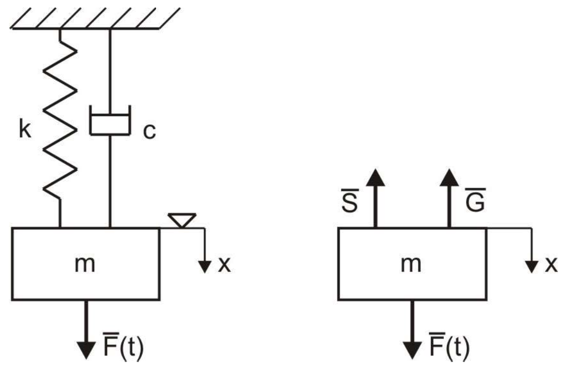
B. DRGANIA WYMUSZONE TŁUMIONE UKŁADU O JEDNYM STOPNIU SWOBODY.

Przyjmujemy następujący model



Rys. 19.

Dynamiczne równanie ruchu masy ma postać:

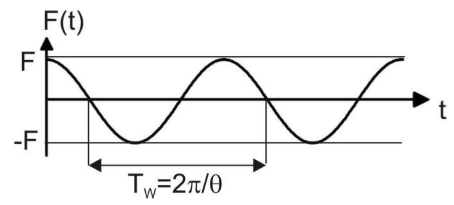
$$m\ddot{x} = F(t) - S - G, \tag{22}$$

gdzie:
$S = kx$ to siła reakcji sprężyny,
$G = c\dot{x}$ to siła tłumienia wiskotycznego,
$F(t)$ to siła wymuszająca ruch.

Charakterystykę wymuszenia przyjęto jako wymuszenie harmonicznie zmienne, jest to wymuszenie najbardziej niebezpieczne dla układu, czyli

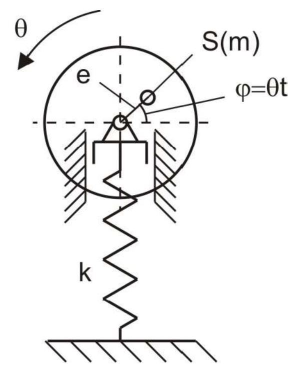
$$F(t) = F\cos(\theta t), \tag{23}$$

gdzie F [N] to amplituda wymuszenia, $\theta \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ to częstość wymuszenia.



Rys. 20.

Jeżeli w układzie występuje bryła obracająca się wokół nieruchomej osi z prędkością kątową θ, a środek masy bryły nie leży na osi obrotu, to wówczas gdy $\theta = \mathrm{const.}$ to kąt obrotu $\varphi = \theta t$. Środek masy jest przesunięty od osi obrotu o wartość e – to tzw. mimośród.



Rys. 21.

Występuje wówczas fikcyjna siła $\overline{B}_n = -m\overline{a}_n$ pochodząca od przyspieszenia normalnego masy o wartości $B_n = m\theta^2 e$. Rzut tej siły na średnicę daje siłę harmonicznie zmienną $F(t) = B_n \cos(\theta t)$ lub $F(t) = B_n \sin(\theta t)$. Taką siłę nazywamy wymuszeniem ruchu drgającego. Aby takie wymuszenie nie występowało, konieczne jest doprowadzenie układu do tego, aby $e = 0$, czyli wówczas środek masy leży na osi obrotu i mówimy, że bryła jest wyważona statycznie.

Wirującą niewyważoną masę można wykorzystać w konstrukcji tzw. wzbudników drgań, gdzie wartość częstości wymuszenia $\theta = \frac{\pi n}{30}$ można zmieniać poprzez $n = \frac{\mathrm{obr.}}{\mathrm{min.}}$.

Uwzględniając powyższe zapisy, równanie ruchu zapisano jako

$$m\ddot{x} = F\cos(\theta t) - kx - c\dot{x}, \tag{24}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F\cos(\theta t), \tag{25}$$

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = F_0\cos(\theta t), \tag{26}$$

gdzie

$2h = \frac{c}{m}$ to tzw. współczynnik tłumienia jednostkowego,

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ to częstość drgań własnych,

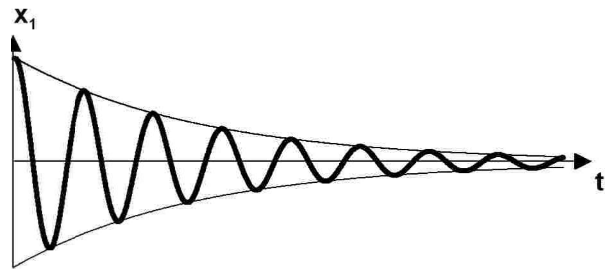
$F_0 = \frac{F}{m}$ to amplituda wymuszenia jednostkowego. Rozwiązaniem równania (26) jest

$$x = x_1 + x_2, \tag{27}$$

gdzie

$$x_1 = e^{-ht}\left[C_1\cos(\omega_* t) + C_2\sin(\omega_* t)\right], \tag{28}$$

to rozwiązanie opisujące drgania swobodne tłumione w przypadku małego tłumienia, tzn. gdy $\omega^2 - h^2 > 0$. Taki przypadek jest najczęściej występującym w technice. Przebieg rozwiązania (28) przedstawiono poniżej



Rys. 22.

Natomiast drugi człon rozwiązania to

$$x_2 = B\cos(\theta t - \gamma), \tag{29}$$

i opisuje on drgania wymuszone ustalone. Ponieważ drgania swobodne tłumione zanikają, to interesuje nas głównie rozwiązanie opisujące drgania wymuszone ustalone, czyli (29). Zatem przyjmujemy

$$x = x_2 = B\cos(\theta t - \gamma), \tag{30}$$

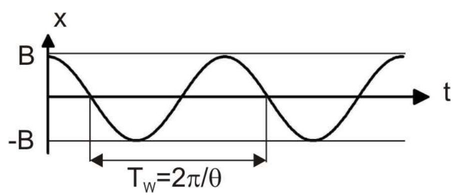
gdzie

$$B = \frac{F_0}{\sqrt{\left(\omega^2 - \theta^2\right)^2 + 4h^2\theta^2}}, \tag{31}$$

to amplituda drgań wymuszonych ustalonych, natomiast kąt przesunięcia fazowego jest zdefiniowany przez wzór

$$tg(\gamma) = \frac{2h\theta}{\omega^2 - \theta^2}. \tag{32}$$

Przebieg rozwiązania przedstawiono na wykresie



Rys. 23.

Przebieg czasowy drgań pokazuje, że masa wykonuje ruch okresowy o ustalonej amplitudzie. Okres drgań wymuszonych ustalonych T_W jest taki sam jak okres siły wymuszającej. W zaprezentowanym ruchu interesująca jest wielkość amplitudy drgań wymuszonych. Analizuje się tzw. charakterystykę amplitudowo-częstościową, którą uzyskuje się następująco. Należy licznik i mianownik wyrażenia (31) podzielić przez ω^2, czyli

$$B = \frac{\frac{F_0}{\omega^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\frac{h^2}{\omega^2}\frac{\theta^2}{\omega^2}}}. \tag{33}$$

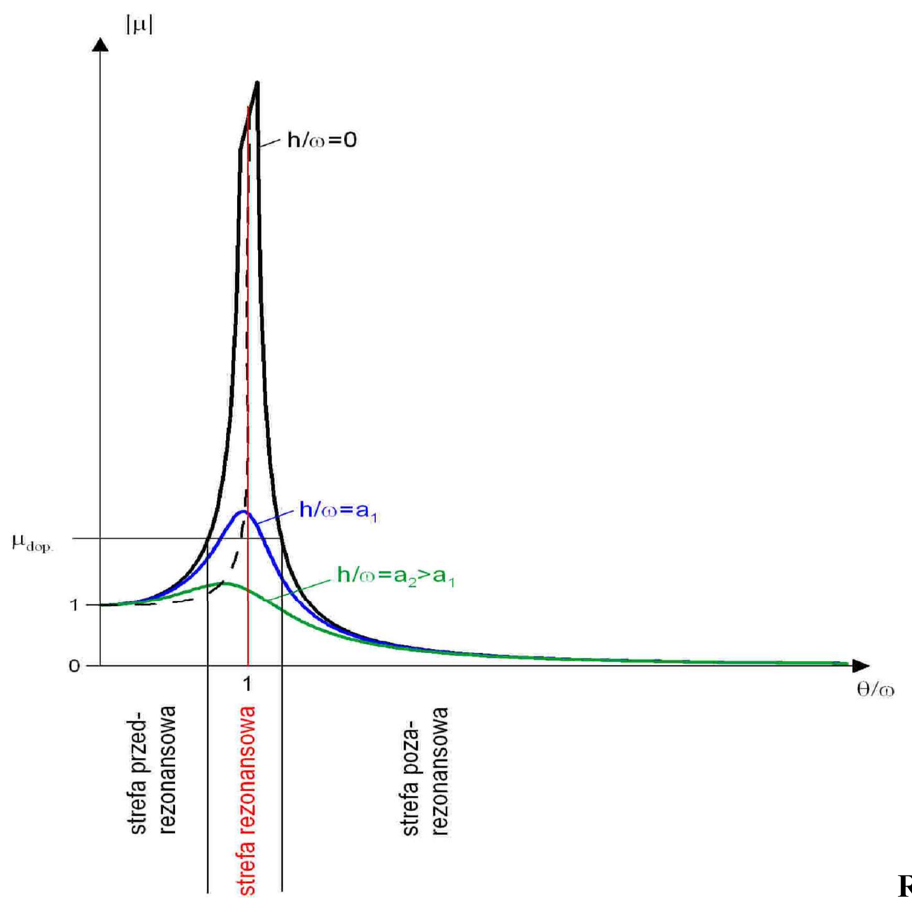
Ponieważ licznik wyrażenia (33)

$$\frac{F_0}{\omega^2} = \frac{\frac{F}{m}}{\frac{k}{m}} = \frac{F}{k} = \lambda_{st} \tag{34}$$

wyraża statyczną deformację sprężyny przez siłę o wartości amplitudy wymuszenia F, to równanie (33) można przekształcić do postaci

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\frac{h^2}{\omega^2}\frac{\theta^2}{\omega^2}}}. \tag{35}$$

gdzie $\mu = \dfrac{B}{\lambda_{st}}$ to tzw. współczynnik uwielokrotnienia amplitudy. Charakterystykę amplitudowo-częstościową sporządza się na podstawie zależności (35) przyjmując, że θ zmienia się od 0 do ∞. Taką charakterystykę przedstawiono na poniższym rysunku.


|μ|
h/ω=0
h/ω=a1
h/ω=a2>a1
μdop.
1
0
1
θ/ω
strefa przed-rezonansowa
strefa rezonansowa
strefa poza-rezonansowa

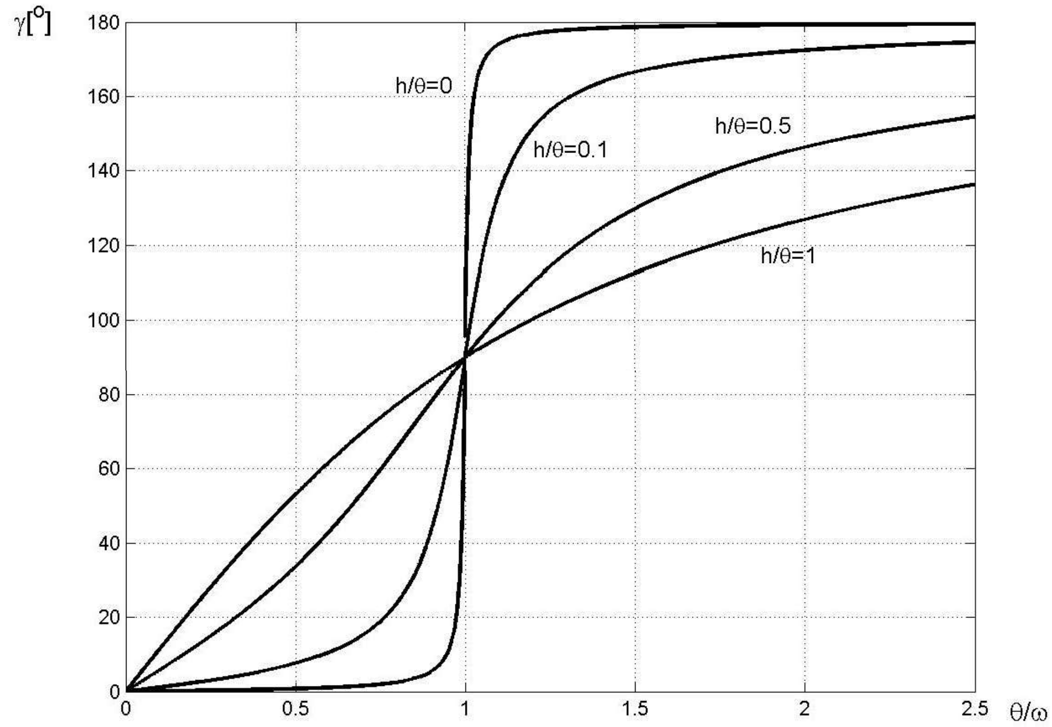
Rys. 24.

Zauważamy, że jeśli $\frac{h}{\omega} = 0$ (tzn. gdy nie ma tłumienia) to przy $\frac{\theta}{\omega} = 1$ wartość $|\mu| \to \infty$, czyli występuje zjawisko rezonansu mechanicznego. Dla każdego układu można określić dopuszczalną wartość współczynnika uwielokrotnienia amplitudy, czyli μ_{dop}. Jeżeli nie występuje tłumienie to układ powinien pracować w strefie przed- i pozarezonansowej. Niebezpieczna dla układu jest praca w strefie rezonansowej, gdyż prowadzi ona do zniszczenia układu. Jeżeli $\frac{h}{\omega} \neq 0$, to otrzymujemy przebiegi, z których kilka pokazano na powyższym rysunku.

Kąt przesunięcia fazowego określimy jako

$$\mathrm{tg}(\gamma) = \frac{\frac{2h}{\omega}\frac{\theta}{\omega}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}, \tag{36}$$

a jego zmianę pokazano na poniższym rysunku.


γ[°]
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
θ/ω
h/θ=0
h/θ=0.1
h/θ=0.5
h/θ=1

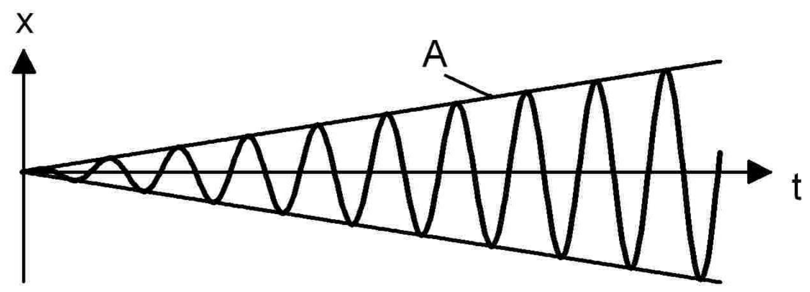
Rys. 25.

Widać, że bez względu na wielkość tłumienia, w rezonansie kąt przesunięcia fazowego zawsze wynosi 90° i poza rezonansem dąży do 180°.

Jeżeli występują drgania wymuszone, to przy pracy układu w rezonansie mechanicznym (gdy $\theta = \omega$) i gdy nie występuje tłumienie, to rozwiązaniem równania (26) jest

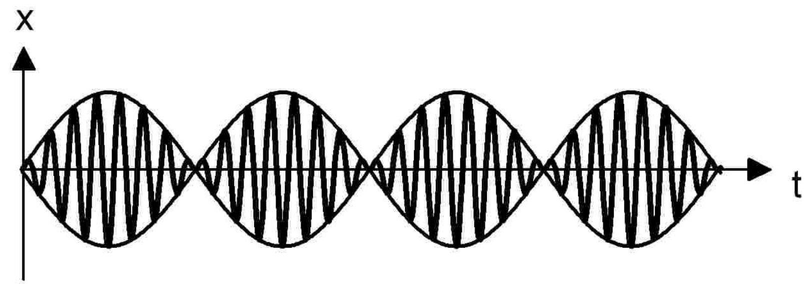
$$x = A\sin(\theta t), \qquad (37)$$

gdzie $A = F\frac{\theta}{k}t$, czyli amplituda rośnie do nieskończoności, co pokazano na poniższym rysunku.



Rys. 26.

Jeżeli układ pracuje w pobliżu rezonansu, tzn. częstość wymuszenia θ jest nieznacznie mniejsza od ω (tuż przed rezonansem) lub jest nieznacznie większa od ω (tuż poza rezonansem), wówczas występuje tzw. zjawisko dudnienia, co pokazano na poniższym rysunku. Amplituda drgań rośnie i maleje.



Rys. 27.