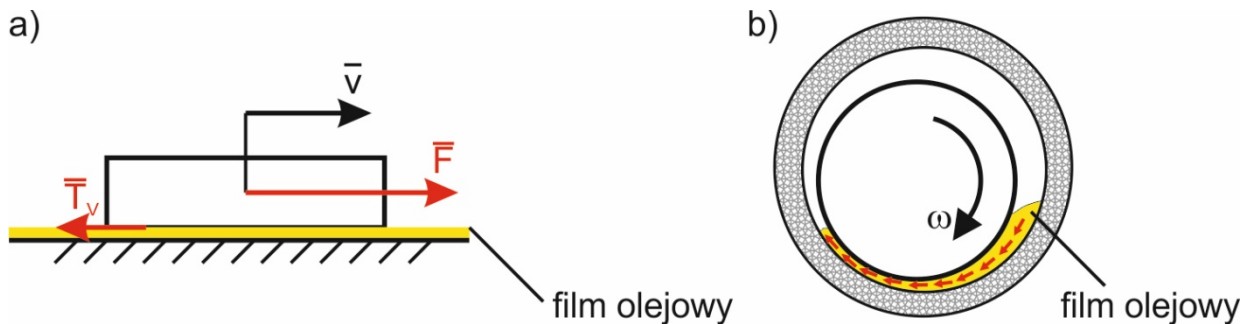
Przedstawiony stożek tarcia ma podstawę kołową, mówimy więc o tarciu izotropowym. W przypadku, gdy współczynnik tarcia zależy od kierunku ruchu, podstawa stożka tarcia nie jest kołowa i mówimy wówczas o tarciu anizotropowym.

Orientacyjne wartości współczynnika tarcia suchego dla wybranych par materiałów przedstawiono w Tabeli.2

Tabela 2. Orientacyjne wartości współczynnika tarcia suchego dla wybranych par materiałów

Materiał		μ
aluminium	stal	0.61
miedź	stal	0.53
mosiądz	stal	0.51
żelazo odlewane	miedź	1.05
żelazo odlewane	cynk	0.85
beton mokry	kauczuk	0.30
beton suchy	kauczuk	1.00
beton	drewno	0.62
miedź	szkło	0.68
szkło	szkło	0.94
polietylen	stal	0.20
stal	stal	0.80
stal	teflon	0.04
teflon	teflon	0.04
drewno	drewno	0.25-0.5

Tarcie płynne zachodzi, gdy współpracujące powierzchnie oddziela warstwa środka smarowego tzn. smaru, cieczy lub gazu.



Rys. 12. Tarcie płynne: a) w parze postępowej, b) w parze obrotowej

W takim przypadku tarcie zewnętrzne jest zamieniane na tarcie wewnętrzne czynnika smarowego. Oznacza to, że powstająca siła tarcia płynnego nie zależy od właściwości współpracujących powierzchni a jedynie od właściwości środka smarowego. Na wartość współczynnika tarcia płynnego wpływa

- rodzaj środka smarowego (lepkość),
- grubość warstwy środka smarowego,
- prędkość względna współpracujących powierzchni.

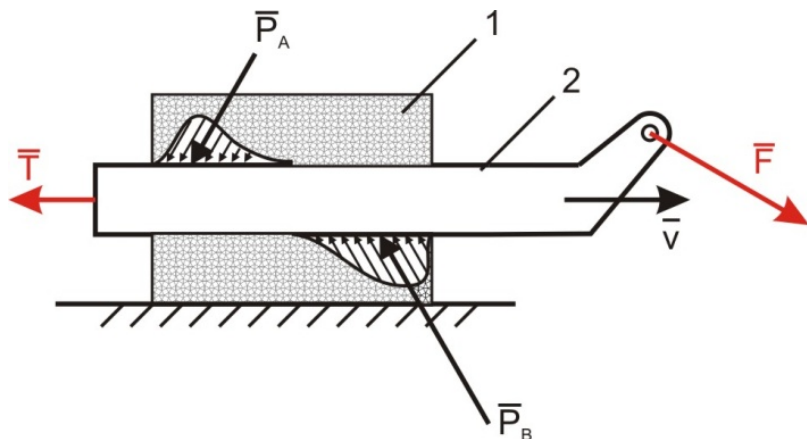
Warunki pracy powierzchni w obecności tarcia płynnego są znacznie korzystniejsze niż przy występowaniu tarcia mieszanego i suchego.

Tarcie mieszane to wypadkowa zjawisk dwóch lub więcej rodzajów tarcia i występuje, gdy w części obszarów tarcia występuje tarcie suche, a część jest rozdzielona warstwą graniczną (warstwą środka smarowego przylegającą trwale do powierzchni i zapobiegającą tarcia suchemu – to tarcie graniczne) lub warstwą cieczy

smarującej (tarcie hydrodynamiczne i elastohydrodynamiczne). Tarcie mieszane jest najczęściej spotykanym w maszynach rodzajem tarcia. Występuje ono prawie zawsze przy małych prędkościach ruchu i dużych naciskach jednostkowych, np. w fazach rozruchu i zatrzymywania maszyny. Wówczas płyn smarujący nie rozdziela całkowicie współpracujących powierzchni tarcia. Część obciążenia normalnego przenoszona jest przez mikroobszary bezpośredniego styku trących ciał, a pozostała część obciążenia przez zespół mikroklinów cieczy smarującej, wypełniającej wgłębienia i nierówności.

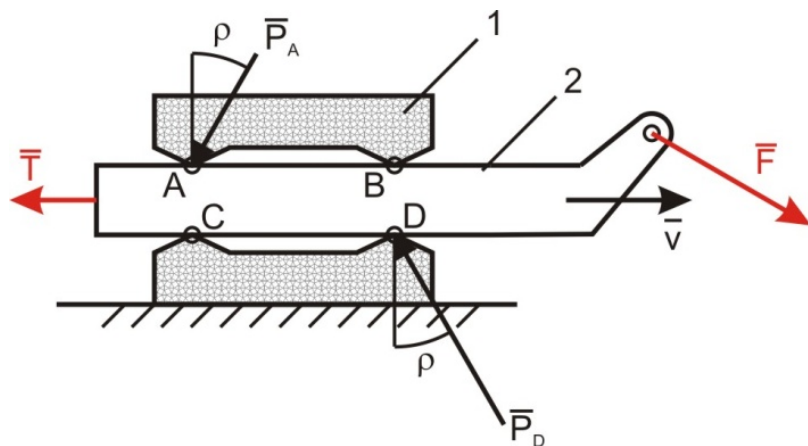
14.2. Tarcie w parach postępowych

Człony tworzące pary kinematyczne postępowe mają na ogół styk powierzchniowy, lecz niedokładne wykonanie oraz luzy powodują, że naciski nie są rozłożone równomiernie. Zwykle są one skoncentrowane w narożach, co przedstawiono na rys. 13.



Rys. 13. Rozkład sił w rzeczywistej parze postępowej

Rozkład nacisków zależy od sposobu obciążenia, geometrii i materiału pary i jest trudny do określenia. Dlatego w analizach zwykle posługujemy się rozwiązaniami modelowymi, jak na rys. 14.

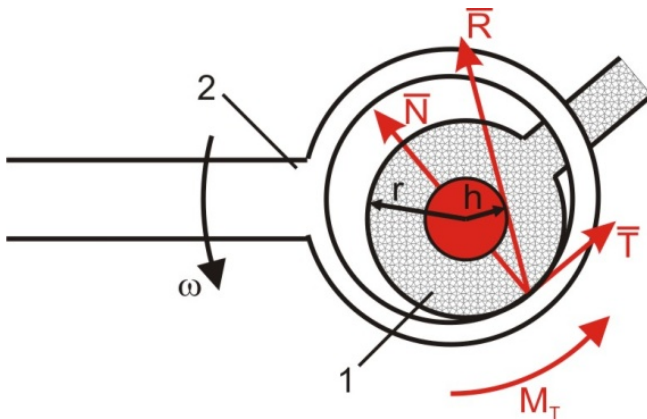


Rys. 14. Rozkład sił w modelowej parze postępowej

Przez nadanie odpowiedniego kształtu elementom pary, miejsca styku są jednoznacznie określone i występują w nich skupione siły oddziaływania, odchylone od osi normalnej o kąt tarcia ρ . Jeśli znane jest obciążenie, geometria pary i kąt tarcia ρ , można określić siłę oporu ruchu.

14.3. Tarcie w parach obrotowych

W parze obrotowej, w której nie występowałoby tarcie, linia działania wypadkowej nacisków \bar{N} przechodziłaby przez punkt styku i środek czopa. Wiadomo jednak, że w rzeczywistości występuje siła tarcia \bar{T} , która działając na ramieniu r daje moment tarcia M_T . Na rys. 15 przedstawiono siły obciążające czop 1. Dla przejrzystości nie umieszczono sił obciążających człon 2, ale wiadomo, że siły obciążające go są skierowane przeciwnie do sił obciążających czop.



Rys. 15. Rozkład sił w parze obrotowej – koło tarcia

Wypadkowa sił reakcji to

$$\bar{R} = \bar{N} + \bar{T}$$

(9)

i jest ona styczna do tzw. koła tarcia o promieniu h . Koło tarcia jest współśrodkowe z czopem 1 o promieniu r . W parze obrotowej wartość siły tarcia określa się jako

$$T = \mu' N \quad (10)$$

gdzie $\mu' = 1,57\mu$ dla czopa niedotartego, $\mu' = 1,27\mu$ dla czopa dotartego. Wartość wypadkowej siły reakcji będzie zatem

$$R = \sqrt{N^2 + T^2} = N\sqrt{1 + (\mu')^2} \quad (11)$$

Moment tarcia jest równy

$$M_T = Tr = \mu' Nr \quad (12)$$

Można go również zapisać jako

$$M_T = Rh \quad (13)$$

Z dwóch ostatnich równań wynika, że

$$\mu' Nr = Rh \quad (14)$$

Wykorzystując równanie (11) zapisano

$$h = \frac{\mu' r}{\sqrt{1+(\mu')^2}} \quad (15)$$

W związku z tym, że w parze kinematycznej obrotowej współpracujące powierzchnie są zwykle szlifowane i współczynnik $\mu' \ll 1$, można zapisać, że

$$h \cong \mu' r \quad (16)$$

Z przeprowadzonych rozważań wynika, że linia działania siły \bar{R} jest styczna do współśrodkowego z czopem tzw. koła tarcia o promieniu h .

14.4. Wybrane statyczne modele tarcia

W literaturze prezentowanych jest wiele modeli tarcia. Najprostszym jest znany już model opisany równaniem (6) i nazywany modelem Coulomba. Aby uwzględnić zmiany zwrotu siły tarcia wynikające ze zmiany zwrotu prędkości względnej ślizgających się powierzchni, siłę tarcia zapisuje się postaci

$$T = \mu N \operatorname{sgn}(v) \quad (17)$$

gdzie wyrażenie $\operatorname{sgn}(v)$ zawiera informację o znaku prędkości względnej. W takim modelu siła tarcia dla zerowej prędkości względnej może przyjąć wartości z przedziału $\langle -T, T \rangle$, w zależności od sposobu definiowania funkcji $\operatorname{sgn}(\cdot)$. Zależność (17) zaprezentowano na rysunku rys. 16a.

Teoria hydrodynamiki dostarczyła modelu tarcia wiskotycznego, które zapisuje się w ogólności jako:

$$T_v = F_v v \quad (18)$$

gdzie F_v to współczynnik tarcia wiskotycznego. Często współczynnik tarcia wiskotycznego oznacza się w literaturze również jako c lub α . Takie tarcie występuje wówczas, gdy pomiędzy współpracującymi powierzchniami wprowadzona zostanie warstwa środka smarującego, co przedstawiono poprzednio na rys. 12a. Lepsze wyniki można osiągnąć stosując model nieliniowy zapisany równaniem:

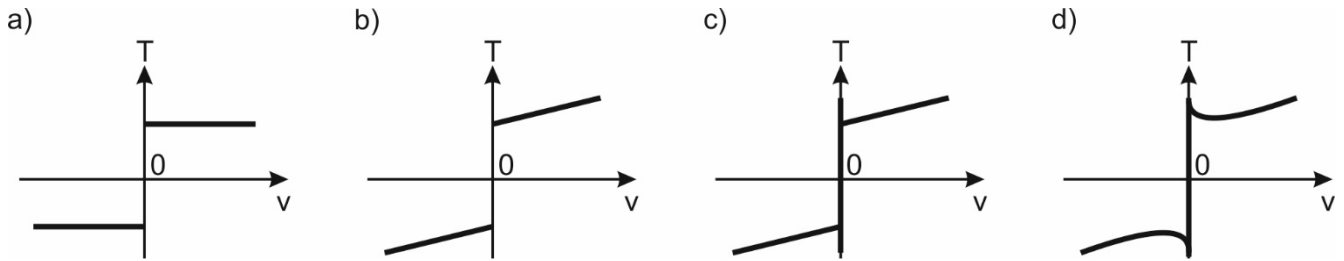
$$T_v = F_v |v|^{\delta v} \operatorname{sgn}(v) \quad (19)$$

gdzie δv to współczynnik zależny od geometrii. W przypadku $\delta v = 1$ model (19) przechodzi w model (18). Często model tarcia wiskotycznego łączy się z modelem Coulomba, co graficznie przedstawiono na rys 16b dla wartości $\delta v = 1$.

Badania doświadczalne wykazują, że tarcie spoczynkowe jest większe od tarcia dynamicznego na poziomie tarcia Coulomba. Siła tarcia spoczynkowego przeciwdziała zewnętrznej sile czynnej F_e i powstrzymuje ciało przed ruchem poniżej pewnego poziomu siły zewnętrznej. Aby zamodelować zjawisko oporów ruchu z uwzględnieniem tarcia spoczynkowego, należy uwzględnić model siły tarcia spoczynkowego F w funkcji siły zewnętrznej jako

$$F = \begin{cases} F_e & \text{gdy } v = 0 \text{ i } |F_e| < F_S \\ F_S \operatorname{sgn}(F_e) & \text{gdy } v = 0 \text{ i } |F_e| \geq F_S \end{cases} \quad (20)$$

Siła F nie zależy tutaj od prędkości. W zależności (20) F_S to graniczna siła, przy której występuje moment przejścia ciała ze stanu równowagi statycznej w stan ruchu. Łącząc model tarcia spoczynkowego z poprzednimi modelami (model Coulomba i model tarcia wiskotycznego dla $\delta v = 1$), uzyskano model przedstawiony graficznie na rysunku 16c. Wszystkie modele (a, b, c) należą do klasycznych. Ich komponenty zależą w sposób liniowy od prędkości bądź od stałych. Lecz sam model jest nieliniowy, gdyż przy przejściu bryły ze stanu spoczynku w stan ruchu występuje nieciągła zmiana wartości siły. Zaobserwowano, że w rzeczywistości taka nieciągłość nie może występować. Stribeck opracował model który przedstawiono graficznie na rysunku 16d.



Rys. 16. Modele tarcia

Zatem bardziej ogólny od klasycznych model tarcia opisany jest zależnością:

$$T = \begin{cases} F(v) & v \neq 0 \\ F_e & \text{gdy } v = 0 \text{ i } |F_e| < F_S \\ F_S \text{sgn}(F_e) & \text{gdy } v = 0 \text{ i } |F_e| \geq F_S \end{cases} \quad (21)$$

gdzie $F(v)$ jest arbitralnie przyjętą funkcją, która może mieć postać np.:

$$F(v) = \mu N + (F_S - \mu N) \exp(-|v/v_S|^{\delta_S}) + F_v v \quad (22)$$

gdzie v_S jest nazywana prędkością Stribeck'a.