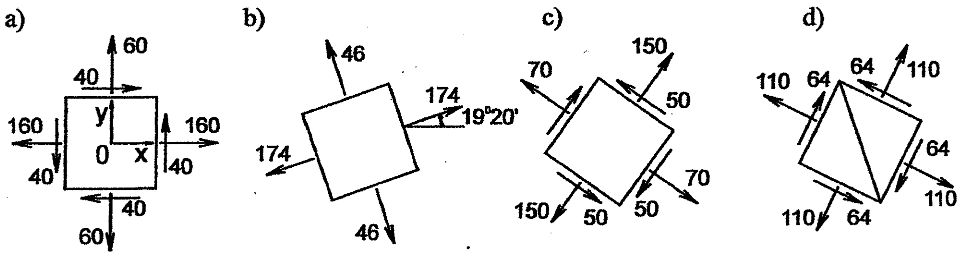
Przykład 1.1: Znane są naprężenia w punkcie 0: $\sigma_x = 160MPa$, $\sigma_y = 60MPa$, τ_{xy} = 40MPa (Rys. 6.1.a). Obliczyć: 1) wartości i kierunki główne naprężeń (Rys. 6b), 2) wartości naprężeń przy obrocie układu współrzędnych x, y o kat $\varphi_n = 45^0$, (Rys. 6c), 3) kierunek i wartość maks. naprężeń stycznych



Rys. 6.1 : a) Dane naprężenia, b) kierunek i naprężenia główne, c) naprężenia dla obrotu elementarnego kwadratu o $\varphi_n = 45^0$, d) kierunek maksymalnego naprężenia głównego i odpowiednie naprężenia główne

1). Obliczenia naprężeń głównych

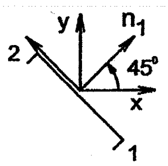
$tg2\varphi_{gl} =\ 0{,}8$ $\rightarrow 2\varphi_{gl} =\ 38{,}4$ $\rightarrow \varphi_{gl} = 19{,}2$

$J_1 =$ 220Mpa, $J_2 = 8000MPa^2$

$\sigma_1 =$ 174MPa , $\sigma_2 = 46MPa$

2). Obrót osi (x, y) o kąt $\varphi_n = 45^0$, stąd:

Na boku 1-2



$\varphi_n = 45^0$

$\sin\varphi_n = \cos\varphi_n = 0{,}7077$

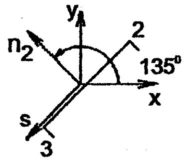
$\sin^2\varphi_n = \cos^2\varphi_n = 0{,}5$

$\sin 2\varphi_n = 1 \quad 2\varphi_n = 0$

$\sigma_n = 150MPa$

$\tau_{ns} = -50MPa$

Na boku 2-3



$\varphi_n = 135^0$

$\cos\varphi_n = -0{,}7077$, $\sin\varphi_n = 0{,}7077$

$\sin^2\varphi_n = \cos^2\varphi_n = 0{,}5$

$\sin 2\varphi_n = \sin 270^0 = -1$, $\cos 2\varphi_n = 0$

$\sigma_n^{'} = 70MPa$

$\tau_{ns} = 50MPa$

3) Maks. naprężenia styczne

$ctg2\varphi_{st} = -0{,}8$ $\rightarrow 2\varphi_{st} = 128{,}4$

$\tau_{max} = -64MPa$

$\sigma_{1/2} = 110MPa$

Znane są naprężenia w pkt K : $\sigma_x = 6\,MPa$; $\sigma_y = 3\,MPa$, $\tau_{xy} = -2\,MPa$

a) obliczyć wartości i kierunki naprężeń głównych

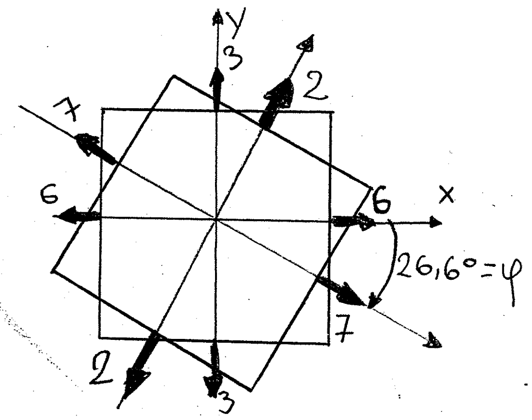
b) obliczyć wartości i kierunki maksymalnych naprężeń stycznych

c) obliczyć wartości naprężeń przy obrocie układu współrzędnych o kąt 30°

<u>Odp:</u>

a)

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$



• Kierunek główny

$$tg\, 2\varphi_{gł} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$tg\, 2\varphi_{gł} = \frac{2\cdot(-2)}{6-3}$$

$$2\varphi_{gł} = arctg\left(\frac{-4}{3}\right)$$

$$\varphi = -26{,}6^\circ$$

• Naprężenia główne:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(6+3) + \frac{1}{2}\sqrt{(6-3)^2 + 4\cdot(-2)^2} = 7\,MPa$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(6+3) - \frac{1}{2}\sqrt{(6-3)^2 + 4\cdot(-2)^2} = 2\,MPa$$

b)

$$\varphi_{st} = \varphi_{gł} + 45^\circ$$

$$\varphi_{st} = -26{,}6^\circ - 45^\circ = -71{,}6^\circ$$

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{7+2}{2} = 4{,}5\,MPa$$

$$\tau_{max} = \left|\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\right| = \left|\frac{2-7}{2}\right| = \frac{2+7}{2} = 4{,}5\,MPa$$

c) po obrocie tensor wygląda

$$T_\sigma' = \begin{vmatrix} \sigma_x' & \tau_{xy}' \\ \tau_{xy}' & \sigma_y \end{vmatrix}$$

1'–2'

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2\varphi + \sigma_y \sin^2\varphi + \tau_{xy}\cdot \sin 2\varphi$$

$$\sigma_n = 6\cdot\cos^2(30^\circ) + 3\cdot\sin^2(30^\circ) - 2\sin 60^\circ = 3{,}52\,MPa$$

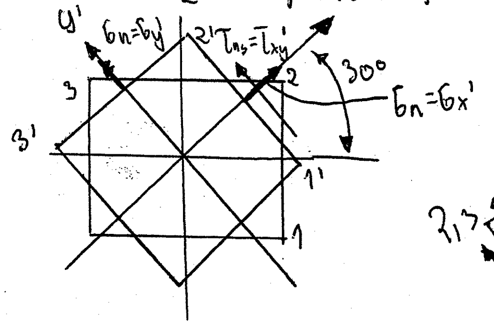
$$\tau_{ns} = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi$$

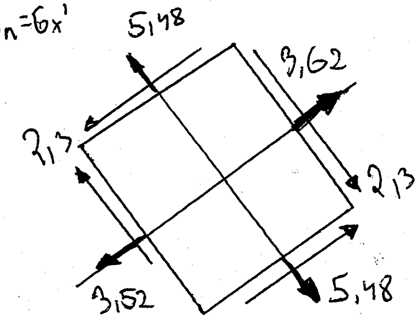
$$\tau_{ns} = \frac{1}{2}(3-6)\sin(60^\circ) + (-2)\cos(60^\circ) = -2{,}30\,MPa$$

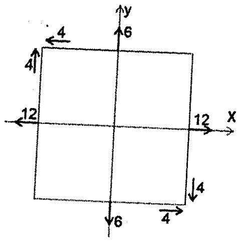
2'–3' $\qquad \varphi = 120^\circ$ $(90^\circ + 30^\circ)$

$$\sigma_n = 6\cdot\cos^2(120^\circ) + 3\sin^2(120^\circ) + \tau_{xy}\cdot\sin(240^\circ) = 5{,}4$$

$$\tau_{ns} = \frac{1}{2}(3-6)\sin(240) + (-2)\cos(240^\circ) = 2{,}30\,MPa$$





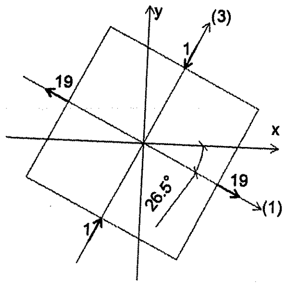


Zad. 2. Znane są naprężenia w punkcie K:

$\sigma_x = 12\ MPa; \sigma_y = 6\ MPa; \sigma_z = -4\ MPa$

1. Oblicz wartości i kierunki naprężeń głównych

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}{}^2}$$
$$= \frac{1}{2}(12+6) \pm \sqrt{(12-6)^2 + 4\cdot(-4)^2}$$
$$= 9 \pm 10 \rightarrow {}^{\sigma_1 = 19}_{\sigma_3 = -1}\ MPa$$



$$\tan 2\varphi_{gł} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\cdot(-4)}{12-6} = -1{,}33$$

$$\tan^{-1}(-1{,}33) = 2\varphi_{gł} \rightarrow \varphi_{gł} = -26{,}5°$$

$$T_\sigma^o = \begin{bmatrix} 19 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} MPa$$

2. Oblicz wartość naprężeń przy obrocie o kąt 45°

$1' - 2' \rightarrow \varphi = 45°$

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2\varphi + \sigma_y \cdot \sin^2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi = 12\cdot\cos^2 45° + 6\cdot\sin^2 45° - 4\cdot\sin\ 90° = 5\ MPa$$

$$\tau_n = \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\cdot\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi = \frac{1}{2}(6-12)\sin 90° - 4\cos 90° = -3\ MPa$$

$2' - 3' \rightarrow \varphi = 90 + 45 = 135°$

$$\sigma_n = 12\cdot\cos^2 135° + 6\cdot\sin^2 135° - 4\cdot\sin\ 270° = 33\ MPa$$

$$\tau_n = \frac{1}{2}(6-12)\sin 270° - 4\cos 270° = 3\ MPa$$

$$T_\sigma' = \begin{bmatrix} \sigma_x' & \tau_{xy}' & 0 \\ \tau_{yx}' & \sigma_y' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 33 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$