$$s = 3 \cdot 3 - 3 = 6 \tag{p6.2}$$

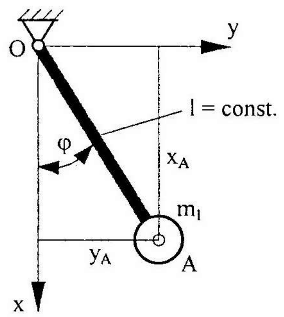
Uwaga!

Stopnie swobody to liczba niezależnych współrzędnych, które w sposób jednoznaczny opisują położenie układu. Każda z tych współrzędnych określa niezależny ruch.

5.2. Współrzędne uogólnione

Położenie układów punktów materialnych lub ciał sztywnych będzie jednoznacznie określone, jeżeli podamy współrzędne kartezjańskie wszystkich punktów tworzących układ. Na układ narzucamy więzy ograniczające ruch, czyli narzucamy ograniczenia na odpowiednie współrzędne. Wygodnie jest opisywać położenie układu za pomocą parametrów, które są już między sobą niezależne. Mogą to być wielkości zupełnie dowolne. Takie wielkości niezależne, wybrane w celu opisania położenia układu punktów lub ciał sztywnych, nazywamy współrzędnymi uogólnionymi.

Przykład 7
Opiszemy ruch wahadła matematycznego (rysunek).



Równania parametryczne punktu A są następujące:

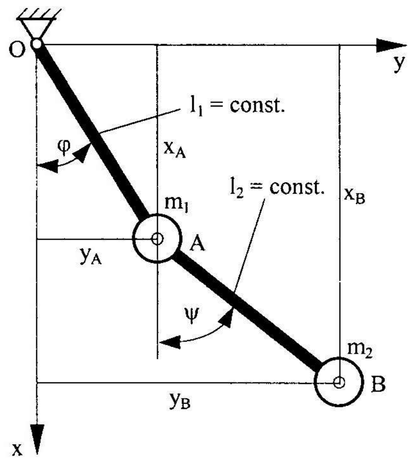
$$\begin{aligned} x_A &= l \cdot \cos\varphi = x_A(\varphi) \\ y_A &= l \cdot \sin\varphi = y_A(\varphi) \end{aligned} \qquad \text{(p7.1)}$$

Obie te wielkości zależą od kąta obrotu φ, który jest wielkością niezależną. Przyjmiemy więc, że: $\varphi = q_1$ - tzw. współrzędna uogólniona. Będziemy zatem mieli:

$$\begin{aligned} x_A &= x_A(q_1) \\ y_A &= y_A(q_1) \end{aligned} \qquad \text{(p7.2)}$$

Przykład 8

Dwie masy: m_1 i m_2 zawieszono na nierozciągliwej nici, co pokazano na rysunku
Określimy współrzędne punktów charakterystycznych układu.



Dla punktu A, w którym zawieszona jest masa m_1, mamy:

$$
\begin{aligned}
x_A &= l_1 \cdot \cos\varphi \\
y_A &= l_1 \cdot \sin\varphi
\end{aligned}
\tag{p8.1}
$$

Współrzędne punktu B będą następujące:

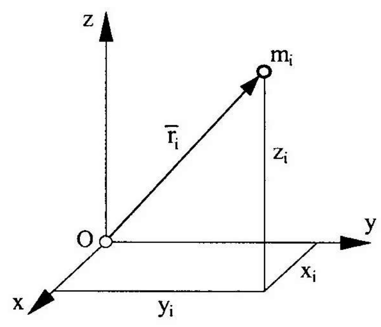
$$\begin{aligned} x_B &= l_1 \cdot \cos\varphi + l_2 \cdot \cos\psi \\ y_A &= l_1 \cdot \sin\varphi + l_2 \cdot \sin\psi \end{aligned} \tag{p8.2}$$

Układ posiada dwa stopnie swobody, bo jego jednoznaczne opisanie wymaga podania φ i ψ. Są to kąty, czyli tzw. współrzędne uogólnione. Będą więc dwie współrzędne uogólnione:

$$\begin{aligned} q_1 &= \varphi \\ q_2 &= \psi \end{aligned} \tag{p8.3}$$

Z pokazanych przykładów wynika, że współrzędne kartezjańskie są faktycznie współrzędnymi uogólnionymi, czyli jeżeli ruch układu opisują współrzędne uogólnione
$q_1, q_2, \ldots, q_S$, to wówczas (rys. 5):

$$\overline{r}_i = \overline{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_S) \tag{11}$$



Rys. 5

Uwaga!

Współrzędne uogólnione mogą być współrzędnymi kątowymi lub współrzędnymi liniowymi:

$q_1, q_2, ..., q_S$ - współrzędne uogólnione.

Różniczkując po czasie te wielkości, dostaniemy prędkości uogólnione, co oznaczymy:

$\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_S$ - prędkości uogólnione.

Kolejne różniczkowanie daje nam:

$\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, ..., \ddot{q}_S$ - przyspieszenia uogólnione.

5.3. Uogólnione przesunięcie wirtualne

Wektor promień opisujący położenie punktu wyrażamy w funkcji współrzędnych uogólnionych:

$$\overline{r}_i = \overline{r}_i\left(q_1, q_2, ..., q_S\right) \tag{12}$$

Równanie (12) różniczkujemy względem czasu:

$$\frac{d\overline{r}_i}{dt} = \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1} \cdot \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_2} \cdot \frac{dq_2}{dt} + ... + \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_S} \cdot \frac{dq_S}{dt} \tag{13}$$

Prędkość liniowa i-tego punktu wyniesie zatem:

$$\overline{v}_i = \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + ... + \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_S} \cdot \dot{q}_S \tag{14}$$

Przesunięcie wirtualne i-tego punktu wyniesie:

$$\delta \overline{r}_i = \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_2} \cdot \delta q_2 + ... + \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_S} \cdot \delta q_S \tag{15}$$

Z równania (15) wyróżniamy wielkości:

$$\left.\begin{array}{l}\delta q_1 = k \cdot \dot{q}_1 \\ \delta q_2 = k \cdot \dot{q}_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \delta q_S = k \cdot \dot{q}_S\end{array}\right\} \tag{16}$$

Równania (16) to tzw. uogólnione przesunięcia wirtualne układu. Jest ich tyle, ile układ posiada stopni swobody. Porównując zależności (15) i (16), możemy zapisać:

$$\delta \overline{r}_i = k \cdot \overline{v}_i \tag{17}$$

W praktyce, aby określić równanie (15), postępujemy następująco:

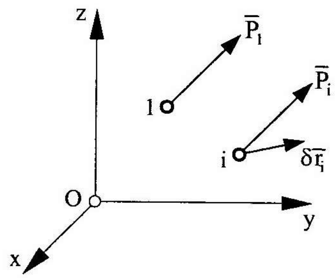
$$\begin{array}{l}\delta q_1 \neq 0, \quad \delta q_2 = 0, \quad ..., \quad \delta q_S = 0 \\ \left(\delta \overline{r}_i\right)_1 = \dfrac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 \\ \\ \delta q_2 \neq 0, \quad \delta q_1 = 0, \quad ..., \quad \delta q_S = 0 \\ \left(\delta \overline{r}_i\right)_2 = \dfrac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_2} \cdot \delta q_2\end{array} \tag{18}$$

itd., czyli $\delta \overline{r}_i = \left(\delta \overline{r}_i\right)_1 + \left(\delta \overline{r}_i\right)_2 + ... + \left(\delta \overline{r}_i\right)_S$. Przesunięcie wirtualne można zapisać:

$$\delta\overline{r}_i = \sum_{j=1}^{S}\left(\delta\overline{r}_i\right)_j = \sum_{j=1}^{S}\frac{\partial\overline{r}_i}{\partial q_j}\cdot\delta q_j \tag{19}$$

5.4. Siły uogólnione

Niech na układ o s stopniach swobody działa układ sił (rys. 6):



Rys. 6

Jeżeli $\delta q_1 \neq 0$, $\delta q_2 = ... = \delta q_S = 0$ ($q_2, q_3, ..., q_S$ = const. - to wartości stałe), praca przygotowana w przypadku pierwszej współrzędnej uogólnionej (wtedy układ ma l stopień swobody) będzie:

$$\delta L_1 = \overline{P}_1 \cdot (\delta \overline{r}_1)_1 + \overline{P}_2 \cdot (\delta \overline{r}_2)_1 + ... + \overline{P}_n \cdot (\delta \overline{r}_n)_1 = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \cdot (\delta \overline{r}_i)_1 = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 = Q_1 \cdot \delta q_1 \tag{20}$$

dla drugiej współrzędnej uogólnionej $\delta q_2 \neq 0$, $\delta q_1 = \delta q_3 = ... = \delta q_S = 0$, praca przygotowana:

$$\delta L_2 = \overline{P}_1 \cdot \left(\delta \overline{r}_1\right)_2 + \overline{P}_2 \cdot \left(\delta \overline{r}_2\right)_2 + \ldots + \overline{P}_n \cdot \left(\delta \overline{r}_n\right)_2 = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \cdot \left(\delta \overline{r}_i\right)_2 = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_2} \cdot \delta q_2 = Q_2 \cdot \delta q_2 \tag{21}$$

Postępując tak z każdą współrzędną uogólnioną, dojdziemy do ostatniej: $\delta q_S \neq 0$, $\delta q_1 = \ldots = \delta q_{S-1} = 0$, praca przygotowana:

$$\delta L_S = \overline{P}_1 \cdot \left(\delta \overline{r}_1\right)_S + \overline{P}_2 \cdot \left(\delta \overline{r}_2\right)_S + \ldots + \overline{P}_n \cdot \left(\delta \overline{r}_n\right)_S = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \cdot \left(\delta \overline{r}_i\right)_S = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_S} \cdot \delta q_S = Q_S \cdot \delta q_S \tag{22}$$

Z powyższych zależności określimy wielkości:

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \cdot \dfrac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_1} \\ Q_2 = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \cdot \dfrac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_S = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \cdot \dfrac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_S} \end{array}\right\} \tag{23}$$

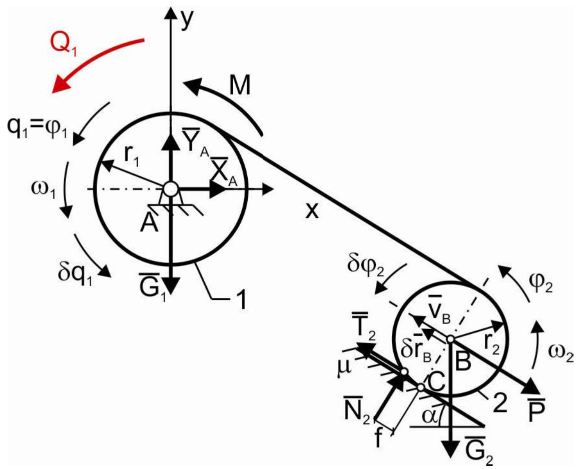
Równania (23) to tzw. siły uogólnione. Jest ich tyle, ile układ posiada stopni swobody.

Uwaga!

Siły uogólnione zastępują działanie tych wszystkich sił występujących w układzie, które wykonują pracę wirtualną.

Przykład 9

Dany jest mechanizm płaski pokazany na rysunku. Na krążek 1 nawijana jest lina, która jest odwijana z krążka 2, poruszającego się bez poślizgu po chropowatej i odkształcalnej sprężyście równi. Lina w czasie ruchu pozostaje napięta. Na krążek 1 działa para sił o momencie M [Nm], na krążek 2 działa siła oporu $\overline{P}$ [N]. Ponadto znane są promienie krążków r_1 [m] i r_2 [m], współczynnik tarcia suchego μ, współczynnik tarcia toczenia f [m], kąt pochylenia równi α [rad] i ciężary krążków $\overline{G}_1$ [N] i $\overline{G}_2$ [N]. Określić siłę uogólnioną układu.



Omawiany układ ma jeden stopień swobody, ponieważ ruch krążka 1 wymusza ruch krążka 2. Jako współrzędną uogólnioną przyjmijmy kąt obrotu krążka 1:

$$q_1 = \varphi_1 \tag{p9.1}$$

Przemieszczenie uogólnione to δq_1. Praca wirtualna jest równa sumie prac wirtualnych wykonywanych przez siły działające na poszczególne bryły, czyli:

$$Q_1 \cdot \delta q_1 = \delta L^{(1)} + \delta L^{(2)} \tag{p9.2}$$

Bryła 1 jest w ruchu obrotowym, bryła 2 w ruchu płaskim, więc:

$$Q_1 \cdot \delta q_1 = M_A \cdot \delta\varphi_1 + M_B \cdot \delta\varphi_2 + \overline{P}_2 \cdot \delta\overline{r}_B \tag{p9.3}$$

co po uwzględnieniu sił wykonujących pracę daje:

$$Q_1 \cdot \delta q_1 = M \cdot \delta\varphi_1 + \left(-T_2 \cdot r_2 - N_2 \cdot f\right) \cdot \delta\varphi_2 + \left(T_2 - P - G_2 \sin\alpha\right) \cdot \delta r_B \tag{p9.4}$$

Zależności pomiędzy przemieszczeniami przygotowanymi są następujące:

$$r_1 \cdot \delta\varphi_1 = 2 \cdot r_2 \cdot \delta\varphi_2 \;\Rightarrow\; \delta\varphi_2 = \frac{r_1}{2 \cdot r_2} \cdot \delta\varphi_1 = \frac{r_1}{2 \cdot r_2} \cdot \delta q_1 \tag{p9.5}$$

$$\delta r_B = r_2 \cdot \delta\varphi_2 = \frac{r_1}{2} \cdot \delta q_1 \tag{p9.6}$$

pracę wirtualną zapiszemy więc jako:

$$Q_1 \cdot \delta q_1 = \left[M - \left(P + G_2 \cdot \frac{f}{r_2} \cdot \cos\alpha + G_2 \cdot \sin\alpha \right) \cdot \frac{r_1}{2} \right] \cdot \delta q_1 \tag{p9.7}$$

Jeśli teraz to równanie podzielimy obustronnie przez δq_1, to otrzymamy wartość siły uogólnionej układu:

$$Q_1 = M - \left(P + G_2 \cdot \frac{f}{r_2} \cdot \cos\alpha + G_2 \cdot \sin\alpha \right) \cdot \frac{r_1}{2} \tag{p9.8}$$

Przykład 10

Dany jest mechanizm płaski pokazany na rysunku. Na krążek 1 nawijana jest lina, która opasuje krążek 2. Środek masy krążka 2 jest połączony sprężyną z wodzikiem 3, który pozostaje w ruchu postępowym. Na krążek 1 działa para sił o momencie M [Nm], na wodzik 3 działa siła oporu wiskotycznego $\overline{R}$ [N] proporcjonalna do prędkości poślizgu (prędkości ruchu względnego wodzika 3 względem prowadnic) tak, że $R = cv_D$, c [kg/s]. Ponadto znane są promienie