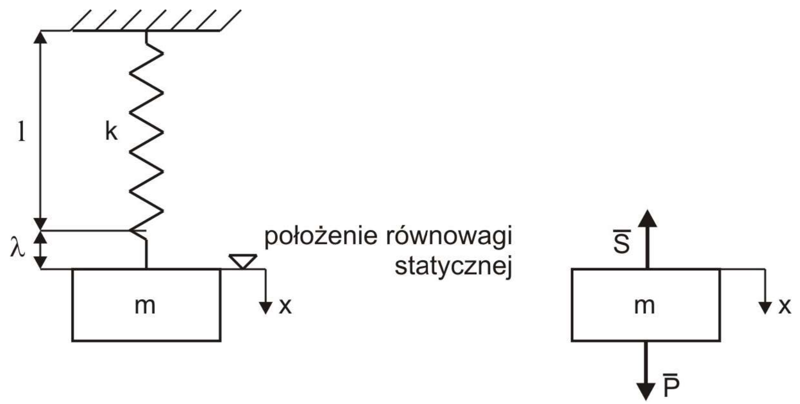
Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza
Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa
Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki
Opracował: dr inż. Piotr Gierlak

A. DRGANIA SWOBODNE UKŁADU O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

Przyjmujemy następujący model



Rys. 10.

Dynamiczne równanie ruchu masy ma postać:

$$m\ddot{x} = -S + P,$$

gdzie

P to siła ciężkości masy,

$S = k\Delta$ to siła reakcji sprężyny,

$\Delta = \lambda + x$, Δ to całkowita deformacja sprężyny, λ to statyczna deformacja sprężyny, x to deformacja sprężyny wynikająca z ruchu wokół położenia równowagi statycznej.

Uwzględniając powyższe zapisy, równanie ruchu zapisano jako

$$m\ddot{x} = P - k\lambda - kx \,. \tag{1}$$

Z równowagi statycznej wynika, że

$$P - k\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{P}{k}\,, \tag{2}$$

wobec tego

$$m\ddot{x} = -kx\,, \tag{3}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0\,, \tag{4}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0\,, \tag{5}$$

gdzie $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ to częstość drgań swobodnych. Rozwiązaniem równania (5) jest

$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)\,, \tag{6}$$

$$\dot{x} = -C_1 \omega \sin(\omega t) + C_2 \omega \cos(\omega t)\,, \tag{7}$$

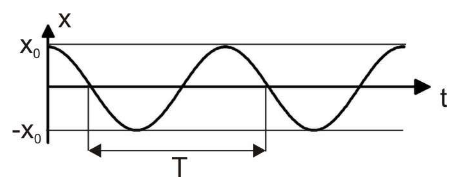
gdzie C_1 i C_2 to stałe całkowania, które wyznaczymy z równań (6) i (7) wykorzystując warunki początkowe, tzn. dla $t = t_0 = 0$ [s]

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases}. \tag{8}$$

Z równań (6) i (7) otrzymamy $C_1 = x_0$, $C_2 = 0$. Ostatecznie ruch masy opisuje równanie

$$x = x_0 \cos(\omega t)\,, \tag{9}$$

gdzie x_0 to amplituda drgań swobodnych. Przebieg rozwiązania przedstawiono na wykresie



Rys. 11.

$T = \frac{2\pi}{\omega}\ [s]$ to okres ruchu,

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\ \left[\frac{rad}{s}\right]$ to częstość drgań swobodnych,

$f = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{s} = Hz\right]$ to częstotliwość drgań.

Jeżeli warunki początkowe będą zerowe, tzn. dla $t = t_0 = 0\,[s]$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases}, \tag{10}$$

to układ jest w stanie równowagi statycznej. Jeżeli natomiast warunki początkowe będą takie, że dla $t = t_0 = 0\,[s]$

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = v_0 \end{cases}, \tag{11}$$

to wówczas $C_1 = x_0$, $C_2 = \frac{v_0}{\omega}$ i równanie (6) można zapisać jako

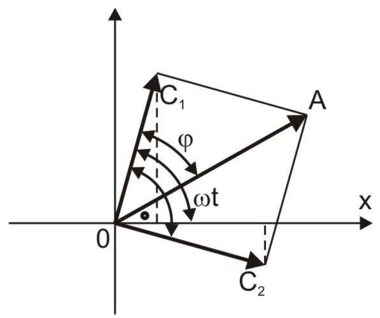
$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) = A\cos(\omega t - \varphi), \tag{12}$$

gdzie

$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ to amplituda drgań,

$\mathrm{tg}\varphi = \frac{C_2}{C_1}$ to tzw. kąt przesunięcia fazowego.

Geometryczna interpretacja takiego przypadku jest przedstawiona na poniższym rysunku.

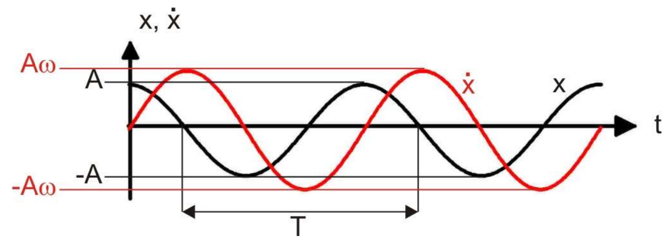


Rys. 12.

Prędkość masy opisuje równanie

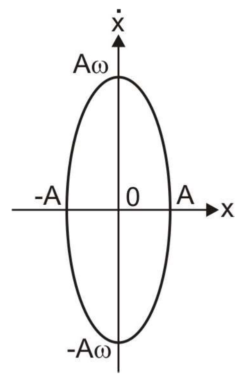
$$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t - \varphi). \tag{13}$$

Przebieg rozwiązań (12) i (13) przedstawiono na poniższym rysunku.



Rys. 13.

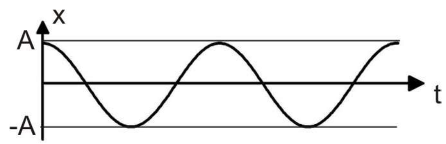
Ruch masy można odwzorować także na tzw. płaszczyźnie fazowej.



Rys. 14.

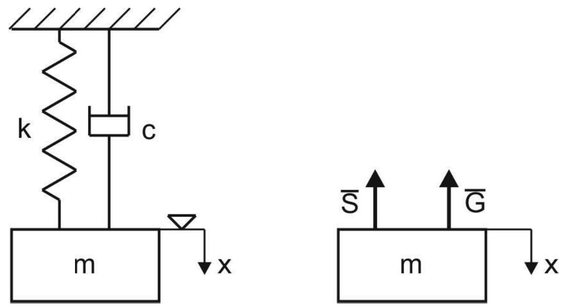
W przypadku drgań swobodnych trajektoria fazowa to krzywa zamknięta. Z pokazanego przebiegu wynika, że gdy $x = \max$ to $\dot{x} = 0$ oraz gdy $\dot{x} = \max$ to $x = 0$.

Jeżeli w układzie nie występuje tłumienie, amplituda drgań jest stała, czyli wówczas zmiana przemieszczenia w czasie przebiega jak to przedstawiono na rys



Rys. 15.

W rzeczywistości w układach zawsze występuje tłumienie, np. tzw. wewnętrzne (lub strukturalne związane z oporami przy mikroprzesunięciach kryształów materiału – to problem metaloznawstwa), dlatego amplituda drgań swobodnych maleje z czasem. Wówczas przyjmujemy model przedstawiony na poniższym rysunku



Rys. 16.

Dynamiczne równanie ruchu masy ma postać:

$$m\ddot{x} = -S - G\,, \qquad (14)$$

gdzie:
$S = kx$ to siła reakcji sprężyny,
$G = c\dot{x}$ to siła tłumienia wiskotycznego,
Uwzględniając powyższe zapisy, równanie ruchu zapisano jako

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0\,, \qquad (15)$$

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = 0\,, \qquad (16)$$

gdzie

$2h = \frac{c}{m}$, h to tzw. współczynnik tłumienia jednostkowego,

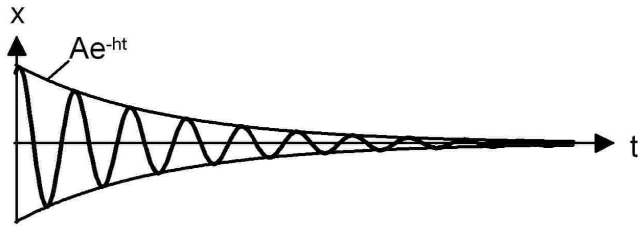
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ to częstość drgań własnych. Rozwiązaniem równania (16) jest

$$x = Ae^{-ht}\sin(\omega_* t + \varphi), \qquad (17)$$

We wzorze (17) ω_* oznacza częstość drgań tłumionych i jest ona wyrażona zależnością

$$\omega_* = \sqrt{\omega^2 - h^2}\ . \qquad (18)$$

natomiast h to współczynnik tłumienia jednostkowego modelujący występujące tarcie jako tarcie wiskotyczne, czyli $2h = \frac{c}{m}$, gdzie c jest nieznanym współczynnikiem tarcia płynnego. Przebieg rozwiązania (17) przedstawiono na poniższym rysunku.



Rys. 17.

Ale oscylacje opisane powyższym równaniem występują tylko wówczas, gdy tłumienie jest małe, tzw. podkrytyczne, czyli $\omega^2 - h^2 > 0$. W przypadku dużych tłumień, gdy $\omega^2 - h^2 = 0$ (to tzw. tłumienie krytyczne) oraz gdy $\omega^2 - h^2 < 0$ (to tzw. tłumienie nadkrytyczne) ruch oscylacyjny masy nie występuje.

W przypadku, gdy występują oscylacje o zanikającej amplitudzie mówimy, że układ jest asymptotycznie stateczny. W układach rzeczywistych tłumienia są zazwyczaj małe i drgania swobodne układu są o zanikającej amplitudzie - w tym przypadku mówimy, że tłumienie jest dodatnie. Miarą spadku amplitudy drgań jest współczynnik D nazywany logarytmicznym dekrementem tłumienia, który występuje w zależności

$$e^D = \frac{A_n}{A_{n+1}}, \tag{19}$$

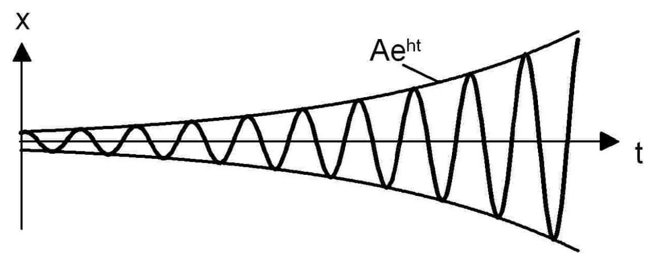
gdzie A_n, A_{n+1} to dwie kolejno następujące amplitudy drgań, $D = hT_t$, gdzie $T_t = \frac{2\pi}{\omega_*}$. Z zależności (19) wynika, że spadek amplitud drgań będzie liniowy w skali logarytmicznej, a logarytmiczny dekrement tłumienia wyznaczymy jako

$$D = \ln\frac{A_n}{A_{n+1}}, \tag{20}$$

Ale występują również takie układy, gdzie tłumienie jest ujemne. Wówczas ruch takiego układu opisuje równanie w postaci

$$x = Ae^{ht}\sin(\omega_{*}t + \varphi), \tag{21}$$

a przebieg tego rozwiązania to oscylacje o rosnącej amplitudzie, co pokazano poniżej.



Rys. 18.

Pokazany przebieg drgań to tzw. drgania samowzbudne, w tym przypadku układ jest niestateczny.

Taki układ samowzbudny to układ np. taki gdzie występuje tarcie suche, a prędkość ślizgania jest mała (skrzypce i smyczek, w konstrukcjach lotniczych to tzw. flatter skrzydła).