Wyznaczanie siły uogólnionej

Zad. 1.

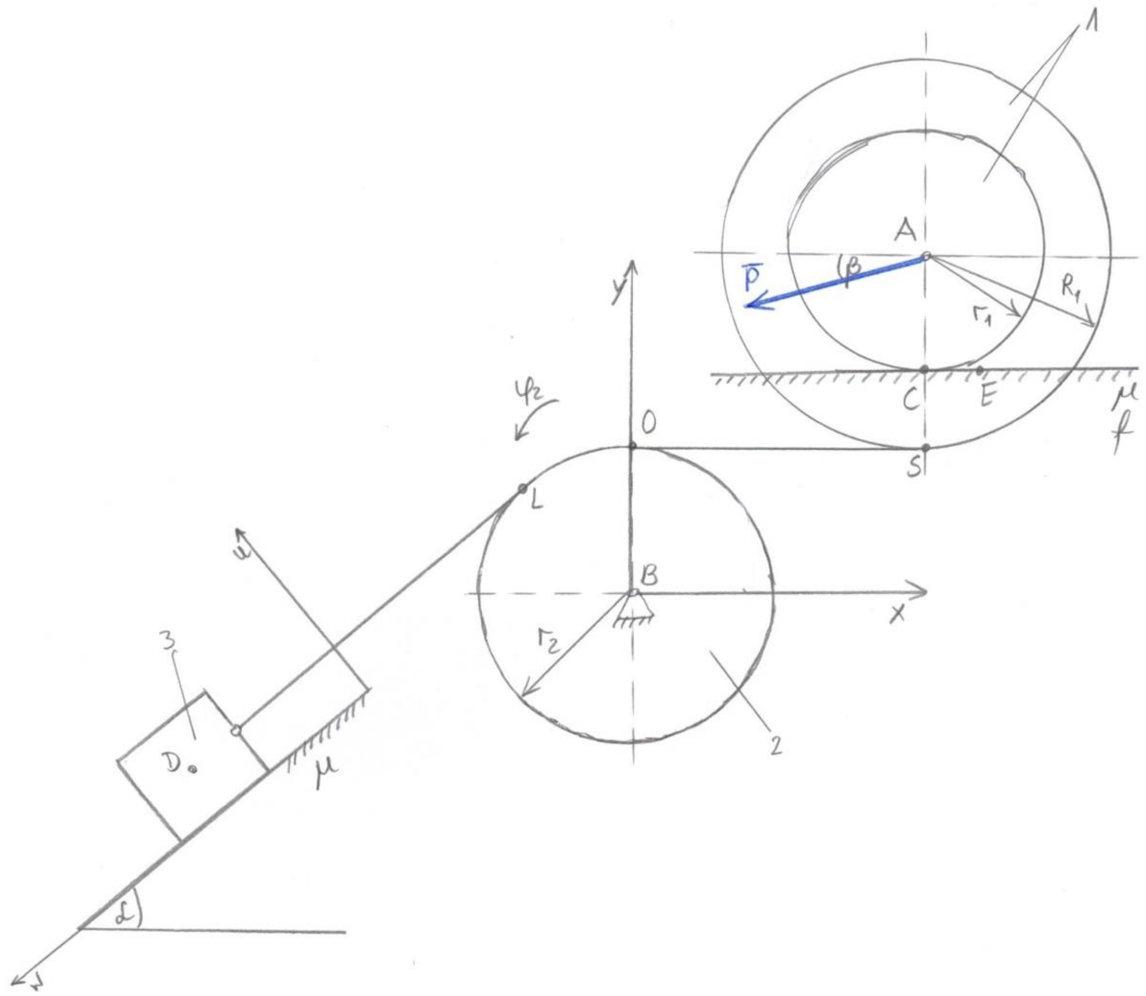
Pokazany na rysunku układ brył o znanych ciężarach i znanej geometrii pozostaje w ruchu. Krążek 1 o zróżnicownej średnicy toczy się bez poślizgu po chropowatym podłożu. Występuje zjawisko tarcia suchego i tarcia toczenia. Na krążek 1 działa siła P o znanej wartości, zaczepiona w punkcie A, o kierunku jak pokazano na rysunku. Krążek 2 obraca się w lewo. Bryła 3 przemieszcza się po równi o kącie nachylenia β. Powierzchnie równi i bryły są chropowate. Wyznacz siłę uogólnioną Q za uogólnione przesunięcie przygotowane δq przyjmując wirtualny obrót bryły 2, $\delta\varphi_2$.

Dane:

G_1, G_2, G_3, P [N]
R_1, r_1, r_2, f, i_A[m]
μ [-]
α,β [rad]
zerowe warunki początkowe

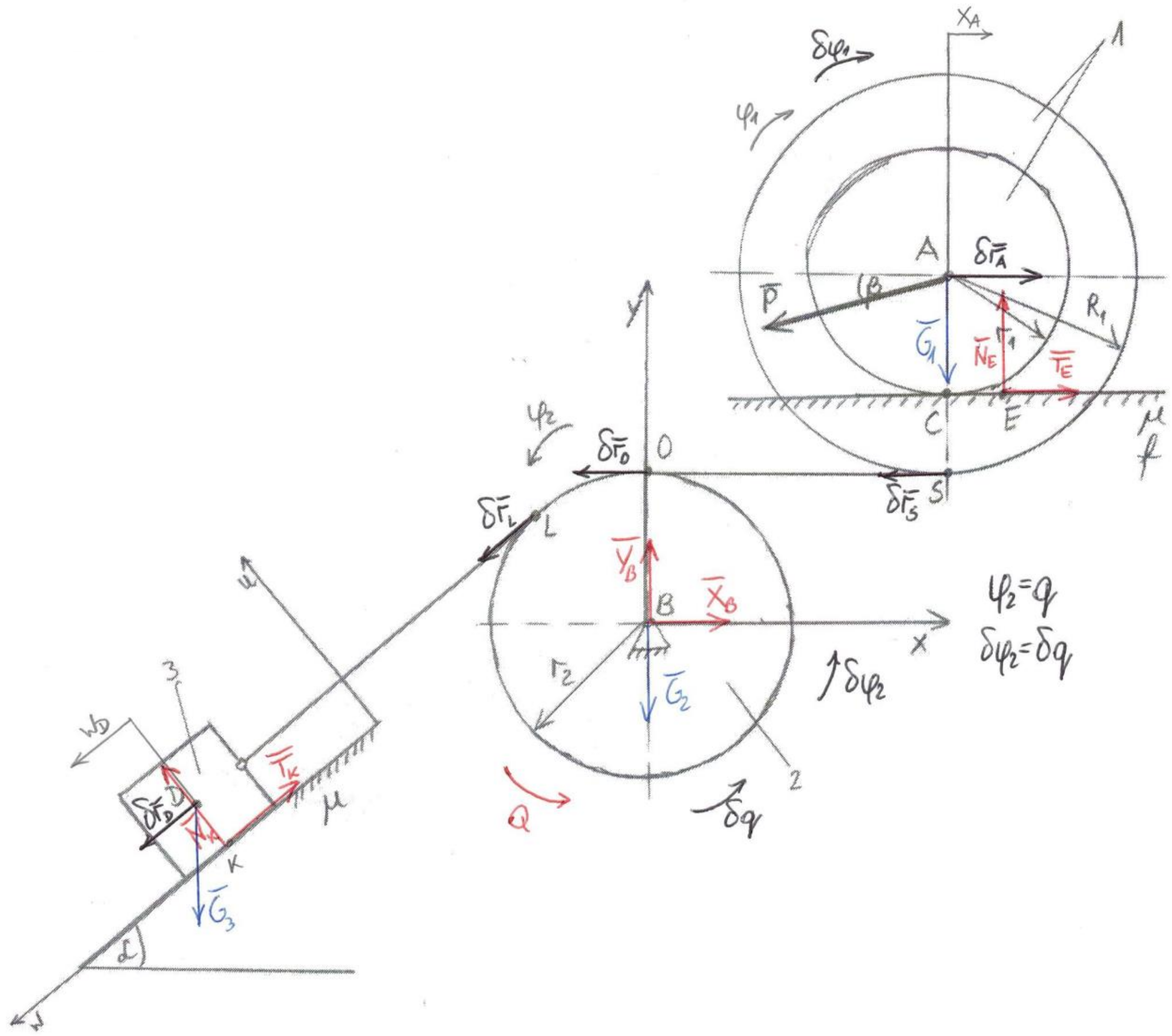
Szukane:

Q = ?



Rozwiązanie:

a) Przyjmujemy układ współrzędnych xy na rysunku w nieruchomym punkcie, np. punkcie B. Przyjmujemy pomocniczy układ współrzędnych uw związany z równią. Krążek 2 obraca się w lewo. Krążek 1 toczy się bez poślizgu, jest więc w ruchu płaskim. Przyjmujemy interpretację ruchu płaskiego jako ruchu, w którym występuje przemieszczenie środka masy bryły w prawo (x_A) oraz obrót bryły wokół środka masy (φ_1). Bryła 3 zsuwa się z równi. Zaznaczamy podstawowe realizowane parametry ruchu, jak przemieszczenie środka masy x_A, kąt obrotu krążka 1 φ_1, kąt obrotu krążka 2 φ_2, oraz realizowane przemieszczenie punktu D, w_D. Wprowadzamy wektory przesunięć przygotowanych δr_A, $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2=\delta q$, oraz δr_D. Możemy wprowadzić na rysunku wszystkie wektory sił prawdziwych: czynnych (G_1, G_2, G_3, P) oraz biernych (T_E, N_E, T_K, N_K, X_A, Y_A), możemy również zaznaczyć siłę uogólnioną Q, która ze względu na przyjętą współrzędną uogólnioną będzie momentem siły. Nie jest konieczne zaznaczanie na rysunku sił wewnętrznych układu sił, jeżeli te nie wykonują pracy przygotowanej.



b) Zapisujemy ogólne równanie w którym przyrównujemy sumę prac przygotowanych podukładów sił działających na poszczególne bryły do pracy przygotowanej jaką wykonuje siła uogólniona Q na uogólnionym przesunięciu przygotowanym δq:

$$1)\quad \delta L = \sum_{i=1}^{n} \delta L_i = Q_1 \delta q_1 = Q \delta q$$

$$2)\quad \delta L = \bar{P}_1 \delta \bar{r}_A + M_A \delta \varphi_1 + M_B \delta \varphi_2 + \bar{P}_3 \delta \bar{r}_D = Q \delta q$$

Uwaga: Zapisując zależność (2) zwracamy uwagę na indeksy przy poszczególnych symbolach.

c) Podstawiamy do równania (2) rzuty wektorów sił i momentów wynikające z rysunku:

$$3)\quad \delta L = (T_E - P\cos\beta)\delta r_A + (-N_E f - T_E r_1)\delta\varphi_1 + (G_3 \sin\alpha - T_K)\delta r_D = Q\delta q$$

d) Zapisujemy równania więzów siłowych, jeżeli takie wynikają z przyjętego modelu, oraz zapisujemy wartości wielkości niezbędnych do rozwiązania zadania:

$$4)\quad N_E - P\sin\beta - G_1 = 0$$

$$5)\quad N_K - G_3\cos\alpha = 0$$

$$6)\quad T_E \leq \mu N_E$$

$$7)\quad T_K = \mu N_K$$

Uwaga: Zależności (4) i (5) wynikają z równań równowagi kintostatycznej na kierunkach prostopadłych do powierzchni realizowanego ruchu.

e) Zapisujemy równania więzów kinematycznych narzuconych na przesunięcia przygotowane:

$$8)\quad \delta \bar{r}_D = \delta \bar{r}_L$$

$$9)\quad \delta r_D = \delta\varphi_2 r_2$$

$$10)\quad \delta \bar{r}_D = \delta \bar{r}_S$$

$$11)\quad \delta\varphi_2 r_2 = \delta\varphi_1 (R_1 - r_1)$$

$$12)\quad \delta\varphi_1 = \delta\varphi_2 \frac{r_2}{R_1 - r_1}$$

$$13)\quad \delta r_A = \delta\varphi_1 r_1 = \delta\varphi_2 \frac{r_1 r_2}{R_1 - r_1}$$

d) Rozwiązanie:

$$14)\quad \delta L = (\cancel{T_E} - P\cos\beta)\frac{r_1 r_2}{R_1 - r_1}\delta\varphi_2 + (-N_E f - \cancel{T_E r_1})\frac{r_2}{R_1 - r_1}\delta\varphi_2 + (G_3 \sin\alpha - T_K) r_2 \delta\varphi_2 = Q\delta q$$

$$15)\quad \delta L = \left[-P\cos\beta\frac{r_1 r_2}{R_1 - r_1} - (P\sin\beta + G_1) f \frac{r_2}{R_1 - r_1} + (G_3 \sin\alpha - \mu G_3 \cos\alpha) r_2\right]\delta\varphi_2 = Q\,\delta q$$

Biorąc pod uwagę, że:

$$\delta\varphi_2 = \delta q$$

otrzymujemy:

$$16)\quad Q = G_3 r_2 (\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - P\frac{r_1 r_2}{R_1 - r_1}\cos\beta - (P\sin\beta + G_1) f \frac{r_2}{R_1 - r_1}$$

Proszę porównać prawą stronę równania (16) z prawą stroną równania (28) z zad. 3 z tematyki ogólnego równania dynamiki. Na tym etapie warto sprawdzić jednostkę we wszystkich członach rozwiązania. Jednostka to [Nm], gdyż siła uogólniona Q jest momentem siły (ze względu na przyjętą współrzędną uogólnioną).