

Spis treści

1. Wprowadzenie	4
1.1. Słowo wyjaśnienia i zachęty dla studentów	6
2. Drgania mechaniczne	9
2.1. Informacje wstępne	9
2.2. Kinematyka drgań	17
2.1.1. Pojęcia podstawowe	17
2.1.2. Wektorowa interpretacja drgań	21
2.1.3. Składanie drgań harmoniczych	23
2.2. Rodzaje wymuszeń: harmoniczne, skokowe, udarowe	38
2.3. Podstawy modelowania układów drgających	44
3. Drgania układu o jednym stopniu swobody	51
3.1. Położenie równowagi statycznej	51
3.2. Drgania swobodne	58
3.3. Drgania tłumione	66
3.3.1. Równania ruchu	66
3.3.2. Tłumienie podkrytyczne	68
3.3.3. Tłumienie krytyczne	76
3.3.4. Tłumienie nadkrytyczne	79
3.4. Drgania wymuszone z tłumieniem wiskotycznym	83
3.4.1. Równania ruchu	83
4. Wibroizolacja	94

4.1. Wibroizolacja przy wymuszeniu harmonicznym.....	95
4.1.1. Wibroizolacja czynna	95
4.1.2. Wibroizolacja bierna	101
5. Drgania układu mechanicznego o dwóch stopniach swobody.....	106
5.1. Drgania wzdłużne	106
5.2. Drgania skrętne	124
6. Drgania samowzbudne	129
6.1. Galopowanie przewodów elektrycznych.....	129
6.2. Przekroje niestateczne dynamicznie	133
6.3. Flatter skrzydła samolotu	141
7. Wybrane zagadnienia dynamiki maszyn wirnikowych	151
7.1. Prędkości krytyczne	151
7.2. Prędkości krytyczne Reakcje dynamiczne w łożyskach	159
7.3. Wyważenie statyczne	161
7.4. Wyważenie dynamiczne.....	166
7.5. Wyważenie odkształcalnych wirników.....	177
Dodatek A. Przykłady.....	181
A.1. Drgania układu o jednym stopniu swobody	181
A.1.1. Wyznaczanie deformacji statycznej sprężyny (kryterium Lagrange'a – Dirichleta).....	181
A.1.2. Wyznaczenie częstości drgań własnych metodą energetyczną.....	187
A.1.3. Drgania swobodne	190
A.1.4. Drgania swobodne tłumione (z tarcie wiskotycznym)	193
A.1.5. Drgania wymuszone tłumione (z tarcie wiskotycznym).....	202

A.2. Drgania układu o dwóch stopniach swobody	212
A.2.1. Różniczkowe równania ruchu	212
A.2.2. Wyznaczenie częstości własnych układu.....	217
A.2.3. Drgania wymuszone nietłumione.....	223
A.3. Drgania giętne belki wspornikowej.....	228
A.3.1. Wyznaczenie częstości własnej metodą energetyczną	228
A.3.2. Drgania swobodne tłumione	233

1. Wprowadzenie

Na rynku wydawniczym istnieje wiele pozycji dotyczących bardzo szerokiego zagadnienia jakim jest dynamika maszyn. Ze względu na ogromny zakres tematyczny przedmiotu, nie sposób w jednym opracowaniu zamieścić wszystkich istotnych treści.

Na dynamikę układów mechanicznych można bowiem patrzeć co najmniej w dwojaki sposób:

- można skupić się na opisie głównych zjawisk związanych z ruchem i jego przyczynami, pomijając całe bogactwo zjawisk towarzyszących, albo
- skoncentrować uwagę na zjawiskach z pozoru marginalnych, jak np. deformacje czy drgania układu, mających jednak zasadniczy wpływ na eksploatację, zużycie układu czy wytrzymałość zmęczeniową elementów.

W celu pełnego zrozumienia działania układów mechanicznych, ich poprawnego konstruowania, ale również diagnozowania czy serwisowania konieczna jest umiejętność opisu i analizy dynamiki układów mechanicznych zarówno na tym poziomie związanym z funkcją pełnioną przez układ jak i na poziomie zjawisk towarzyszących ruchowi.

Układy, którymi będziemy się zajmować, czyli mechanizmy i maszyny, składają się z ciał materialnych, czyli brył o dowolnym kształcie i masie. Często w celu uproszczenia będziemy zakładać, że ciała materialne nie deformują się, tzn. będziemy je traktować jako bryły sztywne. Wówczas naszym celem będzie opis ruchu układu w zakresie dotyczącym kinematyki i dynamiki.

W rzeczywistości wszystkie ciała materialne deformują się, czyli są odkształcalne. Deformacje niektórych elementów maszyn są na tyle duże, że nie można ich pomijać i wówczas należy przyjąć odpowiedni model ciała uwzględniający podatność. Będzie to prowadzić do bardziej złożonego, ale bardziej wiarygodnego opisu dynamiki układów. Rozwiązując zagadnienia tego typu będziemy korzystali z teorii drgań mechanicznych.

Z powodu szerokiej tematyki i różnorodności treści kształcenia wynikała potrzeba opracowania skryptu dla studentów kierunków mechatronika oraz lotnictwo Wydziału Budowy Maszyn i Lotnictwa Politechniki Rzeszowskiej. W zamierzeniu autora niniejszy skrypt ma uwzględniać specyfikę wymienionych kierunków, co ma pomóc studentom w lepszym przygotowaniu do pełnienia roli inżynierów wybranych specjalności.

Dlatego w skrypcie poza typową tematyką związaną z opisem dynamiki układów mechanicznych zamieszczono specyficzne treści związane z kierunkiem mechatronika oraz lotnictwo jak np.:

- kinematyka i dynamika przekładni obiegowych stosowanych zarówno w lotnictwie jak i w układach napędowych robotów,
- analiza drgań samowzbudnych na przykładzie flatteru skrzydła samolotu
- czy kinematyka i dynamika ramienia robota przemysłowego.

Zamiarem autora jest nie tylko przekazanie czytelnikom wiedzy na temat dynamiki układów mechanicznych ale również próba wyjaśnienia skomplikowanych niekiedy zjawisk na stosunkowo prostych przykładach znanych z codziennego życia oraz opowiadanie o dynamice maszyn w możliwie przystępny sposób.

1.1. Słowo wyjaśnienia i zachęty dla studentów

Przedmiot dynamika maszyn na Waszej Uczelni wyrósł z dwóch, kiedyś odrębnie nauczanych przedmiotów, tj. z:

- teorii maszyn i mechanizmów (TMM) oraz
- drgań mechanicznych.

TMM dotyczyła głównie analizy strukturalnej układów oraz opisu ich kinematyki i dynamiki. Znane z mechaniki ogólnej formalizmy matematyczne były odpowiednio stosowane do opisu konkretnych układów mechanicznych, jak np. mechanizmy:

- korbowo-wodzikowe,
- krzywkowe,
- zębate,
- czy jarzmowe.

Większość z układów analizowanych w ramach TMM występowała i nadal występuje w pojazdach samochodowych: w silniku, układzie przeniesienia napędu, układzie kierowniczym, zawieszeniu czy osprzęcie. Była to więc teoria bardzo pragmatyczna.

Z kolej drgania mechaniczne dotyczyły opisu dynamiki ruchów o charakterze oscylacyjnym wynikających ze sprężystych deformacji układów. Przykładami mogą tu być:

- drgania skrętne wałów w przekładniach,
- drgania pojazdów
- drgania obrabiarek.

Kilkadziesiąt lat temu te dwa przedmioty, obok mechaniki ogólnej, wytrzymałości materiałów czy podstaw konstrukcji maszyn, stanowiły rdzeń nauczania na studiach inżynierskich. Rozwój nauk z obszaru automatyzacji i sterowania oraz technologii informatycznych czy sztucznej inteligencji powodował stopniowe wprowadzanie nowych treści nauczania kosztem dotychczasowych.

Jest to zjawisko całkiem naturalne i pozytywne, mające jednak jeden ważny i niebezpieczny skutek. Mianowicie studenci coraz mniej czasu poświęcają na poznanie i zrozumienie układów mechanicznych, które jednak chcą projektować a później nimi sterować czy latać.

Ponadto tradycyjne przedmioty wymagają dobrego przygotowania matematycznego, są więc raczej trudne, a wręcz bywają postrzegane jako nudne (wykładowcy trudno na wykładzie ze swadą opowiadać o przyspieszeniach drugiego rzędu w układzie korbowo wozzikowym).

Na skutek takiego podejścia studenci często biorą w swoje ręce układy, których nie rozumieją albo rozumieją jedynie „z grubsza” i większość problemów starają się przezwyciężyć przez „**inteligentne**” aplikacje sterujące układami mechanicznymi albo działają wg zasady „**wciśnijmy przycisk i zobaczymy co się wydarzy**”.

Niestety wcześniej czy później stara dobra fizyka przypomina o swoim istnieniu. I wtedy w modelach konstruowanych samolotów urywają się skrzydła np. z powodu drgań samowzbudnych, w układach wirnikowych pojawiają się nieprzewidziane efekty giroskopowe, a dokładność ruchu sterowanych robotów jest żenująco niska np. z powodu nieprzewidzianych zjawisk tarcowych.

Oczywiście nie da się całkowicie wyeliminować niepowodzeń i są one naturalnym składnikiem działalności inżynierskiej. Ale wielu z nich można by uniknąć, gdyby miało się **podstawową wiedzę z zakresu dynamiki układów mechanicznych**. Temu celowi ma służyć niniejszy przedmiot, na którym będą omawiane układy specyficzne dla kierunku **mechatronika** i **lotnictwo**. Są to zresztą dziedziny przenikające się, ponieważ współczesne samoloty są przecież urządzeniami mechatronicznymi.

2. Drgania mechaniczne

2.1. Informacje wstępne

Drgania mechaniczne to wszelkiego rodzaju ruchy oscylacyjne zachodzące w układach mechanicznych. W technice przez drgania mechaniczne rozumiemy „małe” ruchy masy o charakterze oscylacyjnym wokół położenia równowagi statycznej. Mogą one mieć przyczyny naturalne lub być wywołane działalnością człowieka.

Do drgań o przyczynach naturalnych można zaliczyć:

- losowe wstrząsy sejsmiczne,
- uderzenia wiatru
- uderzenia fal.

Drgania wywołane działalnością człowieka są związane z pracą wszelkiego rodzaju maszyn i urządzeń. Emitują one drgania mechaniczne o różnych amplitudach i częstościach, które mogą przenosić się na podłoże, fundamenty i konstrukcje powodując szkodliwe oddziaływanie na operatora (człowieka) czy konstrukcję (zarysowanie, pęknięcie lub zniszczenie). Typowymi przyczynami takich drgań mechanicznych są:

- ruch uliczny (tramwaje, samochody),
- wybuchy i eksplozje (odstrzały w kamieniołomach, wystrzały z broni palnej),
- maszyny stosowane w produkcji przemysłowej.

Podstawowymi parametrami służącymi do określenia ruchu drgającego są amplituda i częstotliwość drgań. Amplituda drgań jest podawana w jednostkach odpowiednich dla danej wielkości fizycznej, np. przemieszczenie podajemy w 1 [m], prędkość w 1 [m/s], itp. Częstotliwość drgań podajemy w jednostkach 1 [Hz]. Wiadomo, że: $\omega = \frac{2\pi}{T} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ to częstość drgań, T [s] to okres drgań, $f = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{\text{s}} \right]$ to częstotliwość drgań, czyli $\omega = 2\pi f$. Zatem częstość nie jest równa częstotliwości i nie wolno ich mylić.

W widmie drgań mechanicznych można wyróżnić:

- drgania o małej częstości, od 0-200 [Hz],
- drgania o średniej częstości, od 200-2000 [Hz],
- drgania o dużej częstości, powyżej 2000 [Hz].

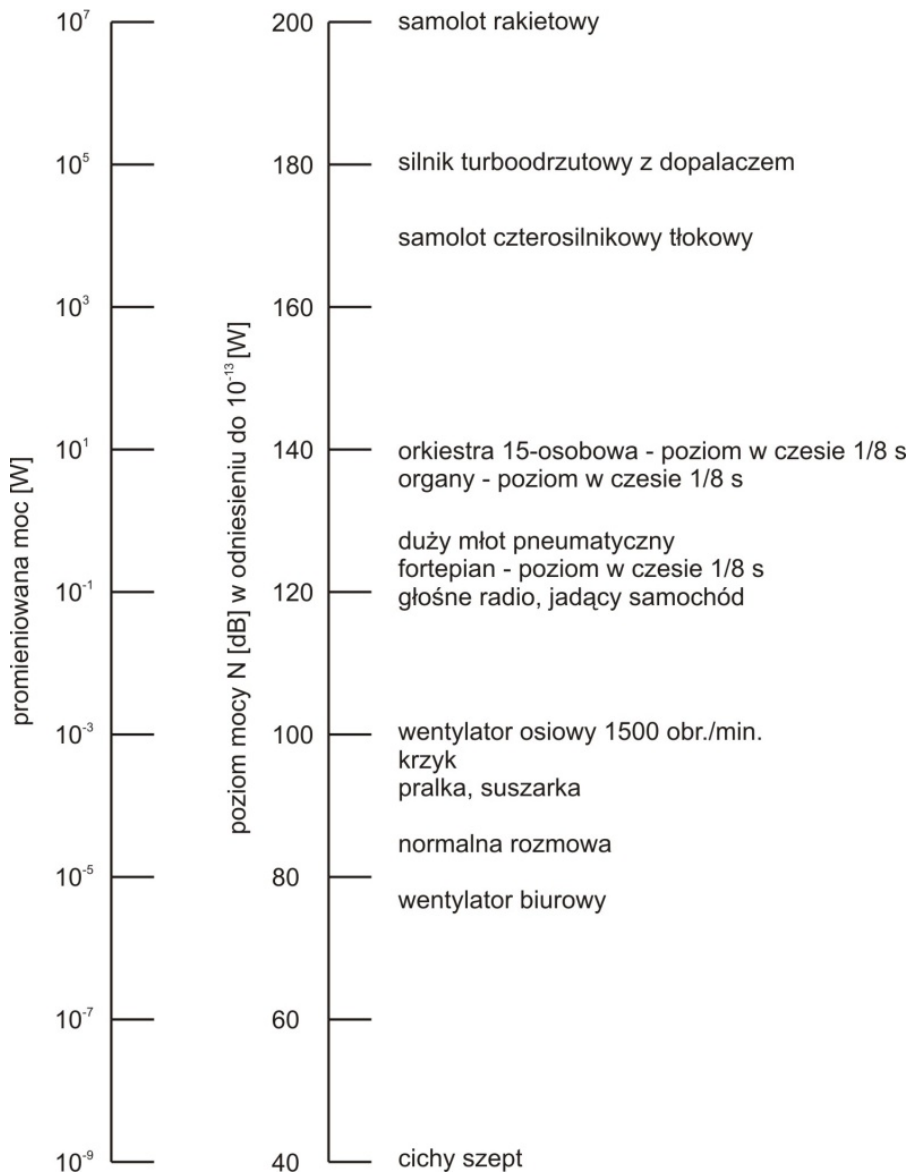
Drgania mechaniczne o częstościach od 0 do kilkudziesięciu tysięcy [Hz] bywają szkodliwe zarówno dla ludzi jak również maszyn i urządzeń. Stwierdzenie, że drgania „bywają szkodliwe” sugeruje, że nie zawsze są szkodliwe. Tak w istocie jest, a niektóre korzystne zjawiska drganiowe zostaną omówione w innym miejscu.

Każde naruszenie równowagi w ośrodkach ciągłych takich jak gaz, ciecz czy ciało stałe jest przyczyną powstania ruchu oscylacyjnego (czyli drgań) cząsteczek ośrodka. Ten ruch drgający powoduje powstanie ruchu falowego w ośrodku, ruch falowy emituje dźwięki, stąd mówimy o falach akustycznych. Fale akustyczne mogą być o różnym charakterze (np. kuliste rozchodzące się w przestrzeni – czoło fali to powierzchnia kulista; gdy czoło fali jest płaszczyzną nazywamy ją falą płaską - może być to fala podłużna lub poprzeczna, nie wchodzimy tu w szczegóły ruchu falowego, tym zagadnieniem zajmuje się nauka zwana akustyką).

Obszar, w którym rozchodzą się fale akustyczne nazywamy polem akustycznym. Najczęściej mierzonymi wartościami pól akustycznych są: ciśnienie akustyczne, natężenie dźwięku lub moc akustyczna. Pomiar tych wielkości fizycznych, ze względu na dużą rozpiętość ich wartości, wyrażamy w skali logarytmicznej jako stosunek danej wartości do przyjętej tzw. wartości odniesienia. Tak określoną jednostką są tzw. decybele. Np. poziom mocy akustycznej to

$$L_N = 10 \lg \frac{N_a}{N_o} [dB], \quad (1)$$

gdzie N_a to zmierzona moc akustyczna, N_o to akustyczna moc odniesienia przyjęta jako $N_o = 10^{-3} [W]$. Na rys. 1 podano przykładowe moce akustyczne promieniowane przez różne źródła dźwięku. Moc akustyczna to ilość energii wysyłanej przez źródło dźwięku w jednostce czasu, np. cichy szept to moc $10^{-9} [W]$, normalna rozmowa to moc $10^{-5} [W]$, startujący samolot odrzutowy to moc $10^7 [W]$.



Rys. 1.

Rozchodzące się fale akustyczne charakteryzują się również prędkością rozchodzenia (prędkość rozchodzenia się fali akustycznej w powietrzu to tzw. prędkość dźwięku - przy temperaturze 20°C wynosi 340 [m/s]).

Widmo hałasu mechanicznego emitowane przez układy drgające zależy w głównej mierze od wielkości prędkości oscylacji, a w przypadku gdy występuje uderzenie mechaniczne widmo hałasu zależy od wielkości przyspieszenia drgań. Tylko drgania o małej częstotliwości są nośnikami energii wibroakustycznej generowanego widma i te drgania są decydującymi w zagadnieniach wytrzymałości maszyn i urządzeń. Są one słabo tłumione i rozprzestrzeniają się na duże odległości. Istotnym problemem związanym z emisją hałasu są wszelkiego rodzaju przepływy w rurach, wypływy z dysz ciecży czy gazu. To tzw. hałasy hydro- i aerodynamiczne.

Wszelkiego rodzaju hałas można identyfikować dokonując pomiarów tzw. widma hałasu. Widmo hałasu można podzielić na:

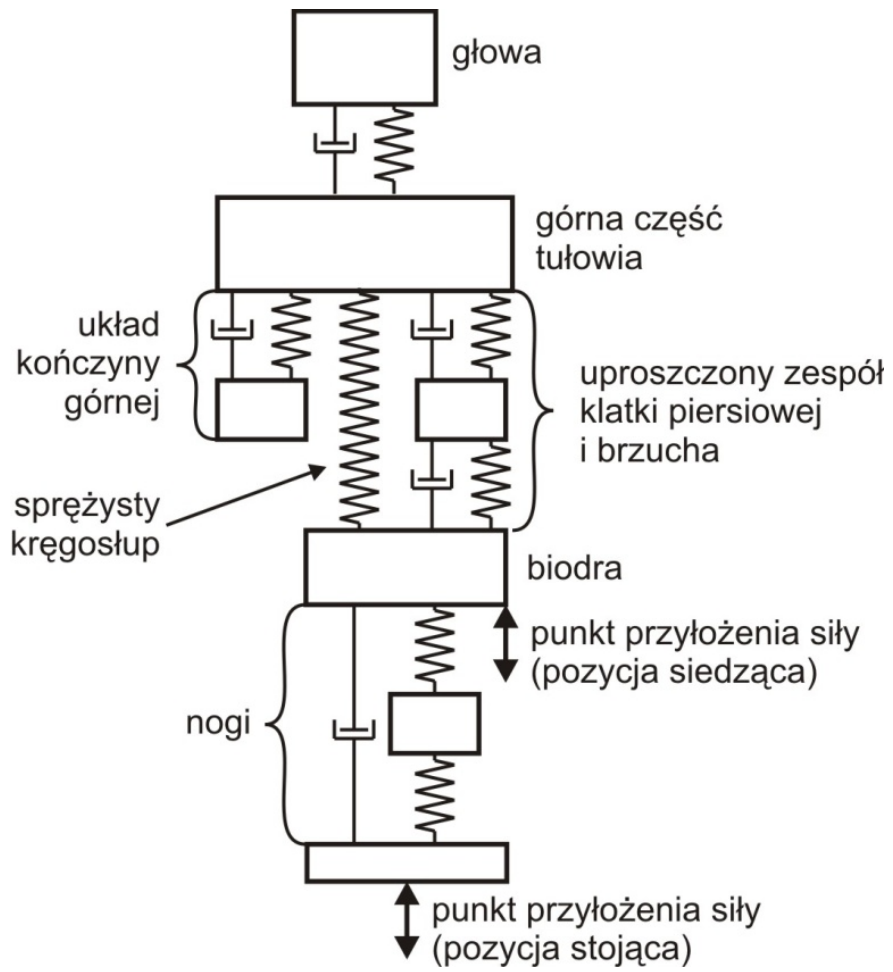
- infradźwięki, $0 < f < 16$ [Hz],
- dźwięki słyszalne (po prostu dźwięki), $16 < f < 20 \cdot 10^3$ [Hz],
- ultradźwięki, $20 \cdot 10^3 < f < 10^9$ [Hz],
- hiperdźwięki, $f > 10^9$ [Hz].

Źródłami drgań mechanicznych i fal akustycznych są:

- układy techniczne, w których powstawanie drgań wynika z:
 - konstrukcji (to wszelkiego rodzaju mechanizmy),
 - przyczyn technologicznych (niedokładności wykonawcze i montażowe maszyn i urządzeń, niewyważenie elementów wirujących),
 - przyczyn eksploatacyjnych (zużycie elementów, luzy, niewłaściwe smary itp.).
- procesy aerodynamiczne czy hydrodynamiczne (wszelkiego rodzaju przepływy i wypływy),
- realizacja procesu technologicznego (np. budowa drogi czy praca obrabiarek w hali fabrycznej).

Jednym z podstawowych problemów techniki jest zagadnienie wpływu drgań mechanicznych i hałasu na człowieka jako operatora oraz wpływ na środowisko naturalne. Tymi problemami zajmuje się dziedzina nauki zwana biomechaniką.

Wpływ drgań na człowieka można rozpatrywać wg: wartości parametrów opisujących drgania, czyli amplitudy przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń oraz częstotliwości, czasu ich występowania, miejsca przekazywania drgań na człowieka, pozycji odbioru (stojąca, siedząca, leżąca), indywidualnych cech fizjologicznych i psychologicznych człowieka jak: wiek, wzrost, płeć, stan zdrowia itp. Rozpatrując reakcje organizmu człowieka na działanie drgań, ciało ludzkie można przedstawić w postaci modelu przedstawionego na rys. 2.



Rys. 2.

Badania doświadczalne pozwoliły określić dopuszczalne normy i normatywy dotyczące oddziaływania bezpiecznego drgań i hałasu na człowieka. Szkodliwy wpływ drgań na człowieka to zaburzenia w układach:

- krążenia,
- mięśniowym,
- nerwowym,
- kostno-stawowym.

W normach i normatywach uwzględnia się fakt, że drgania mogą być:

- nieodczuwalne,
- wyraźnie odczuwalne,
- bardzo silnie odczuwalne,
- trudne do zniesienia,
- nie do zniesienia.

Podsumowując negatywny wpływ drgań na otoczenie można stwierdzić, że drgania mechaniczne są nie tylko szkodliwe dla ludzi, ale mogą powodować uszkodzenia budynków, hal fabrycznych czy samych maszyn generujących drgania. Wpływają bardzo niekorzystnie na realizację procesów produkcyjnych. W ostatnim czasie analizuje się szczególnie niekorzystny wpływ drgań i hałasu komunikacyjnego na środowisko (stąd lotniska znajdują się daleko od zabudowy, przy drogach budowane są ekrany akustyczne). Rolą konstruktorów i eksploatorów różnych układów mechanicznych jest budowa i użytkowanie takich układów, gdzie tzw. poziom drgań i towarzyszący im hałas są minimalne.

2.2. Kinematyka drgań

2.1.1. Pojęcia podstawowe

Jeśli droga jest okresową funkcją czasu, t ruch nazywa się ruchem okresowym, czyli powtarzającym się identycznie po czasie T nazywanym okresem ruchu. Do zupełnego opisanie ruchu okresowego wystarczy więc opisanie ruchu w jednym okresie.

Jeśli ruch okresowy jest opisany równaniem $x = y(t)$, to przy pewnych założeniach¹ można tę funkcję okresową przedstawić w postaci szeregu trygonometrycznego Fouriera

$$\begin{aligned} y(t) &= A_0 + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \dots \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \end{aligned} \tag{1}$$

lub w innej postaci

¹ Założmy, że funkcja y jest funkcją okresową o okresie T . Jeśli y spełnia następujące trzy warunki (zwane *warunkami Dirichleta*):

1. funkcja y jest bezwzględnie całkowna, tzn.:

$$\int_{-T/2}^{T/2} |y(x)| dx < \infty$$

2. funkcja y w przedziale jednego okresu ma skończoną liczbę maksimów lokalnych i minimów lokalnych,
 3. funkcja y w przedziale jednego okresu posiada skończoną liczbę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju,
- to y ma reprezentację w postaci szeregu Fouriera.

$$\begin{aligned}
 y(t) &= A_0 + A_1 \sin(\omega t + \gamma_1) + A_2 \sin(2\omega t + \gamma_2) + A_3 \sin(3\omega t + \gamma_3) + \dots \\
 &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \gamma_n)
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

gdzie $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\operatorname{tg}(\gamma_n) = \frac{a_n}{b_n}$. Funkcje $A_n \sin(n\omega t + \gamma_n)$ nazywa się funkcjami harmonicznymi n -tego rzędu. Innymi słowy funkcję okresową $y(t)$ można rozłożyć na składowe funkcje harmoniczne.

Ruch określony równaniem (dla uproszczenia wzięto pojedynczą funkcję harmoniczną)

$$x = A \sin(\omega t + \gamma) \tag{3}$$

nazywany jest ruchem lub drganiem harmonicznym, gdzie:

ω – częstość drgań

γ – faza ruchu (kąt przesunięcia fazowego)

A – amplituda drgań

Pomiędzy okresem ruchu harmonicznego a jego częstością zachodzi zależność:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{4}$$

Wielkość $1/T$ określającą liczbę okresów odbytych w jednostce czasu nazywa się częstotliwością f .

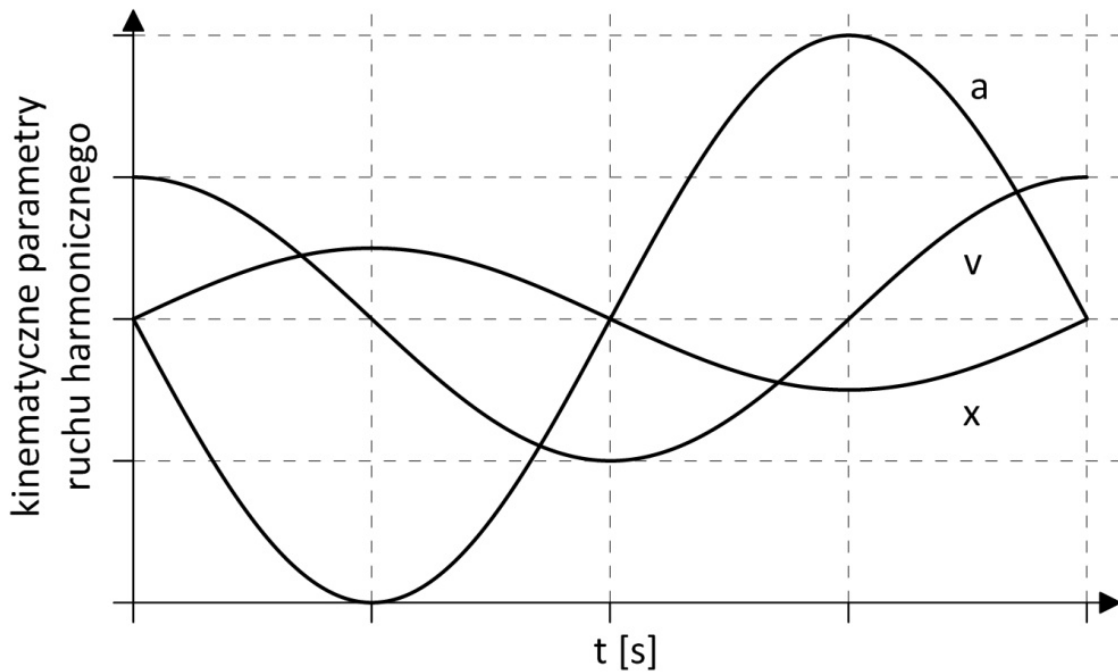
Pochodne drogi (3) względem czasu to prędkość

$$v = \dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \gamma) = A\omega \sin\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{2}\right) \quad (5)$$

oraz przyspieszenie

$$a = \ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \gamma) = A\omega^2 \sin(\omega t + \gamma + \pi) \quad (6)$$

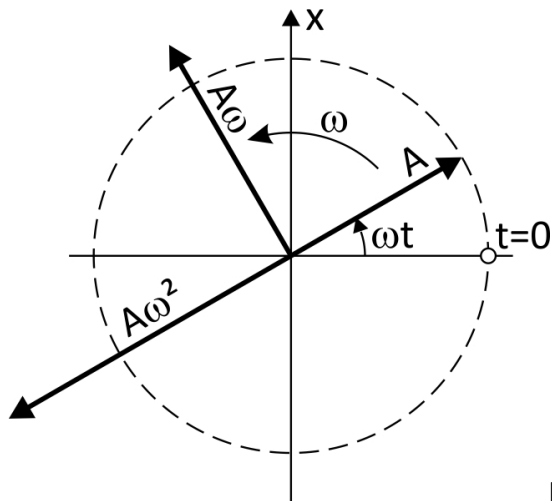
Z zestawienia wzorów (3), (5) i (6) wynika, że prędkość ruchu harmonicznego jest przesunięta w fazie o $\frac{\pi}{2}$ względem przemieszczenia, a przyspieszenie jest przesunięte o π , czyli jest w tzw. przeciw-fazie względem przemieszczenia. Na rys. 3 pokazano przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie w ruchu harmonicznym przy założeniu, że kąt przesunięcia fazowego $\gamma = 0$.



Rys. 3.

2.1.2. Wektorowa interpretacja drgań

Ruch drgający harmoniczny można przedstawić za pomocą wirującego wektora. Załóżmy, że wektor A obraca się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara ze stałą prędkością kątową ω .



Rys. 4

Jeśli rozpoczniemy odmierzać czas od chwili, kiedy wektor zajmuje położenie poziome, to jego rzut poziomy będzie równy $A\cos(\omega t)$, zaś rzut pionowy będzie równy $A\sin(\omega t)$. Każdy z rzutów możemy zastosować do opisu ruchu harmonicznego, lecz w dalszych rozważaniach będziemy posługiwać się rzutem pionowym, czyli na oś x , zapisując:

$$x = A\sin(\omega t)$$

(7)

Taka interpretacja była powodem wprowadzenia nazwy *częstość kołowa* lub *pulsacja* w odniesieniu do parametru ω . Obecnie często stosuje się po prostu nazwę *częstość*. Ponieważ wielkość ω jest prędkością kątową wektora, wyrażana jest w $[rad/s]$. Z wzoru (4) wynika, że $\omega = 2\pi f$, gdzie f nazywana częstością jest liczbą obrotów wektora A w ciągu sekundy.

Prędkość w ruchu opisanym równaniem (7) wynosi

$$\dot{x} = A\omega \cos(\omega t) \quad (8)$$

i może być rozumiana jako rzut pionowy wektora $A\omega$ obracającego się z tą samą prędkością ω co wektor A , lecz przesuniętego względem niego o 90° w kierunku ruchu. Przyspieszenie w tym ruchu wynosi

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t) \quad (9)$$

i może być rozumiane jako rzut pionowy wektora $A\omega^2$ obracającego się z tą samą prędkością ω co wektor A , lecz przesuniętego względem niego o 180° w kierunku ruchu, lub względem wektora $A\omega$ o 90° w kierunku ruchu.

Wzory (7)-(9) są przypadkiem wzorów (3), (5) i (6) dla zerowego przesunięcia fazowego. Gdyby rozpocząć odmierzenie czasu od chwili, kiedy wektor A zajmuje położenie inne niż poziome, wówczas w zależnościach (7)-(9) należałoby uwzględnić kąt przesunięcia fazowego.

2.1.3. Składanie drgań harmoniczných

Rozważmy sumę dwóch drgań harmoniczných o tej samej częstotliwości ω , ale różnych fazach, czyli

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \sin(\omega t + \gamma_1) + a_2 \sin(\omega t + \gamma_2) \quad (10)$$

gdzie $x_1 = a_1 \sin(\omega t + \gamma_1)$, $x_2 = a_2 \sin(\omega t + \gamma_2)$. Równanie (10) można zapisać

$$x = (a_1 \sin(\gamma_1) + a_2 \sin(\gamma_2)) \cos(\omega t) + (a_1 \cos(\gamma_1) + a_2 \cos(\gamma_2)) \sin(\omega t) \quad (11)$$

i dalej

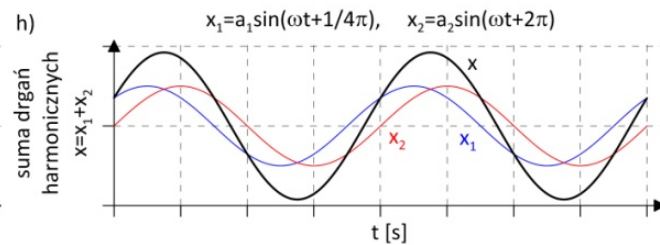
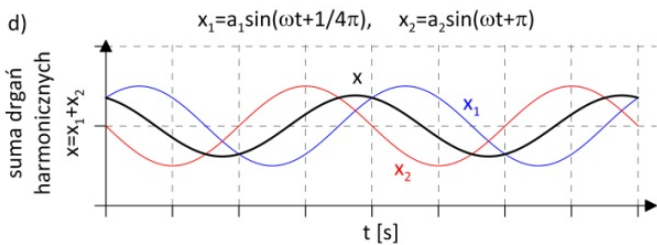
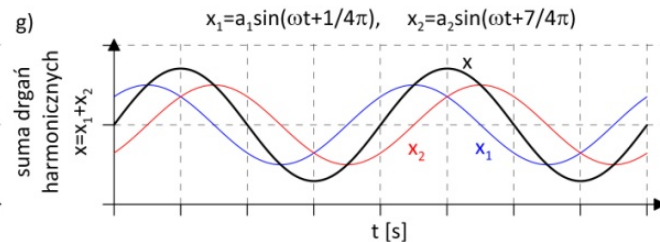
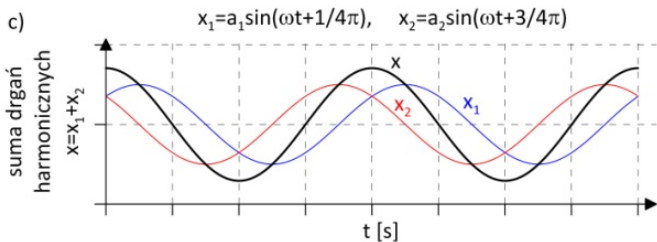
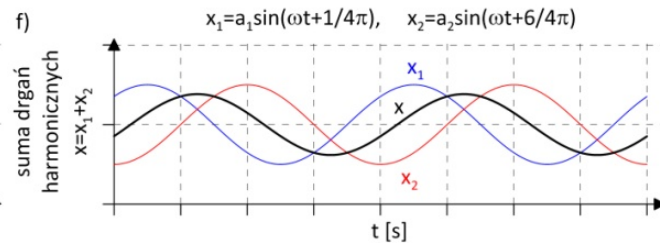
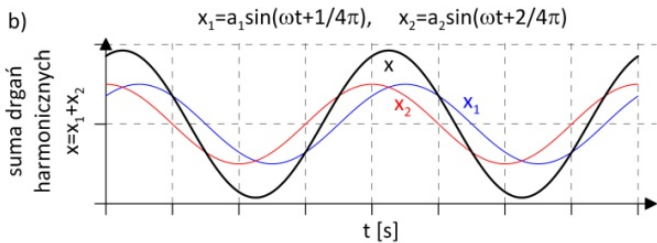
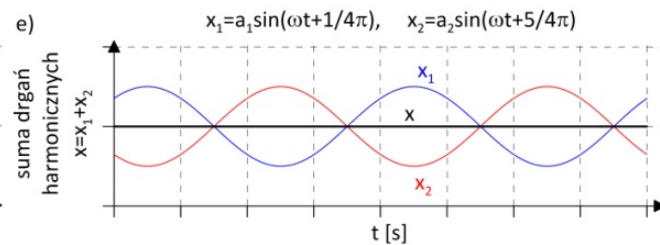
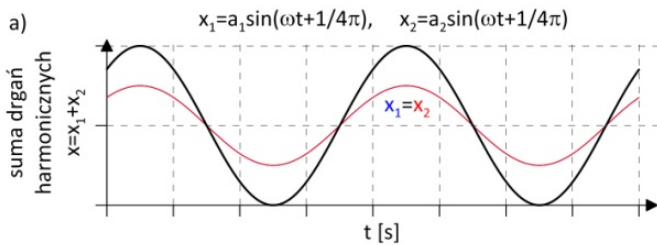
$$x = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad (12)$$

gdzie $a = a_1 \sin(\gamma_1) + a_2 \sin(\gamma_2)$ oraz $b = a_1 \cos(\gamma_1) + a_2 \cos(\gamma_2)$ mają stałe wartości. Ostatecznie można zapisać:

$$x = A \sin(\omega t + \gamma) \quad (13)$$

gdzie $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg}(\gamma) = \frac{a}{b}$. Wynika z tego, że suma dwóch drgań harmoniczných (10) o tej samej częstotliwości, także jest drganiem harmonicznym.

Na rys. 5 pokazano sumę dwóch drgań harmoniczných o tych samych amplitudach i częstotliwościach, ale różnych przesunięciach fazowych.



Gdyby do otrzymanego wyniku dodać kolejne drganie harmoniczne o tej samej częstotności, itd., to wynikiem byłoby również drganie harmoniczne. Można zatem uogólnić powyższe rozważania i powiedzieć, że suma n drgań harmonicznch o tej samej częstotności daje drganie harmoniczne o takiej samej częstotności, czyli

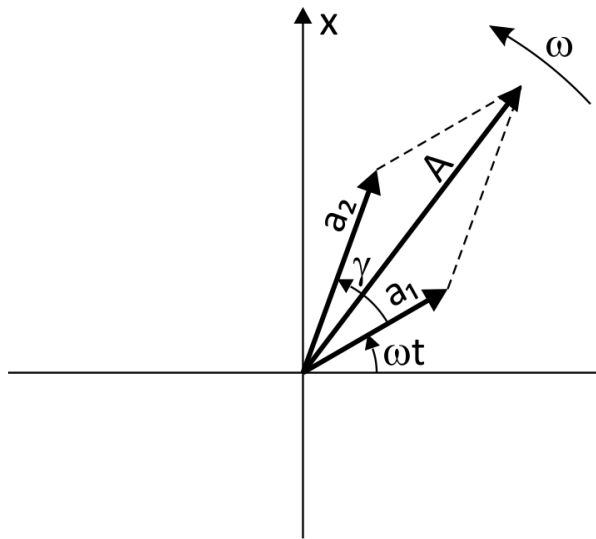
$$x = \sum_{i=1}^n a_i \sin(\omega t + \gamma_i) = A \sin(\omega t + \gamma) \quad (14)$$

gdzie

$$A = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i \sin(\gamma_i)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n a_i \cos(\gamma_i)\right)^2} \quad (15)$$

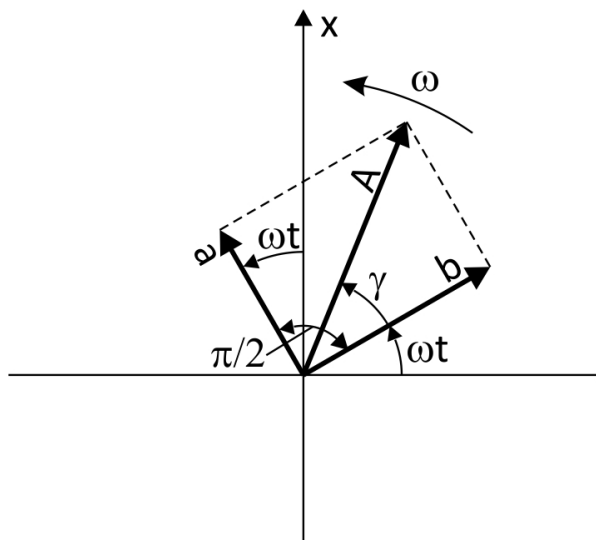
$$\operatorname{tg}(\gamma) = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \sin(\gamma_i)}{\sum_{i=1}^n a_i \cos(\gamma_i)} \quad (16)$$

Do składania ruchów harmonicznych o tej samej częstotliwości można zastosować wektorową interpretację drgań (rys. 6). Jako przykład weźmy sumę dwóch wektorów a_1 i a_2 obróconych względem siebie o kąt γ i obracających się z prędkością kątową ω w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Rzut poziomy jaki i pionowy każdego z wektorów przedstawia ruch harmoniczny. Wypadkowa A wektorów a_1 i a_2 obraca się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara z tą samą prędkością kątową ω . Zatem rzut poziomy wektora wypadkowego A jest opisany równaniem $A\cos(\omega t + \varphi)$, a rzut pionowy jest opisany równaniem $A\sin(\omega t + \varphi)$, gdzie φ to kąt przesunięcia fazowego, którego wyznaczeniem nie będziemy się zajmować. Obydwa rzuty przedstawiają ruchy harmoniczne o częstotliwości ω , czyli suma dwóch drgań harmonicznych o tych samych częstotliwościach daje również ruch harmoniczny. Potwierdza to analizę przeprowadzoną wcześniej metodami trygonometrycznymi.



Rys. 6

Przy okazji omówimy jeden szczególny przypadek, który jest ważny z punktu widzenia analiz prowadzonych w następnych rozdziałach. Dotyczy on dodawania ruchów harmoniczych o tych samych częstościach przesuniętych w fazie o 90° . Weźmy pod uwagę sumę dwóch wektorów a i b obracających się z prędkością kątową ω w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (rys. 7). Kąt pomiędzy wektorami jest kątem prostym. Jeśli rozpoczniemy odmierzanie czasu od chwili, kiedy wektor a zajmuje położenie pionowe, to jego rzut pionowy będzie równy $a\cos(\omega t)$, zaś rzut pionowy wektora b to $b\sin(\omega t)$. Suma tych rzutów to $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$.



Rys. 7

Z rysunku wynika, że długość wektora wypadkowego wynosi $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, a jego rzut pionowy to $A\sin(\omega t + \gamma)$. Suma rzutów wektorów składowych jest równa rzutowi wektora wypadkowego A , czyli

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\omega t + \gamma) \quad (17)$$

gdzie kąt przesunięcia fazowego określimy na podstawie rysunku jako

$$\operatorname{tg}(\gamma) = \frac{a}{b} \quad (18)$$

Wynik przeprowadzonych rozważań będzie znajdował zastosowanie w analizie rozwiązań równań ruchu drgającego. Umożliwia on także wyjaśnienie równoważności zapisu wzorów (1) i (2), dotyczących przedstawienia funkcji okresowej w postaci szeregu trygonometrycznego Fouriera.

Rozważmy sumę dwóch drgań harmoniczych o **różnych wartościach częstości** i różnych fazach, czyli

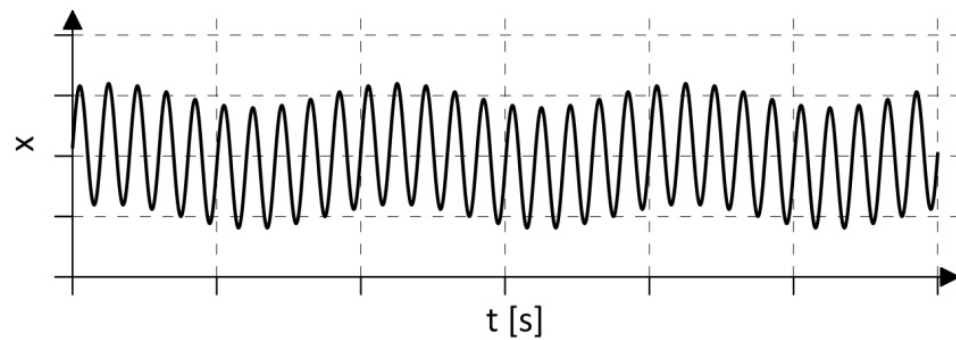
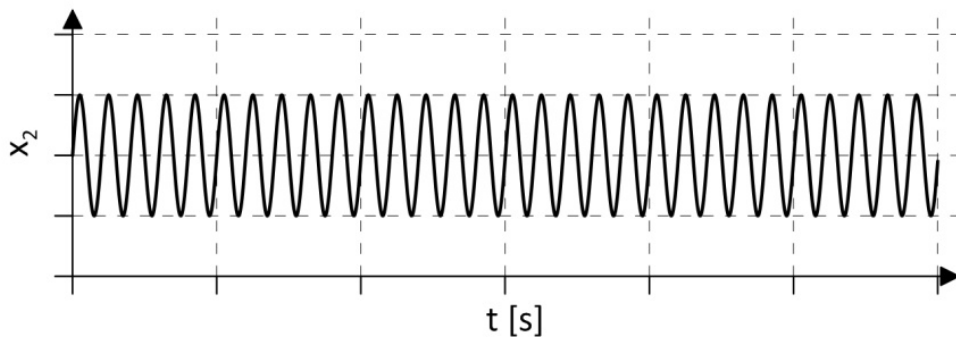
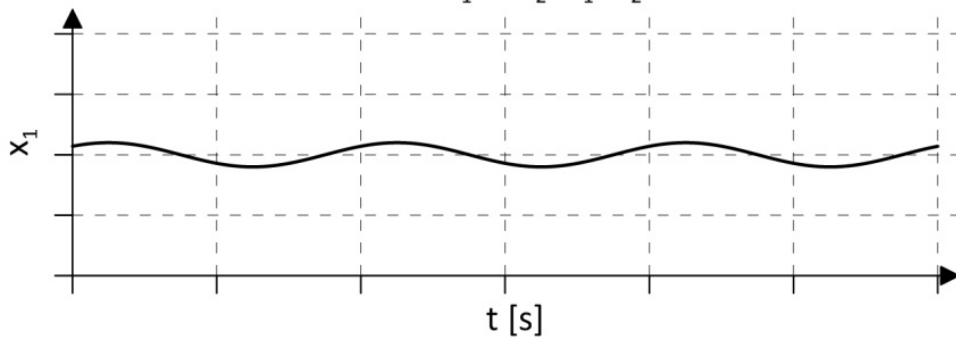
$$x = x_1 + x_2 = a_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \gamma_2) \quad (19)$$

gdzie $x_1 = a_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1)$, $x_2 = a_2 \sin(\omega_2 t + \gamma_2)$. Suma takich drgań nie będzie drganiem harmonicznym, ale w niektórych przypadkach może być drganiem okresowym. Jeśli założymy, że częstości ω_1 i ω_2 są współmierne, tzn. istnieją liczby naturalne m i n takie, że $\omega_1/m = \omega_2/n$, to drganie wypadkowe x jest drganiem okresowym. W przeciwnym przypadku drganie wypadkowe nie będzie okresowe.

Przypadek 1. Suma drgań o częstościach bardzo różniących się.

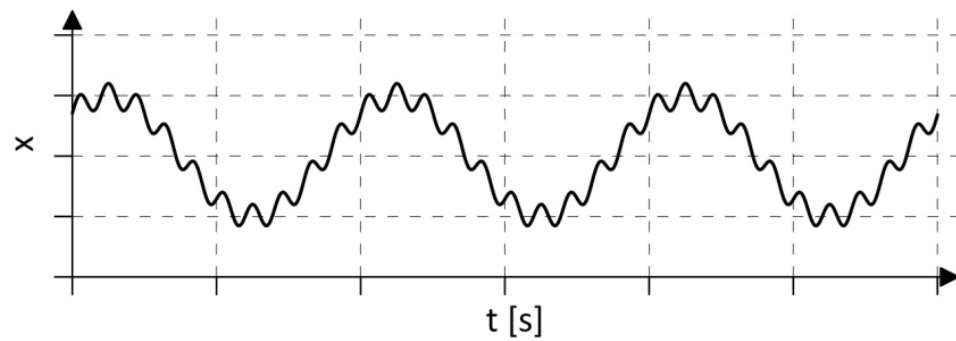
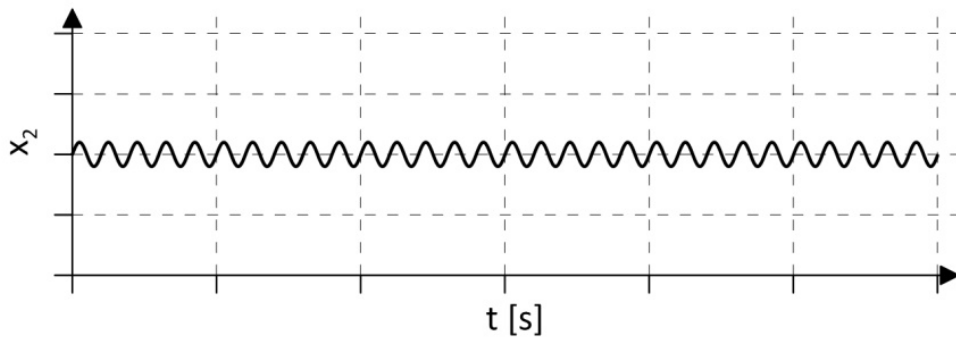
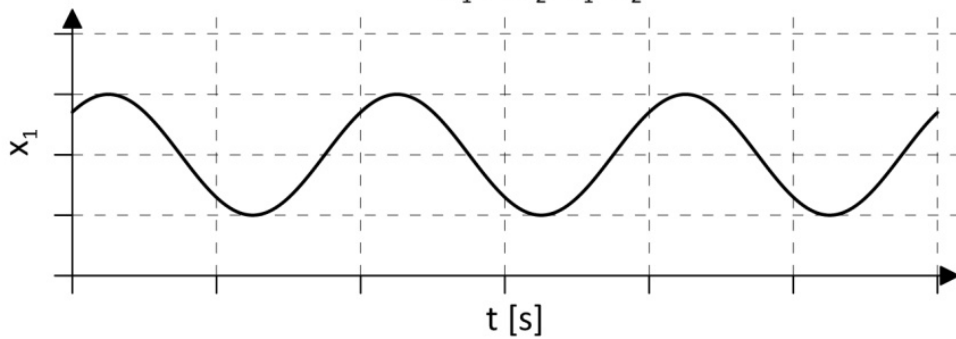
Na rys. 8 i 9 pokazano złożenie drgań harmoniczych danych równaniem (19), przy czym dla drgań przedstawionych na rysunku 8 przyjęto $\omega_1 \ll \omega_2$, i $a_1 < a_2$, natomiast dla drgań zaprezentowanych na rysunku 9 przyjęto $\omega_1 \ll \omega_2$, i $a_1 > a_2$. Ponadto założono, że $\omega_1/m = \omega_2/n$, więc drgania wypadkowe są drganiami okresowymi.

$$\omega_1 \ll \omega_2, a_1 < a_2$$



Rys. 8.

$$\omega_1 \ll \omega_2, a_1 > a_2$$



Rys. 9.

Przypadek 2. Suma drgań o częstościach różniących się nieznacznie.

Taki przypadek można opisać równaniem (19), w którym dla uproszczenia analizy założono jednakowe amplitudy drgań składowych i brak przesunięcia fazowego. W związku z tym otrzymano równanie w postaci

$$x = x_1 + x_2 = a\sin(\omega_1 t) + a\sin(\omega_2 t) \quad (20)$$

Równanie to można przekształcić do postaci

$$x = a(\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)) = 2a\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \quad (21)$$

w której $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_{sr}$ to częstość „średnia” i $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \omega_{mod}$ to częstość modulacji. Równanie (21) można zapisać w postaci wzoru

$$x = 2a\cos(\omega_{mod} t)\sin(\omega_{sr} t) \quad (22)$$

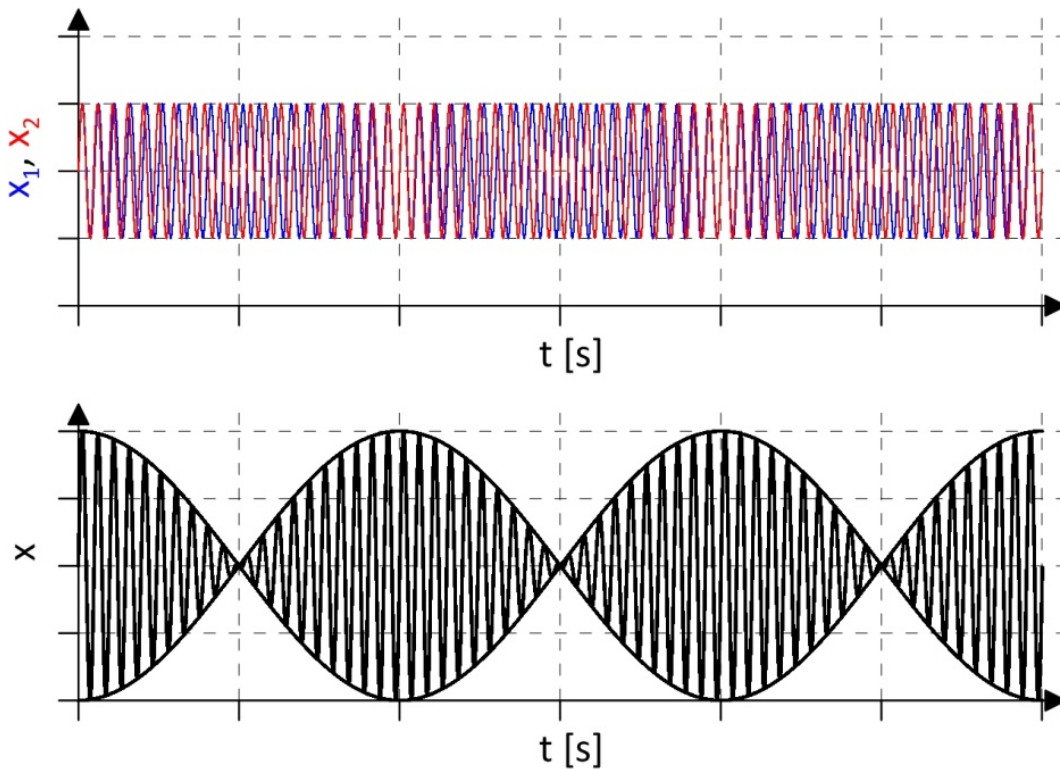
lub

$$x = A_{mod}(t)\sin(\omega_{sr} t) \quad (23)$$

gdzie

$$A_{mod}(t) = 2a\cos(\omega_{mod} t) \quad (24)$$

Ruch opisany wzorami (23) i (24) można interpretować jako oscylacje o częstotliwości $\omega_{\dot{s}r}$ i amplitudzie $A_{mod}(t)$ zmieniającej się w czasie z częstotliwością ω_{mod} . Zapisane wzory (23) i (24) są wzorami ścisłymi, będącymi inną formą zapisu równania (20), jednak ich zastosowanie daje największe korzyści wtedy, gdy częstotliwości drgań składowych spełniają zależność: $\omega_1 \approx \omega_2$. Wówczas $\omega_{\dot{s}r} \approx \omega_1 \approx \omega_2$ oraz $\omega_{mod} \ll \omega_{\dot{s}r}$, więc amplituda $A_{mod}(t)$ zmienia się nieznacznie w stosunku do „szybkich” oscylacji z częstotliwością $\omega_{\dot{s}r}$. Taki przypadek ruchu nazywany jest dudnieniem (rys. 10). Obwiednia drgań jest funkcją harmoniczną o amplitudzie $2a$ i częstotliwości ω_{mod} .

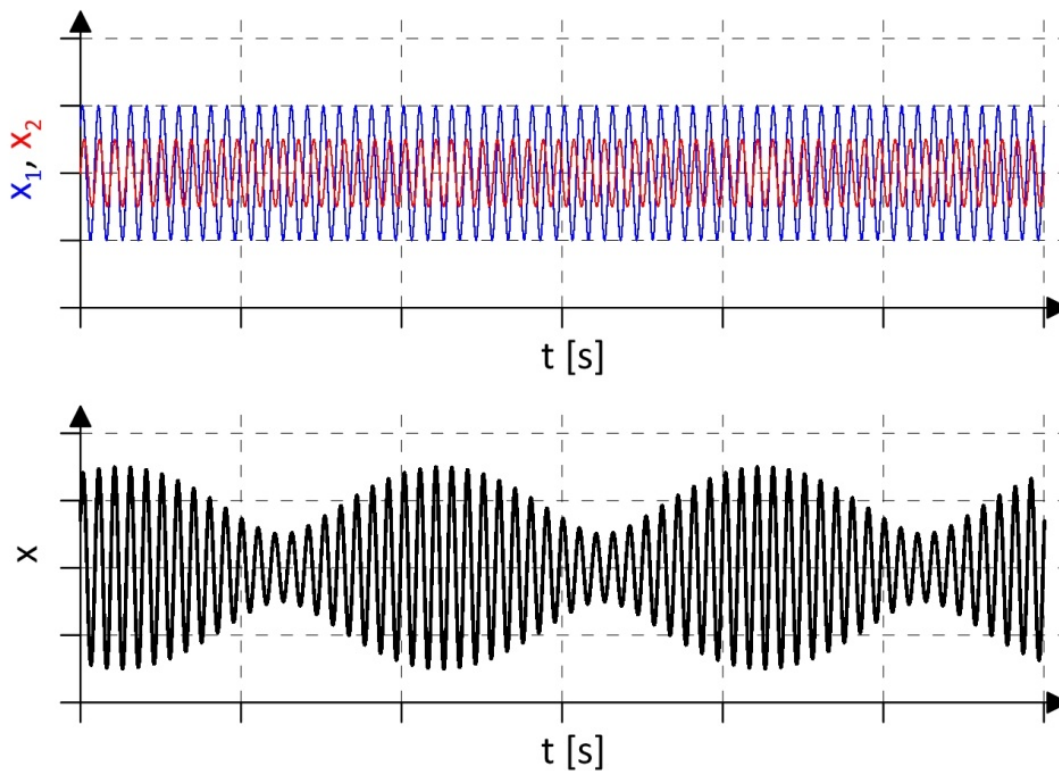


Rys. 10.

Można oczywiście rozważyć przypadek, gdy amplitudy drgań składowych mają różne amplitudy i są przesunięte w fazie, czyli

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) + a_2 \sin(\omega_2 t) \quad (25)$$

Wyniki analizy będą jednak bardziej złożone i przez to trudniejsze do zrozumienia. Zasadniczą różnicą w stosunku do poprzednio analizowanego przypadku jest to, że amplituda zmienia się w granicach od $A_{max} = a_1 + a_2$ do $A_{min} = |a_1 - a_2|$.



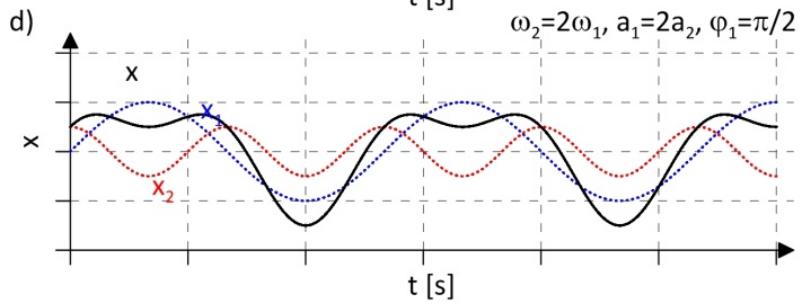
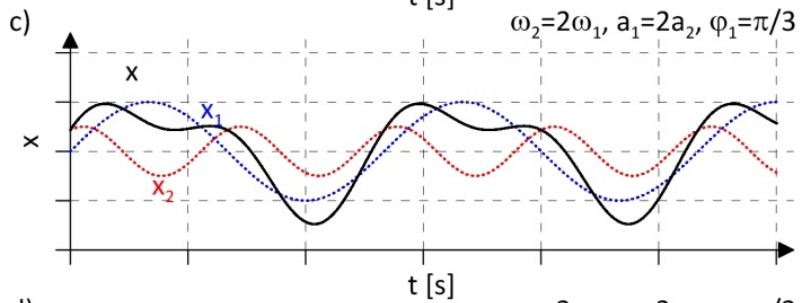
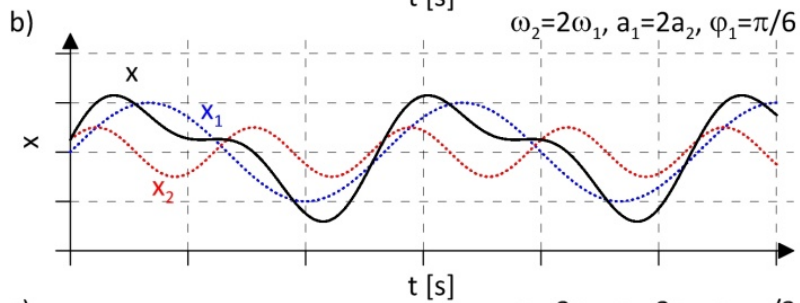
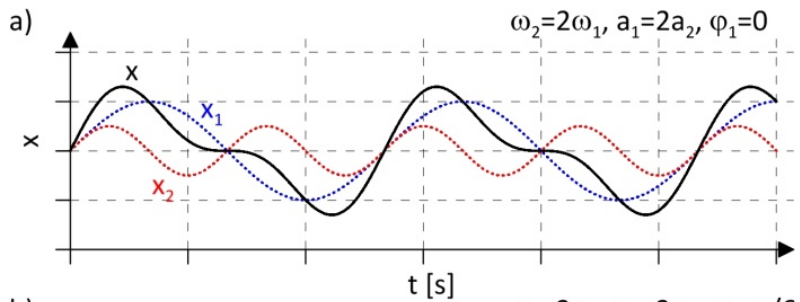
Rys. 11.

Przypadek 3. Suma drgań, których stosunek częstości jest niewielką liczbą naturalną.

Taki przypadek można opisać równaniem (19), w którym $\omega_2 = i\omega_1$, czyli

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) + a_2 \sin(i\omega_1 t + \gamma_2) \quad (26)$$

gdzie $i = \omega_2/\omega_1$ jest niewielką liczbą naturalną. Drganie składowe x_2 jest przesunięte względem drgania x_1 o γ_2 . W zależności od stosunku amplitud, częstości i przesunięcia fazowego, drganie wypadkowe x może przyjmować najróżniejsze formy. Przykładowe wykresy przedstawione na rys. 12 sporządzono przy założeniu, że $i = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2$, $\frac{a_1}{a_2} = 2$, a kąt przesunięcia fazowego γ_2 wynosi kolejno $\gamma_2 = 0$ (rys. 12a), $\gamma_2 = \pi/6$ (rys. 12b), $\gamma_2 = \pi/3$ (rys. 12c), $\gamma_2 = \pi/2$ (rys. 12d).



Rys. 12.

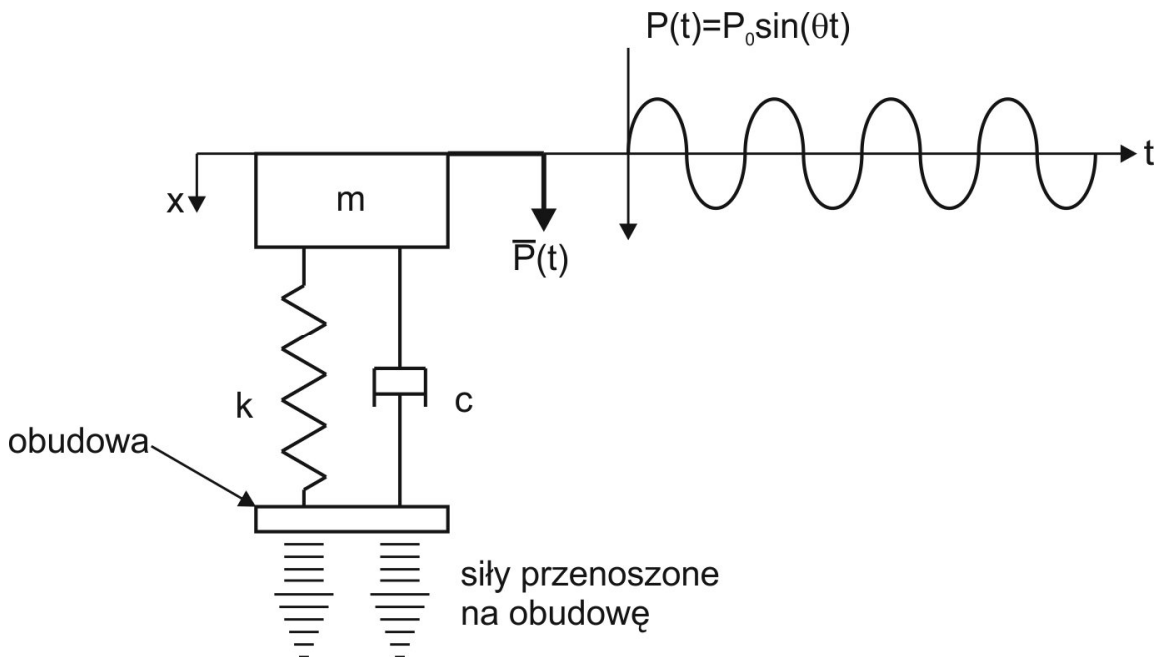
Przedstawione w tym punkcie wybrane zależności matematyczne stosowane do opisu ruchu drgającego, w szczególności ruchu okresowego i harmonicznego zostaną wykorzystane w kolejnych rozdziałach dotyczących dynamiki ruchu drgającego.

2.2. Rodzaje wymuszeń: harmoniczne, skokowe, udarowe

Niektóre wymuszenia powodujące drgania mechaniczne można opisać typowymi funkcjami matematycznymi. Niejednokrotnie jest to opis przybliżony, którego zastosowanie ułatwia analizę zjawisk. Poniżej zaprezentowano najczęściej stosowane funkcje opisujące wymuszenia harmoniczne, skokowe i udarowe.

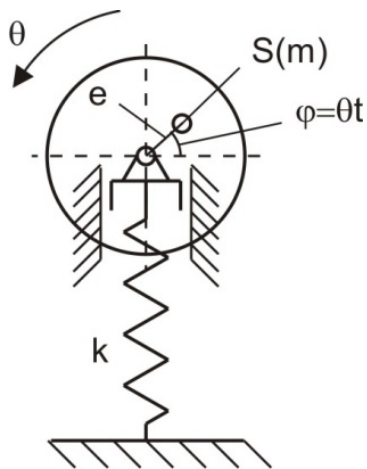
a) wymuszenie harmoniczne

- siła harmoniczna działająca na masę m , wymuszenie siłowe jest opisane funkcją $P(t) = P_0 \sin(\theta t)$, gdzie P_0 to amplituda wymuszenia, θ to częstość wymuszenia,



Rys. 13.

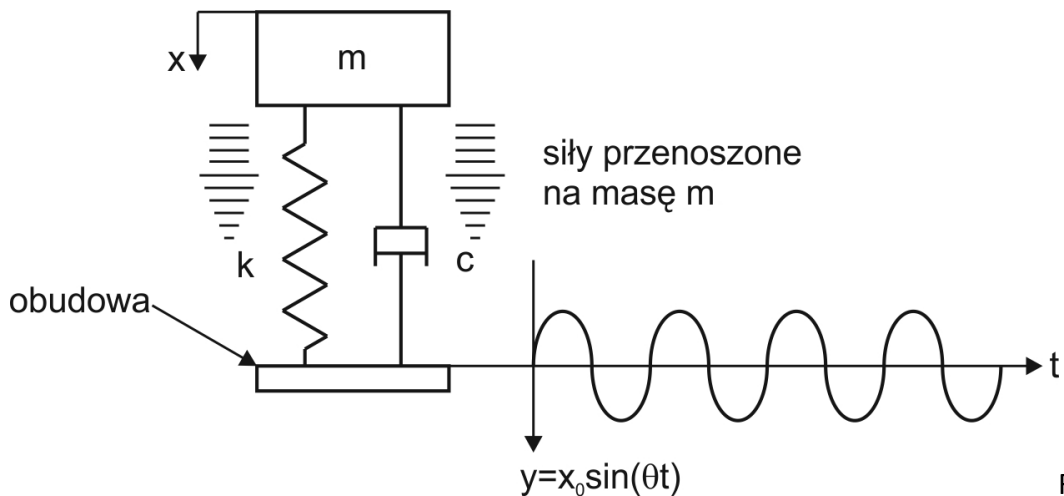
Przykładem układu z harmonicznym wymuszeniem siłowym może być wirująca niewyważona bryła. Jeżeli w układzie występuje bryła obracająca się wokół nieruchomej osi z prędkością kątową θ , a środek masy bryły nie leży na osi obrotu, to wówczas gdy $\theta = \text{const.}$ to kąt obrotu $\varphi = \theta t$. Środek masy jest przesunięty od osi obrotu o wartość e (e – to tzw. mimośród).



Występuje wówczas fikcyjna siła $\bar{B}_n = -m\bar{a}_n$ pochodząca od przyspieszenia normalnego masy o wartości $B_n = -m\theta^2 e$. Rzut tej siły na średnicę daje siłę harmonicznie zmienną $P(t) = B_n \cos(\theta t)$ lub $P(t) = B_n \sin(\theta t)$. Taką siłę nazywamy wymuszeniem ruchu drgającego. Aby takie wymuszenie nie występowało, konieczne jest doprowadzenie układu do tego, aby $e = 0$. Wówczas środek masy leży na osi obrotu i mówimy, że bryła jest wyważona statycznie.

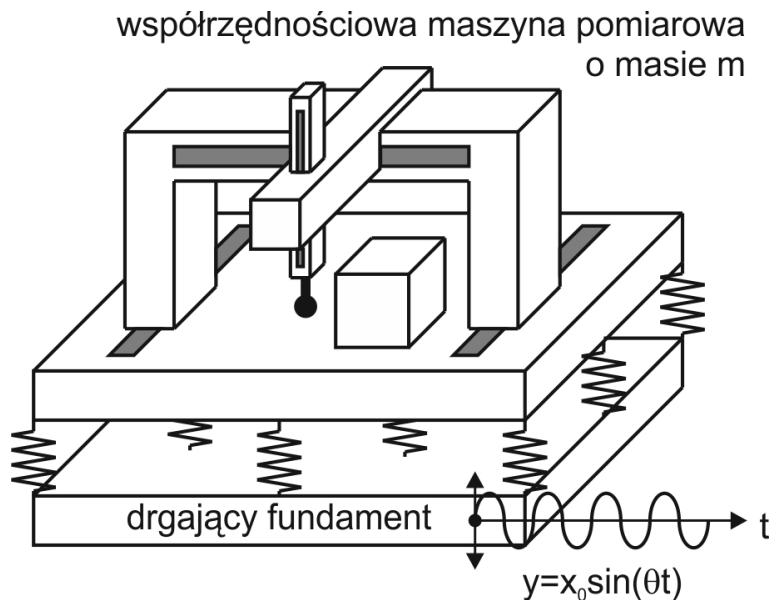
Rys. 14.

- przemieszczenie obudowy, wymuszenie kinematyczne jest opisane funkcją $y = x_0 \sin(\theta t)$, gdzie x_0 to amplituda wymuszenia, θ to częstość wymuszenia,



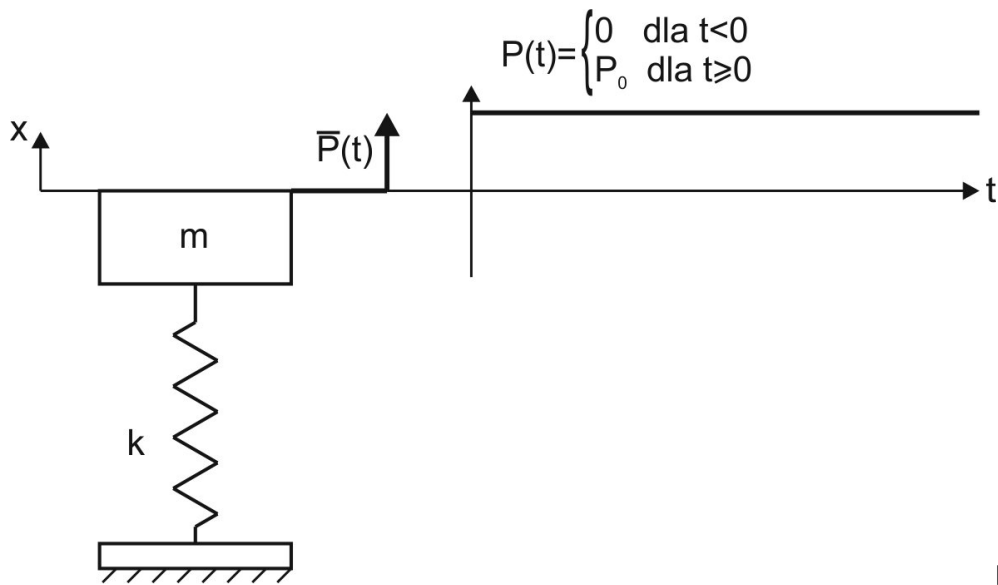
Rys. 15.

Przykładem harmonicznego wymuszenia kinematycznego działającego na masę mogą być drgania fundamentu, na których posadowione jest urządzenie, np. współrzędnościowa maszyna pomiarowa.



W przypadku takich maszyn, służących do precyzyjnych pomiarów, drgania fundamentu maszyny są szczególnie niepożądane. Mogą być one generowane przez inne maszyny np. przez obrabiarki. Dlatego istotnym aspektem jest izolacja maszyny od drgań fundamentu, co będzie tematem analiz w dalszej części skryptu.

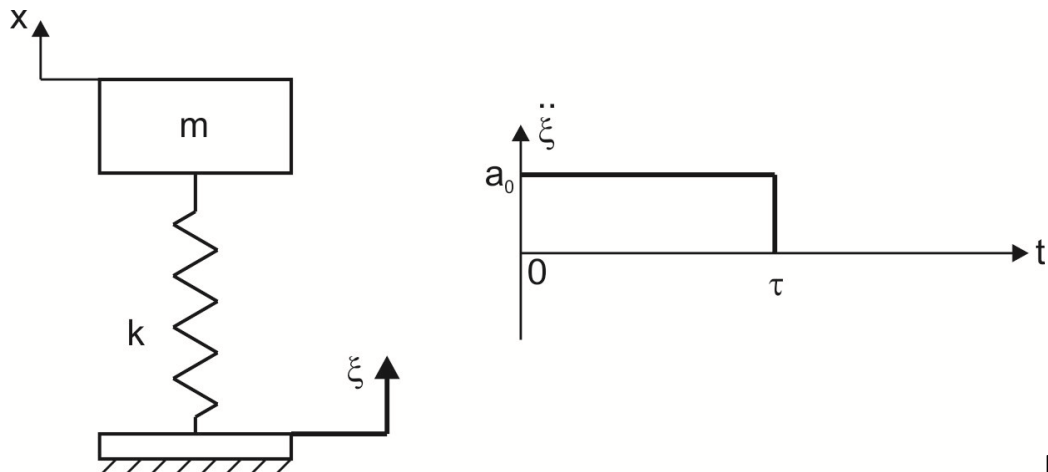
b) wymuszenie skokowe, wymuszenie jest opisane zależnością $P = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ P_0 & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$
 gdzie P_0 to wartość skoku wymuszenia



Rys. 17.

Wymuszenie skokowe polega na gwałtownej zmianie siły działającej na konstrukcję. Przykładem może być gwałtowne obciążenie konstrukcji stałym ciężarem. Innym przykładem wymuszenia skokowego jest gwałtowne odciążenie dźwigu podnoszącego ładunek w przypadku zerwania liny.

c) wymuszenie udarowe (chwilowe oddziaływanie na obiekt), np. podstawa doznaje przyspieszenia o stałej wartości $\ddot{\xi} = a_0$ przez krótki czas τ .

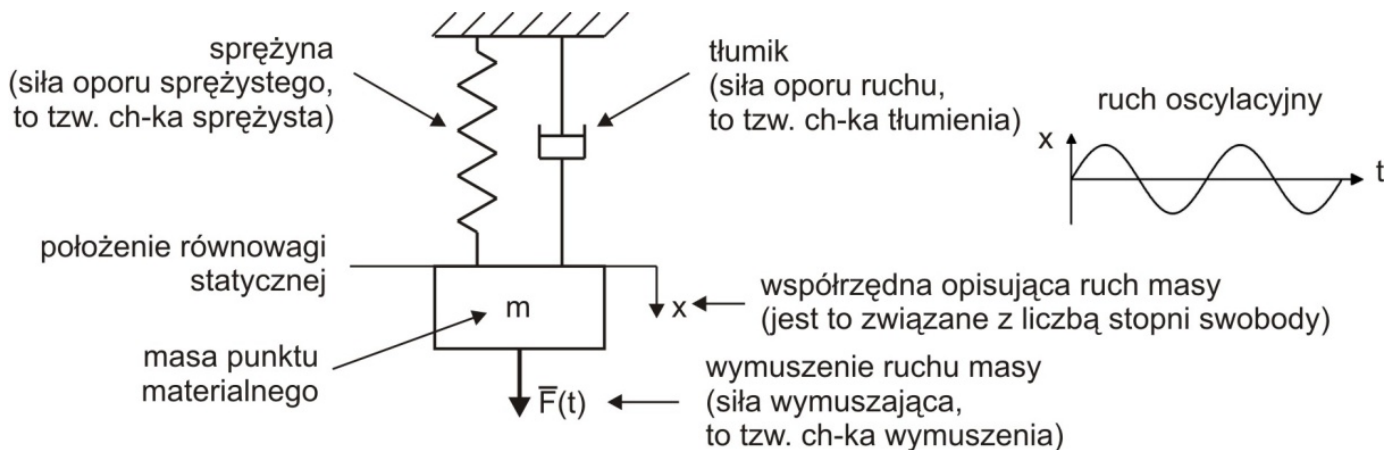


Rys. 18.

Wymuszenia udarowe występują m.in. podczas wystrzałów z broni palnej oraz zderzeń.

2.3. Podstawy modelowania układów drgających

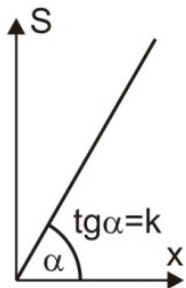
Mechanika klasyczna zakłada, że ciała są nieodkształcalne. Wiadomo jednak, że w rzeczywistości ciała ulegają deformacjom. Odkształcenia ciał materialnych stałych są małe, często niewidoczne gołym okiem. Jeżeli chcemy analizować to wszystko o czym mówi mechanika uwzględniając deformację ciał stałych, to trzeba zbudować model tego ciała tak dobrany, aby deformacje były możliwe. Najczęściej przyjmuje się tzw. modele dyskretne. Najprostszym modelem dyskretnym ciała jest układ o 1 stopniu swobody.



Rys. 19.

W mechanice opisując ruch masy wprowadza się wszystkie działające na nią siły. W przedstawionym układzie występują: siła reakcji sprężyny, siła reakcji tłumika i siła wymuszająca ruch.

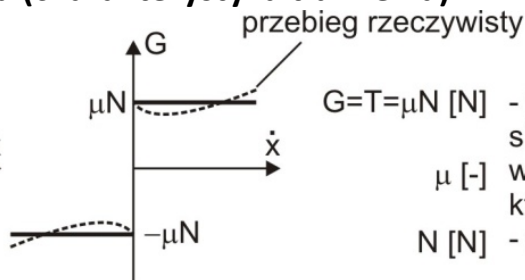
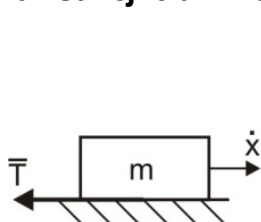
Siła reakcji sprężyny (charakterystyka sprężysta)



$S = kx$ [N] - siła reakcji sprężyny
(taki przebieg najczęściej przyjmujemy),
 k [N/m] - tzw. współczynnik sprężystości sprężyny,
który wyznacza się doświadczalnie,
 x [m] - mała deformacja sprężyny

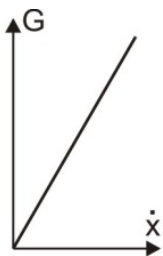
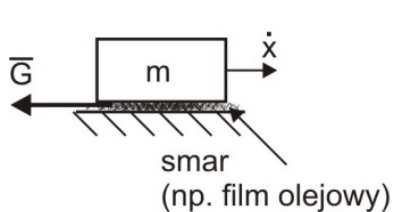
Rys. 20.

Siła reakcji tłumika (charakterystyka tłumienia)



$G = T = \mu N$ [N] - tak najczęściej określamy siłę tarcia suchego, jako stałą wartość
 μ [-] współczynnik tarcia suchego, który wyznacza się doświadczalnie,
 N [N] - siła nacisku

Rys. 21.



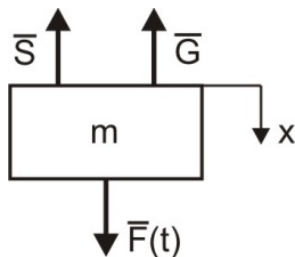
$G = c\dot{x}$ [N] - siła oporu tłumika (siła tarcia, które tu nazywamy tarcie płynnym lub wiskotycznym),
 c [Ns/m] - tzw. współczynnik tarcia wiskotycznego, który wyznacza się doświadczalnie,
 \dot{x} [m/s] - prędkość masy

Rys. 22.

Siła wymuszająca ruch (charakterystyka wymuszenia)

Siła wymuszająca ruch $\bar{F}(t)$ może mieć jedną z form przedstawionych wcześniej w punkcie „Rodzaje wymuszeń”. W analizach najczęściej przyjmowana jest siła harmonicznie zmienna, bo taka jest najbardziej niebezpieczna dla układu – występuje wówczas zmęczenie materiału.

Wprowadzając na rysunek siły działające na masę w ruchu oscylacyjnym, rozważamy następujący układ sił



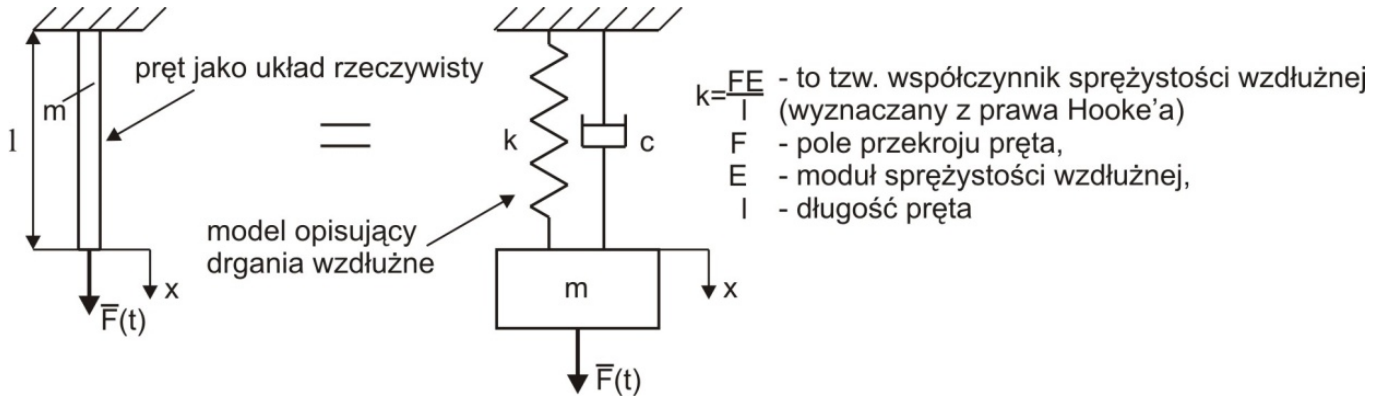
Rys. 23.

gdzie \bar{S} to siła reakcji sprężyny mający zwrot przeciwny do deformacji sprężyny, \bar{G} to siła reakcji tłumika mający zwrot przeciwny do prędkości deformacji tłumika. Różniczkowe równanie ruchu opisujące ruch masy to

$$m\ddot{x} = F(t) - G - S$$

Przedstawiony model można stosować w następujących przypadkach:

1. Drgania wzdłużne pręta.



Rys. 24.

Równanie opisujące ruch masy ma postać

$$m\ddot{x} = F(t) - G - S$$

gdzie

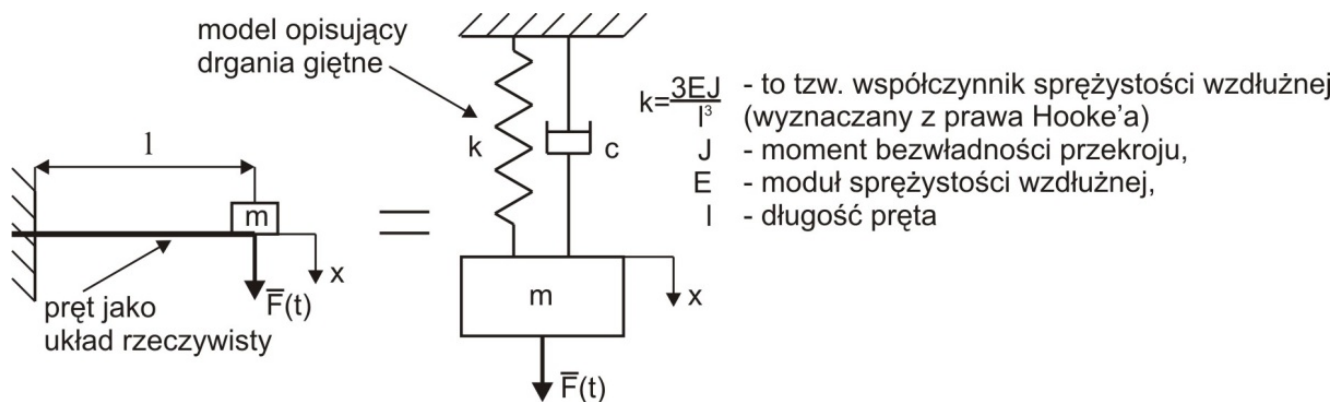
m – masa pręta,

$G = c\dot{x}$ – siła pochodząca od oporu wewnętrznego (modelowanego jako opór wiskotyczny),

$S = kx$ - siła oporu sprężystego,

x – deformacja pręta.

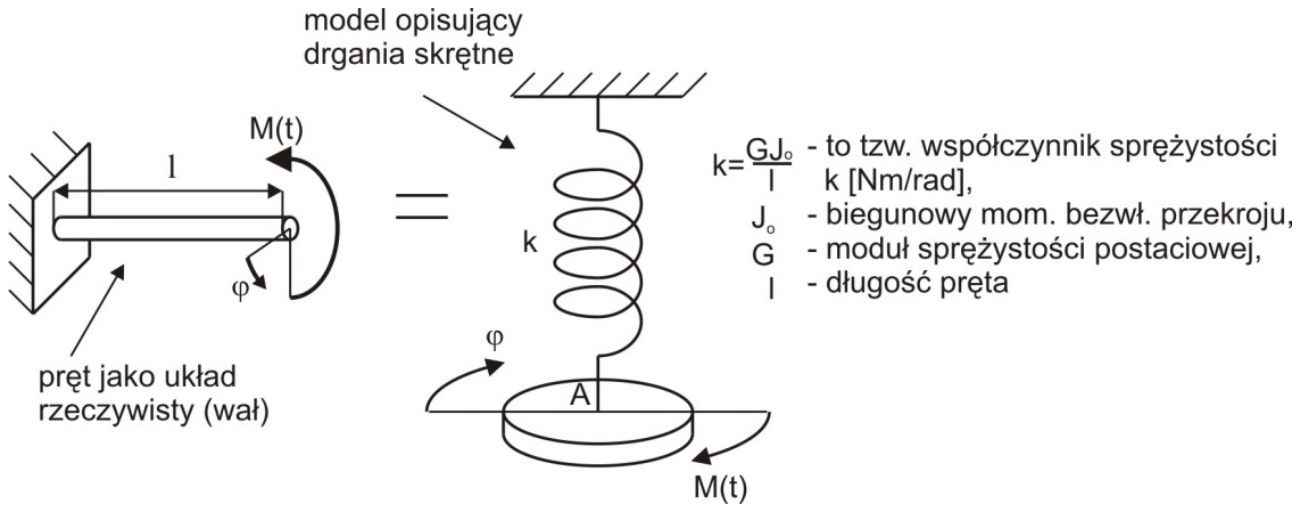
2. Drgania giętne belki wspornikowej.



Rys. 25.

Sposób budowy modelu dla belki wspornikowej jest nieco bardziej skomplikowany niż w przypadku pręta

3. Drgania skrętne wału.



Rys. 26.

Równanie opisujące ruch krążka ma postać

$$I_A \ddot{\varphi} = M(t) - M_G - M_S$$

gdzie

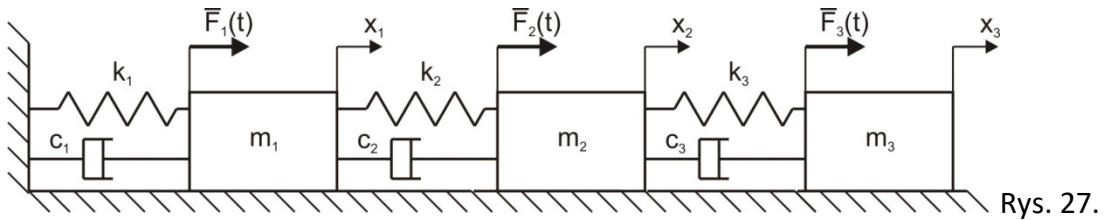
I_A - masowy moment bezwładności określony względem punktu A,

$M_G = c\dot{\varphi}$ - moment pochodzący od oporu wiskotycznego,

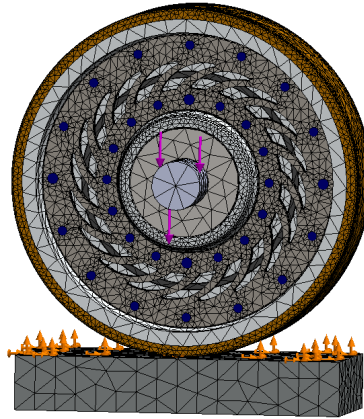
$M_S = k\varphi$ - moment pochodzący od oporu sprężystego,

φ - kąt obrotu krążka.

Przedstawiony model można rozbudować i uzyskać model o wielu stopniach swobody



Jeżeli układ dyskretny ma dużą liczbę stopni swobody to zbliża się do układu rzeczywistego, który ma nieskończenie wiele stopni swobody. Analiza takich układów jest skomplikowana matematycznie, często wykorzystuje się w niej metody komputerowe, np. MES – metoda elementów skończonych (ang. FEM – Finite Element Method).



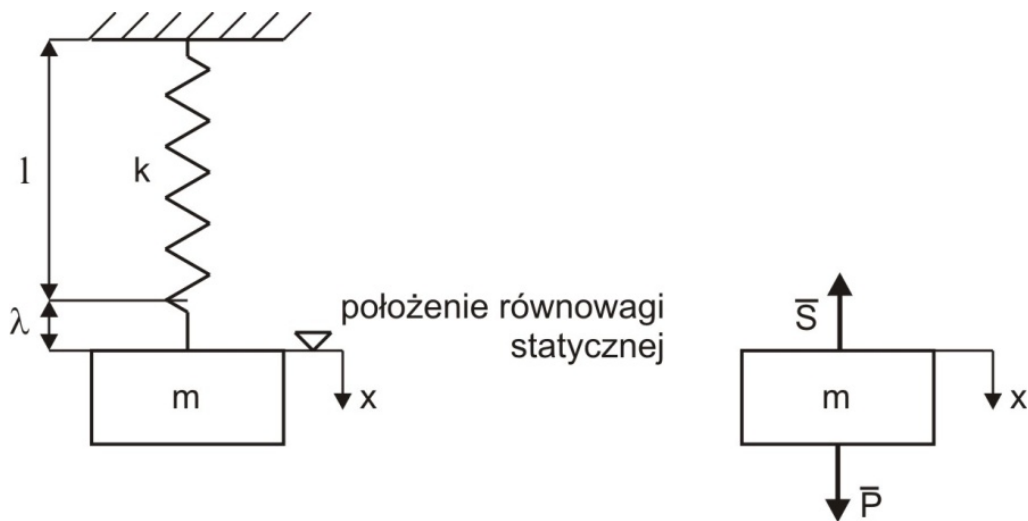
Rys. 28.

3. Drgania układu o jednym stopniu swobody

3.1. Położenie równowagi statycznej

W informacjach wstępnych na temat drgań mechanicznych powiedzieliśmy, że są one małymi oscylacjami względem położenia równowagi statycznej. Istotnym zagadnieniem jest więc określenie tego położenia, względem którego opisywane są drgania. Wynika ono z równowagi pomiędzy siłami ciężkości mas a siłami reakcji sprężystych. Wszystkie te siły są siłami pól potencjalnych, zatem szukanie położenia równowagi statycznej jest zagadnieniem związanym z równowagą układu w polu potencjalnym.

Jako przykład służący wyjaśnieniu tego zagadnienia, weźmy układ pokazany na rys. 1, składający się z ciała o masie m i sprężyny o współczynniku sprężystości k . W stanie swobodnym, tzn. bez obciążenia masą, długość sprężyny wynosi l . Pod wpływem obciążenia przez masę, długość sprężyny zmienia się o λ , którą nazywamy deformacją statyczną sprężyny. W tym położeniu siła ciężkości masy \bar{P} jest równoważona przez reakcję sprężyny \bar{S} i jest to położenie równowagi statycznej. W przypadku zaburzenia równowagi ciało o masie m będzie wykonywać ruch względem tego położenia, opisany przez przemieszczenie x .



Rys. 1.

Położenie równowagi statycznej, określone przez λ , może być znalezione z zastosowaniem kryterium Lagrange'a – Dirichleta. W tym celu należy określić potencjał układu

$$V = V_1 + V_2 \tag{1}$$

gdzie V_1 to potencjał sił sprężystych, V_2 to potencjał mas w polu ziemskim. Z mechaniki ogólnej znana jest zależność pomiędzy potencjałem V a siłą pola potencjalnego F_x :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -F_x \quad (2)$$

gdzie F_x to rzut siły pola potencjalnego na kierunek x . W tym przypadku interesuje nas zależność pomiędzy potencjałem sił sprężystych V_1 a siłą reakcji sprężyny \bar{S} . Siła ta jest skierowana przeciwnie do przemieszczenia x , zatem $F_x = -S$, i na podstawie równania (2) zapiszemy

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = S \quad (3)$$

Wartość siły reakcji sprężyny to

$$S = k\Delta \quad (4)$$

gdzie $\Delta = \lambda + x$ to całkowita deformacja sprężyny, λ to statyczna deformacja sprężyny, x to deformacja sprężyny wynikająca z ruchu wokół położenia równowagi statycznej. Uwzględniając wartość reakcji sprężyny zapiszemy

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = k(\lambda + x) \quad (5)$$

a następnie rozdzielimy zmienne w równaniu (5) otrzymując

$$\partial V_1 = k(\lambda + x) \partial x \quad (6)$$

Całkując obustronnie (6) wyrażenie otrzymamy

$$\int_0^{V_1} \partial V_1 = \int_0^x k(\lambda + x) \partial x = k\lambda x + \frac{1}{2} kx^2 \Big|_0^x = k\lambda x + \frac{1}{2} kx^2 \quad (7)$$

$$V_1 \Big|_0^{V_1} = k\lambda x + \frac{1}{2} kx^2 \Big|_0^x \quad (8)$$

$$V_1 = k\lambda x + \frac{1}{2} kx^2 \quad (9)$$

Podobnie, na podstawie równania (2), wyznaczmy potencjał masy w polu ziemskim, uwzględniając, że w tym przypadku mamy $F_x = P$:

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = -P \quad (10)$$

Uwzględniając wartość siły ciężkości

$$P = mg \quad (11)$$

otrzymamy

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = -mg \quad (12)$$

i następnie rozdzielając zmienne w równaniu (12) zapiszemy

$$\partial V_2 = -mg\partial x \quad (13)$$

Całkując obustronnie wyrażenie (13) otrzymamy

$$\int_0^{V_2} \partial V_2 = - \int_0^x mg\partial x \quad (14)$$

$$V_2|_0^{V_2} = -mgx|_0^x \quad (15)$$

$$V_2 = -mgx \quad (16)$$

Całkowity potencjał układu wynosi

$$V = k\lambda x + \frac{1}{2}kx^2 - mgx \quad (17)$$

i jest on funkcją zmiennej x , co zapisujemy ogólnie $V = V(x)$. W celu wyznaczenia położenia równowagi statycznej stosujemy **Tw. Dirichleta**:

W polu potencjalnym punkt, w którym potencjał osiąga minimum jest położeniem równowagi stałej.

Szukamy zatem minimum potencjału $V(x)$ wykorzystując znane z matematyki postępowanie określania minimum funkcji. Przy pewnych założeniach funkcja osiąga ekstremum w danym punkcie jeśli jej pierwsza pochodna jest równa zero w tym punkcie,

a druga pochodna jest w tym punkcie dodatnia. W naszym przypadku tą funkcją jest potencjał $V(x)$. Pochodna potencjału po współrzędnej x to

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k\lambda + kx - mg \quad (18)$$

Potencjał jest minimalny w stanie równowagi statycznej czyli wtedy gdy $x = 0$, zatem jego pierwsza pochodna względem x jest równa zero

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (19)$$

Z równań (18) i (19) wynika, że

$$k\lambda - mg = 0 \quad (20)$$

Zatem deformacja statyczna jest wyrażona wzorem

$$\lambda = \frac{mg}{k} \quad (21)$$

Należy jeszcze sprawdzić, czy rzeczywiście w wyznaczonych warunkach potencjał osiąga minimum, tzn. czy jego druga pochodna względem x jest dodatnia

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{x=0} > 0 \quad (22)$$

Z obliczeń wynika, że

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = k \quad (23)$$

czyli znak drugiej pochodnej potencjału względem x jest dodatni bo $k > 0$ i rzeczywiście w położeniu równowagi statycznej potencjał osiąga wartość minimalną.

Deformacja statyczna λ określa poszukiwane położenie masy w stanie równowagi statycznej.

Deformację statyczną sprężyny można również określić na podstawie analizy równowagi sił pola potencjalnego. Wiedząc, że w stanie równowagi statycznej siły ciężkości masy są równoważone przez siły reakcji sprężyn, można dla rozważanego przypadku zapisać równanie

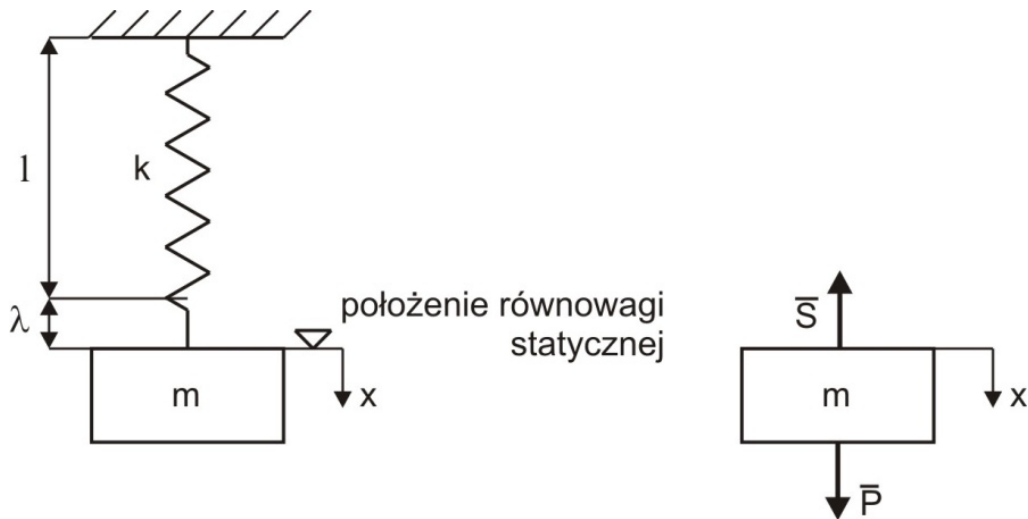
$$S - P = 0 \quad (24)$$

Uwzględniając wartość reakcji sprężyny w stanie wstępnego napięcia $S = k\lambda$ i wartość siły ciężkości $P = mg$, uzyskamy na podstawie równania (24) zapis równoważny z równaniem (20), z którego wynika, że $\lambda = \frac{mg}{k}$.

Przedstawiony przykład dotyczy wyznaczania położenia równowagi statycznej prostego układu składającego się z jednej masy i jednej sprężyny. Przedstawioną metodologię można również zastosować w przypadku złożonych układów.

3.2. Drgania swobodne

Nazwa „drżania swobodne” oznacza ruchy oscylacyjne układu, które nie są podtrzymywane żadną siłą wymuszającą. Wiadomo jednak, że każdy ruch musi mieć jakąś przyczynę. W przypadku drżan swobodnych jest nią początkowe wychylenie masy z położenia równowagi statycznej, prędkość początkowa, albo suma obydwóch tych zjawisk. W celu analizy drżan swobodnych przyjmujemy model przedstawiony na rysunku, składający się z ciała i sprężyny. Zakładamy, że masa sprężyny jest pomijalnie mała i jej jedyną cechą jest sprężystość. Z kolei w odniesieniu do ciała zakładamy, że ma ono masę m i nieskończenie dużą sztywność, czyli jest nieodkształcalne.



Rys. 2.

Dynamiczne równanie ruchu masy ma postać:

$$m\ddot{x} = -S + P \quad (25)$$

gdzie
 P to siła ciężkości masy,
 $S = k\Delta$ to siła reakcji sprężyny,
 $\Delta = \lambda + x$, Δ to całkowita deformacja sprężyny, λ to statyczna deformacja sprężyny,
 x to deformacja sprężyny wynikająca z ruchu wokół położenia równowagi statycznej.

Uwzględniając powyższe zapisy, równanie ruchu zapisano jako

$$m\ddot{x} = -k\lambda - kx + P \quad (26)$$

Z równowagi statycznej ($x = 0$, $\ddot{x} = 0$) wynika, że

$$-k\lambda + P \rightarrow \lambda = \frac{P}{k} \quad (27)$$

wobec tego

$$m\ddot{x} = -kx \quad (28)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (29)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (30)$$

gdzie $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ [$\frac{rad}{s}$] to częstość drgań swobodnych. Rozwiązaniem równania (30) jest

$$x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \quad (31)$$

$$\dot{x} = -C_1 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + C_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t) \quad (32)$$

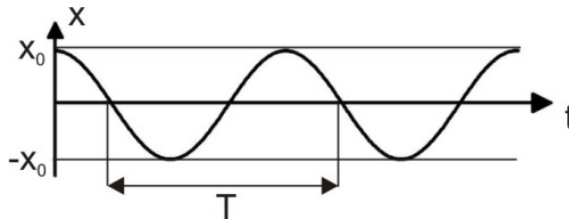
gdzie C_1 i C_2 to stałe całkowania, które wyznaczymy z równań (31) i (32) wykorzystując warunki początkowe, tzn. dla $t = t_0 = 0$ [s]

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases} \quad (33)$$

Z równań (31) i (32) otrzymamy $C_1 = x_0$, $C_2 = 0$. Ostatecznie ruch masy opisuje równanie

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t) \quad (34)$$

gdzie x_0 to amplituda drgań swobodnych. Przebieg rozwiązania przedstawiono na wykresie, gdzie zaznaczono to okres ruchu $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$



Rys. 3.

Jeżeli warunki początkowe będą zerowe, tzn. dla $t = t_0 = 0$ [s]

$$\begin{cases} x = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases} \quad (35)$$

to układ jest w stanie równowagi statycznej. Jeżeli natomiast warunki początkowe będą takie, że dla $t = t_0 = 0$ [s]

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = v_0 \end{cases} \quad (36)$$

to wówczas $C_1 = x_0$, $C_2 = \frac{v_0}{\omega_0}$ i równanie (31) można zapisać jako

$$x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (37)$$

gdzie

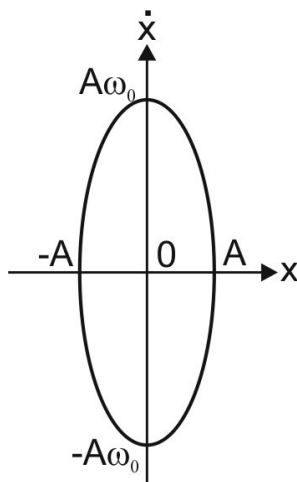
$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} = \sqrt{x_0^2 + v_0^2 \frac{m}{k}} \text{ to amplituda drgań,}$$

$$tg \varphi = \frac{C_1}{C_2} = \frac{x_0 \omega_0}{v_0} = \frac{x_0}{v_0} \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ określa kąt przesunięcia fazowego.}$$

Prędkość masy opisuje równanie

$$\dot{x} = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (38)$$

Ruch masy można odwzorować także na tzw. płaszczyźnie fazowej. Charakterystyką fazową nazywamy wykres, na którego osiach przedstawia się funkcję i jej pochodną, czyli $\dot{x}(x)$. Na rys. 3. przedstawiono charakterystykę fazową układu wykonującego drgania swobodne. W przypadku takich drgań trajektoria fazowa jest krzywą zamkniętą, gdyż w kolejnych okresach ruchu amplitudy przemieszczenia i prędkości nie zmieniają się. Wynika to z faktu, że energia mechaniczna układu jest stała (energia nie jest dostarczana do układu ani nie jest tracona). Mówimy, że układ jest na **cyklu granicznym**.



Rys. 4.

Z pokazanego przebiegu wynika, że gdy $x = \pm max$ to $\dot{x} = 0$ oraz gdy $\dot{x} = \pm max$ to $x = 0$. Pole powierzchni wyznaczone przez trajektorię fazową jest miarą energii mechanicznej układu. Wynika z tego, że im większe maksymalne przemieszczenie i prędkość drgań, tym większa energia mechaniczna układu.

Metoda energetyczna wyznaczania częstości drgań własnych układu

Jednym ze sposobów wyznaczenia częstości drgań własnych układu jest wykorzystanie zasady zachowania energii mechanicznej. Jest to metoda stosowana dla układów zachowawczych, tzn. takich, w których nie występują straty energii (nie występuje tłumienie – przypadek idealny).

Energia mechaniczna to

$$H = E + V \quad (39)$$

gdzie E to energia kinetyczna układu, V to potencjał układu. Z zasady zachowania energii mechanicznej wynika, że

$$E_{max} = V_{max} \quad (40)$$

Zatem należy wyznaczyć najpierw energię potencjalną i kinetyczną, a następnie ich maksymalne wartości.

Na podstawie równania (17) z punktu 7.1 zapisano potencjał układu (po uwzględnieniu deformacji statycznej (21))

$$V = \frac{1}{2}kx^2 \quad (41)$$

Potencjał zależy tylko od deformacji sprężyny wynikającej z ruchu układu względem położenia równowagi statycznej. Natomiast energia kinetyczna układu wynika z ruchu postępowego ciała o masie m

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (42)$$

Rozwiązanie równania drgań swobodnych (drgań układu zachowawczego) przewiduje się w postaci (37), czyli

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (43)$$

a prędkość drgań układu jest dana równaniem

$$\dot{x} = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (44)$$

gdzie A to amplituda drgań, ω_0 to częstość drgań własnych układu – wielkość którą chcemy wyznaczyć, φ to kąt przesunięcia fazowego. Wykorzystując równania (43) i (44) zapiszemy (41) i (42) w postaci

$$V = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) \quad (45)$$

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi) \quad (46)$$

Maksymalna wartość potencjału występuje gdy $\sin^2(.) = 1$, natomiast maksymalna wartość energii kinetycznej występuje gdy $\cos^2(.) = 1$. Zatem

$$V_{max} = \frac{1}{2}kA^2 \quad (47)$$

$$E_{max} = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \quad (48)$$

Porównując (47) i (48) na mocy równania (40) otrzymamy równanie

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \quad (49)$$

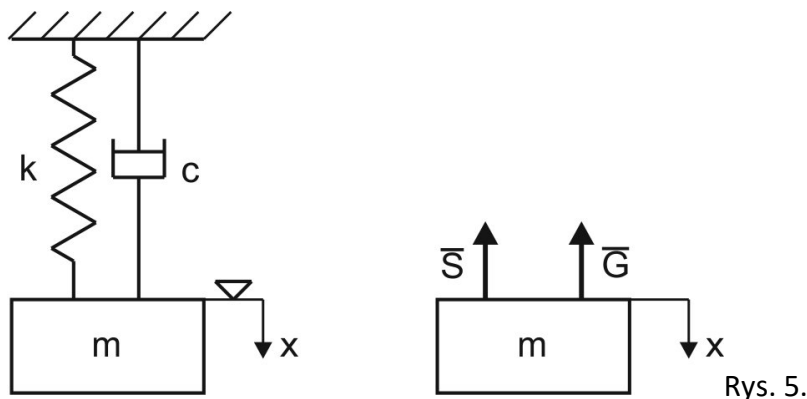
z którego wyznaczymy częstość drgań własnych jako

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (50)$$

3.3. Drgania tłumione

3.3.1. Równania ruchu

W rzeczywistości w układach zawsze występuje tłumienie, np. tzw. wewnętrzne (lub strukturalne związane z oporami przy mikroprzesunięciach kryształów materiału – to problem metaloznawstwa), dlatego amplituda drgań swobodnych maleje z czasem. Wówczas przyjmujemy model przedstawiony na poniższym rysunku



Rys. 5.

Dynamiczne równanie ruchu masy ma postać:

$$m\ddot{x} = -S - G \quad (51)$$

gdzie:

$S = kx$ to siła reakcji sprężyny,

$G = c\dot{x}$ to siła tłumienia wiskotycznego,

Uwzględniając powyższe zapisy, równanie ruchu zapisano jako

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (52)$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (53)$$

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (54)$$

gdzie

$2h = \frac{c}{m}$, h to tzw. współczynnik tłumienia jednostkowego,

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ to częstość drgań własnych. Rozwiązaniem równania (16) jest

Zgodnie z teorią równań różniczkowych, równanie (54) ma rozwiązania zależne od współczynników $2h$ i ω_0^2 . Można wyróżnić trzy przypadki:

- 1) $h^2 - \omega_0^2 < 0$ to przypadek tłumienia podkrytycznego („małego”)
- 2) $h^2 - \omega_0^2 = 0$ to przypadek tłumienia krytycznego
- 3) $h^2 - \omega_0^2 > 0$ to przypadek tłumienia nadkrytycznego („dużego”)

3.3.2. Tłumienie podkrytyczne

W przypadku tłumienia podkrytycznego rozwiązanie równania (54) ma formę:

$$x = e^{-ht}[C_1 \cos(\omega_t t) + C_2 \sin(\omega_t t)] \quad (55)$$

Część rozwiązania w nawiasie prostokątnym reprezentuje drgania harmoniczne z częstością

$$\omega_t = \sqrt{\omega_0^2 - h^2} \quad (56)$$

która jest nazywana częstością drgań tłumionych. Ze względu na to, że w rozważanym przypadku zachodzi zależność $h^2 - \omega_0^2 < 0$, to częstość drgań tłumionych jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Część rozwiązania o postaci e^{-ht} to funkcja asymptotycznie malejąca do zera gdy $t \rightarrow \infty$ i $h > 0$, lub eksponentalnie rosnąca do nieskończoności, gdy $t \rightarrow \infty$ i $h < 0$. Ten drugi przypadek, gdy tłumienie jest ujemne, reprezentuje niestabilne drgania układu – będzie on szczegółowo omówiony w dalszej części wykładu. Zajmiemy się teraz wyjaśnieniem przypadku tłumienia dodatniego, kiedy e^{-ht} dąży do zera. Wówczas iloczyn funkcji $C_1 \cos(\omega_t t) + C_2 \sin(\omega_t t)$ reprezentującej drgania harmoniczne i funkcji e^{-ht} malejącej asymptotycznie, daje drgania o stałej częstości ω_t i malejącej amplitudzie. Takie drgania nie są już drganiami harmonicznymi, ani nawet okresowymi. Aby wyznaczyć stałe całkowania C_1 i C_2 , zróżniczkujmy równanie (55) względem czasu

$$\dot{x} = -he^{-ht}[C_1 \cos(\omega_t t) + C_2 \sin(\omega_t t)] + e^{-ht}[-C_1 \omega_t \sin(\omega_t t) + C_2 \omega_t \cos(\omega_t t)] \quad (57)$$

Jeśli założymy warunki początkowe takie, że dla $t = t_0 = 0$ [s]

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = v_0 \end{cases} \quad (58)$$

to wówczas na podstawie równań (55) i (57) otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} x_0 = C_1 \\ v_0 = -hC_1 + C_2\omega_t \end{cases} \quad (59)$$

z którego wyznaczmy stałe całkowania

$$\begin{cases} C_1 = x_0 \\ C_2 = \frac{v_0 + hx_0}{\omega_t} \end{cases} \quad (60)$$

Rozwiązanie (55) będzie bardziej zrozumiałe, jeśli przedstawimy je w innej postaci, wykorzystując zasadę składania drgań harmonicznycych o tych samych częstościach ale przesuniętych w fazie o 90° (patrz równania (17) i (18) w punkcie 6.1.3. *Składanie drgań harmonicznycych*). Wynika z niej, że równanie (55) można przekształcić następująco

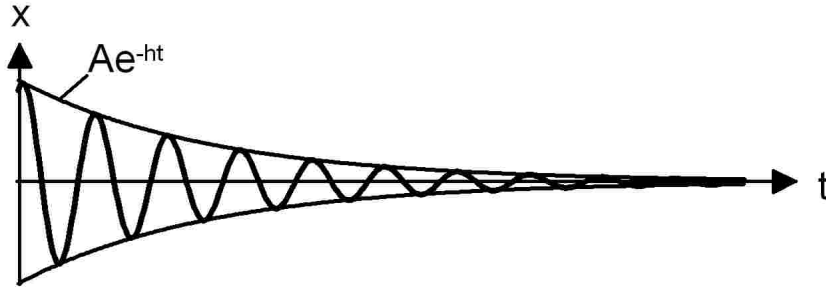
$$x = e^{-ht}[C_1 \cos(\omega_t t) + C_2 \sin(\omega_t t)] = Ae^{-ht} \sin(\omega_t t + \varphi) \quad (61)$$

gdzie

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + hx_0}{\omega_t}\right)^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + hx_0)^2}{\omega_0^2 - h^2}}$$
 to amplituda drgań,

$tg\varphi = \frac{C_1}{C_2} = \frac{x_0\omega_t}{v_0+hx_0} = \frac{x_0}{v_0+hx_0} \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$ określa kąt przesunięcia fazowego.

Można teraz powiedzieć, że funkcja (61) opisuje drgania, których obwiednią jest funkcja Ae^{-ht} , co przedstawiono na wykresie (rys. 6).



Rys. 6.

Prędkość masy opisuje równanie

$$\dot{x} = -Ahe^{-ht} \sin(\omega_t t + \varphi) + A\omega_t e^{-ht} \cos(\omega_t t + \varphi) \quad (62)$$

$$\dot{x} = Ae^{-ht} [\omega_t \cos(\omega_t t + \varphi) - h \sin(\omega_t t + \varphi)] \quad (63)$$

które można przekształcić do postaci

$$\dot{x} = Ae^{-ht} \sqrt{\omega_t^2 + h^2} \sin(\omega_t t + \varphi + \gamma) \quad (64)$$

gdzie

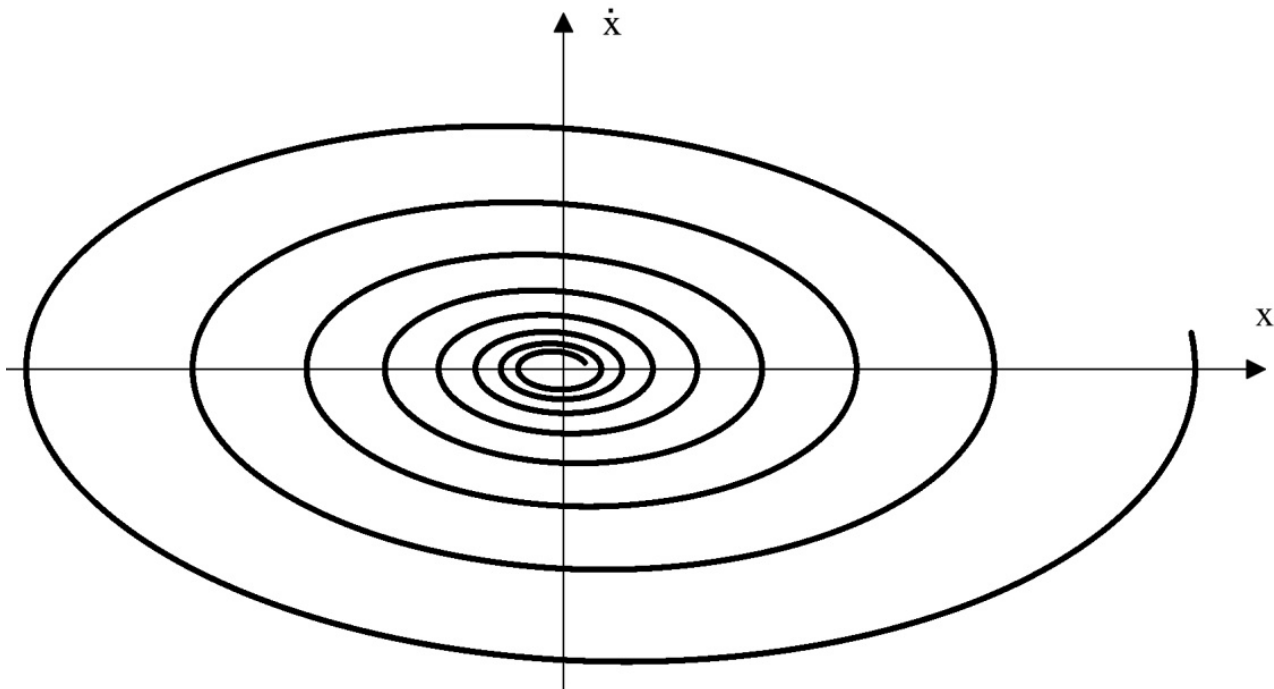
$tg\gamma = \frac{\omega_t}{-h} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - h^2}}{-h}$ określa kąt przesunięcia fazowego. Wykorzystując wzór (56) można w następujący sposób przekształcić wyrażenie $\sqrt{\omega_t^2 + h^2}$

$$\sqrt{\omega_t^2 + h^2} = \sqrt{\omega_0^2 - h^2 + h^2} = \omega_0 \quad (65)$$

i ostatecznie prędkość masy opisać równaniem

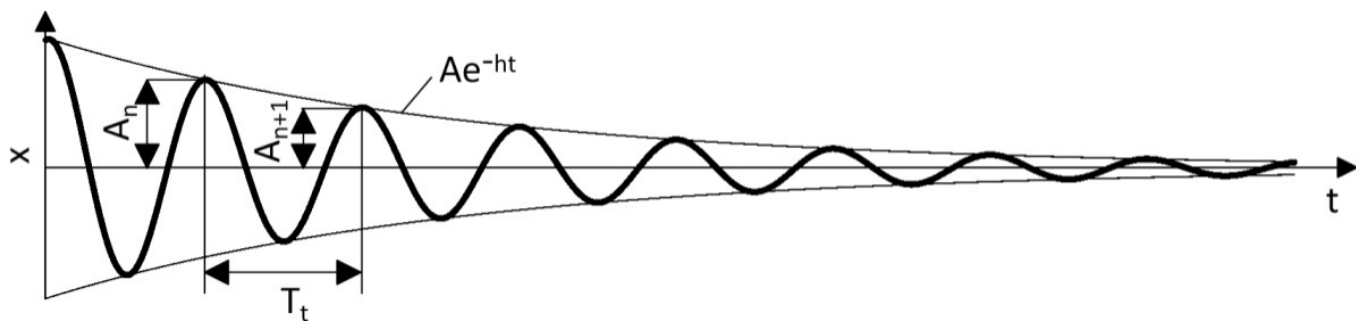
$$\dot{x} = A\omega_0 e^{-ht} \sin(\omega_t t + \varphi + \gamma) \quad (66)$$

Ruch masy można odwzorować także na tzw. płaszczyźnie fazowej. W rozważanym przypadku, w wyniku dodatniego tłumienia charakterystyka zmierza do zera. Wniosujemy z tego, że energia mechaniczna układu zmniejsza się i układ jest stabilny.



Rys. 7.

W celu określenia właściwości drgań tłumionych przeanalizujemy szczegółowo rozwiązanie (61) z zastosowaniem wykresu (Rys. 8).



Rys. 8.

Zaznaczono na nim dwie kolejne wartości przemieszczenia A_n i A_{n+1} odległe od siebie w czasie o wartość $T_t = \frac{2\pi}{\omega_t}$. Wielkość T_t nie jest okresem drgań tłumionych, ponieważ drgania te nie są okresowe. Jest ona pseudookresem, który tylko potocznie jest nazywany okresem drgań tłumionych z tego względu, że określa odległość w czasie pomiędzy „ekstremalnymi” położeniami masy A_n i A_{n+1} nazywanymi – również potocznie – amplitudami. Mówimy zatem w uproszczeniu o dwóch kolejnych amplitudach A_n i A_{n+1} i okresie drgań tłumionych T_t .

Stosunek dwóch kolejnych amplitud jest związany zależnością

$$e^{hT_t} = \frac{A_n}{A_{n+1}} \quad (67)$$

gdzie wykładnik funkcji eksponentialnej nazywany jest logarytmicznym dekrementem tłumienia $D = hT_t$. Jest on miarą spadku amplitudy drgań w czasie jednego okresu.

Z zależności (67) z uwzględnieniem $D = hT_t$

$$e^D = \frac{A_n}{A_{n+1}} \quad (68)$$

wynika, że spadek drgań jest eksponentialny jeśli stosunek amplitud jest przedstawiony w skali liniowej, co widać na rys. 8 – obwiednia drgań ma kształt funkcji eksponentialnej. Spadek drgań ma jednocześnie charakter liniowy jeśli stosunek amplitud jest przedstawiony w skali logarytmicznej

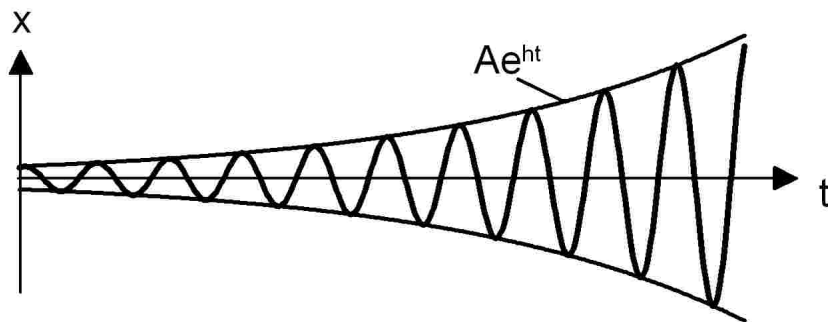
$$D = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} \quad (69)$$

Gdy przedstawi się przebieg drgań tłumionych w taki sposób, że oś wartości x jest logarytmiczna, wówczas obwiednia drgań jest funkcją liniową.

W technice występują również takie układy, w których tłumienie może być ujemne. Szczegółowe omówienie takich przypadków pozostawiamy na dalszą część wykładu. Tutaj wystarczy podać, że w takim przypadku ruch takiego układu opisuje równanie w postaci

$$x = e^{ht} [C_1 \cos(\omega_t t) + C_2 \sin(\omega_t t)] = A e^{ht} \sin(\omega_t t + \varphi) \quad (70)$$

a przebieg tego rozwiązania to oscylacje o rosnącej amplitudzie, co pokazano poniżej na rys. 9.



Rys. 9.

Pokazany przebieg drgań charakteryzuje tzw. drgania samowzbudne - w tym przypadku układ jest niestateczny. Układy samowzbudne to na przykład, takie, w których występuje tarcie suche, a prędkość ślizgania jest mała - np. skrzypce i smyczek, zawiasy w drzwiach. Innym przykładem drgań samowzbudnych występujących np. w konstrukcjach lotniczych to tzw. flutter skrzydła.

3.3.3. Tłumienie krytyczne

W przypadku tłumienia krytycznego ($h^2 - \omega_0^2 = 0$) rozwiązanie równania (54) ma formę:

$$x = e^{-ht}(C_1 + C_2t) \quad (71)$$

Prędkość masy opisuje równanie

$$\dot{x} = -he^{-ht}(C_1 + C_2t) + C_2e^{-ht} = e^{-ht}[C_2 - (C_1 + C_2t)h] \quad (72)$$

Jeśli założymy warunki początkowe takie, że dla $t = t_0 = 0$ [s]

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = v_0 \end{cases} \quad (73)$$

to wówczas na podstawie równań (71) i (72) otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} x_0 = C_1 \\ v_0 = C_2 - C_1h \end{cases} \quad (74)$$

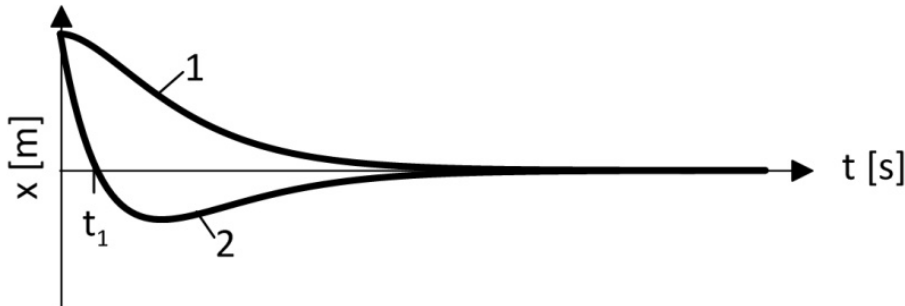
z którego wyznaczymy stałe całkowania

$$\begin{cases} C_1 = x_0 \\ C_2 = v_0 + x_0h \end{cases} \quad (75)$$

Ostatecznie rozwiązanie opisujące ruch masy ma formę

$$x = e^{-ht}[x_0 + (v_0 + x_0 h)t] \quad (76)$$

Jak wynika z rozwiązania (76) w przypadku tłumienia krytycznego nie występują oscylacje masy. W zależności od warunków początkowych dla danego tłumienia h rozwiązanie może przebiegać zgodnie z jednym z dwóch przypadków przedstawionych na wykresie.



Rys. 10.

W pierwszym przypadku (1) masa asymptotycznie zmierza do położenia równowagi nie przechodząc przez położenie równowagi statycznej, natomiast w drugim przypadku (2) występuje jednokrotne przejście masy przez to położenie i asymptotyczna zbieżność masy do położenia równowagi. To, który z przypadków będzie zachodził, można wyznaczyć analizując rozwiązanie (76). Jeśli wystąpi przejście masy przez położenie równowagi statycznej, to dla czasu $\infty > t = t_1 > 0$ będzie $x = 0$. Wówczas na podstawie drugiego członu rozwiązania (76) mamy

$$x_0 + (v_0 + x_0 h)t_1 = 0 \rightarrow t_1 = -\frac{x_0}{(v_0 + x_0 h)} \quad (77)$$

Jeśli zachodzi taka kombinacja warunków początkowych, dla których istnieje dodatnia skończona wartość t_1 , wówczas występuje jednokrotne przejście masy przez położenie równowagi. Człon rozwiązania e^{-ht} nie jest tutaj brany pod uwagę, ponieważ wynika z niego, że $x \rightarrow 0$ jeśli $t \rightarrow \infty$, co nie jest poszukiwanym przez nas rozwiązaniem.

3.3.4. Tłumienie nadkrytyczne

W przypadku tłumienia nadkrytycznego ($h^2 - \omega_0^2 > 0$) rozwiązanie równania (54) ma formę:

$$x = Ce^{rt} \quad (78)$$

gdzie r to stała wartość. Aby ją wyznaczyć zróżniczkujemy rozwiązanie (78) względem czasu otrzymując

$$\dot{x} = Cre^{rt} \quad (79)$$

$$\ddot{x} = Cr^2e^{rt} \quad (80)$$

I podstawimy otrzymane zależności do równania (54):

$$Cr^2e^{rt} + 2hCre^{rt} + \omega_0^2Ce^{rt} = 0 \quad (81)$$

$$Ce^{rt}(r^2 + 2hr + \omega_0^2) = 0 \quad (82)$$

Równanie będzie zawsze spełnione, bez względu na wartość t , jeśli wyrażenie w nawiasie będzie równo zero

$$r^2 + 2hr + \omega_0^2 = 0 \quad (83)$$

Zależność (83) to równanie kwadratowe, zatem obliczamy wyróżnik tego równania, od którego zależy jego rozwiązanie. Wyróżnik równania

$$\Delta = 4(h^2 - \omega_0^2) \quad (84)$$

jest większy od zera, ponieważ rozważamy przypadek tłumienia nadkrytycznego, kiedy $h^2 - \omega_0^2 > 0$. Równanie (83) ma więc dwa rozwiązania

$$r_{1,2} = -h \mp \sqrt{h^2 - \omega_0^2} \quad (85)$$

które są ujemne. Uwzględniając obydwie stałe r_1 i r_2 w rozwiązaniu (78), otrzymujemy równanie opisujące przemieszczenie masy

$$x = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad (86)$$

gdzie C_1 i C_2 to stałe całkowania. Prędkość masy opisuje równanie

$$\dot{x} = C_1 r_1 e^{r_1 t} + C_2 r_2 e^{r_2 t} \quad (87)$$

Jeśli założymy warunki początkowe takie, że dla $t = t_0 = 0$ [s]

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = v_0 \end{cases} \quad (88)$$

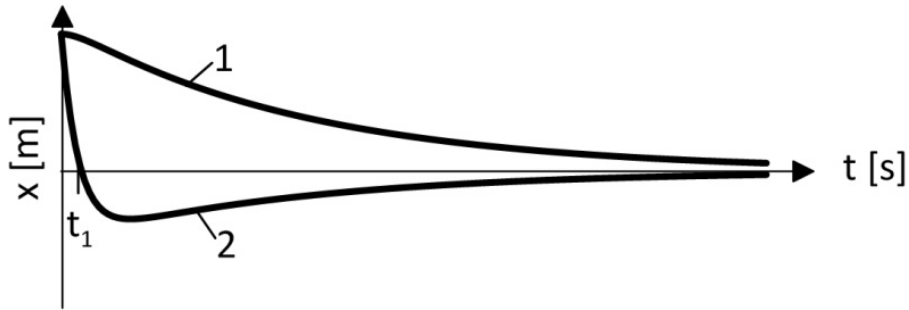
to wówczas na podstawie równań (86) i (87) otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} x_0 = C_1 + C_2 \\ v_0 = C_1 r_1 + C_2 r_2 \end{cases} \quad (89)$$

z którego wyznaczamy stałe całkowania

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{v_0 - x_0 r_2}{r_2 - r_1} = -\frac{v_0 - x_0(-h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2})}{2\sqrt{h^2 - \omega_0^2}} \\ C_2 = \frac{v_0 - x_0 r_1}{r_2 - r_1} = \frac{v_0 - x_0(-h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2})}{2\sqrt{h^2 - \omega_0^2}} \end{cases} \quad (90)$$

Z rozwiązania równania ruchu w postaci (86) wynika, że w przypadku tłumienia nadkrytycznego nie występują oscylacje masy. Stałe r_1 i r_2 są ujemne i obydwa człony rozwiązania zbiegają asymptotycznie do zera, zatem rozwiązanie jest stabilne. W zależności od warunków początkowych dla danego tłumienia h i częstości ω_0 rozwiązanie może przebiegać zgodnie z jednym z dwóch przypadków przedstawionych na wykresie.



Rys. 11.

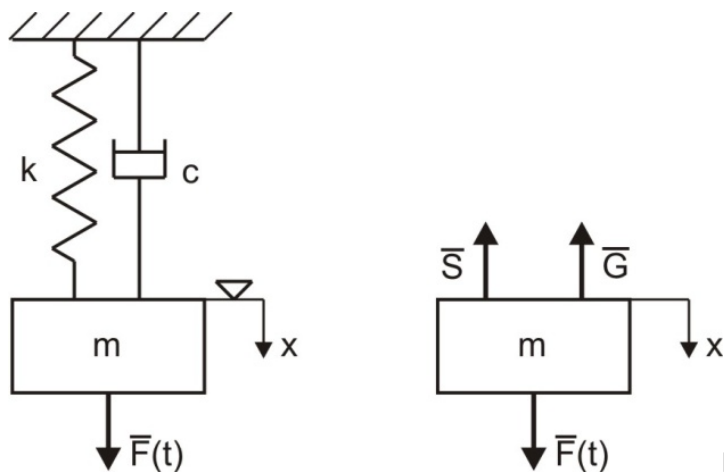
Z rozwiązania (86) przy uwzględnieniu wyznaczonych stałych można wyznaczyć czas t_1 , taki że $\infty > t_1 > 0$, w którym ewentualnie nastąpi przejście masy przez położenie równowagi

$$t_1 = \frac{\ln\left(\frac{v_0 - x_0(-h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2})}{v_0 - x_0(-h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2})}\right)}{2\sqrt{h^2 - \omega_0^2}} \quad (86)$$

3.4. Drgania wymuszone z tłumieniem wiskotycznym

3.4.1. Równania ruchu

W celu opisu drgań wymuszonych z tłumieniem wiskotycznym przyjmujemy następujący model, pokazany na rysunku.



Rys. 12.

Dynamiczne równanie ruchu masy ma postać:

$$m\ddot{x} = F(t) - S - G \quad (87)$$

gdzie:

$S = kx$ to siła reakcji sprężyny,

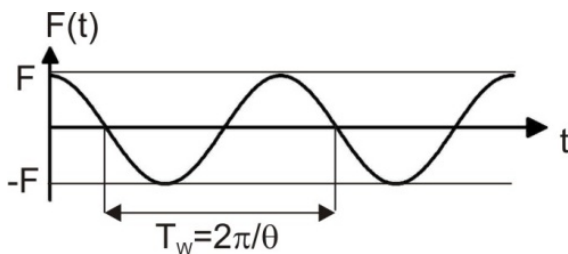
$G = c\dot{x}$ to siła tłumienia wiskotycznego,

$F(t)$ to siła wymuszająca ruch.

Charakterystykę wymuszenia przyjęto jako wymuszenie harmonicznie zmienne, ponieważ jest to jedno z najbardziej niebezpiecznych wymuszeń dla układu, czyli

$$F(t) = F \cos(\theta t) \quad (88)$$

gdzie F [N] to amplituda wymuszenia, θ $\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$ to częstość wymuszenia.



Rys. 13.

Uwzględniając powyższe zapisy, równanie ruchu zapisano jako

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \cos(\theta t) \quad (89)$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m} \cos(\theta t) \quad (90)$$

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = q \cos(\theta t) \quad (91)$$

gdzie

$2h = \frac{c}{m}$, h to tzw. współczynnik tłumienia jednostkowego,

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ to częstość drgań własnych.

$q = \frac{F}{m}$ to amplituda wymuszenia jednostkowego.

Rozwiązaniem równania (91) jest

$$x = x_1 + x_2 \quad (92)$$

gdzie x_1 to rozwiązanie ogólne równania jednorodnego (54) ($\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$), którego postać zależy od przypadku tłumienia, x_2 to rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego. Sens fizyczny tych rozwiązań jest następujący: x_1 opisuje drgania swobodne tłumione wynikające z niezerowych warunków początkowych, x_2 opisuje drgania wymuszone ustalone. Rozwiązanie x_1 , przy założeniu dodatniego tłumienia, jest stabilną częścią rozwiązania i stosunkowo szybko zanika w czasie. Z punktu widzenia inżynierskiego interesuje nas głównie rozwiązanie opisujące drgania wymuszone ustalone x_2 , którego forma jest następująca

$$x_2 = B \cos(\theta t - \gamma) \quad (93)$$

Ponieważ drgania swobodne tłumione zanikają, to interesuje nas głównie rozwiązanie opisujące drgania wymuszone ustalone, czyli możemy przyjąć

$$x = x_2 = B \cos(\theta t - \gamma) \quad (94)$$

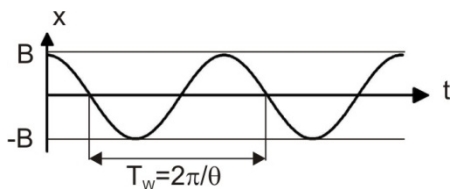
gdzie

$$B = \frac{q}{\sqrt{(\omega_0^2 - \theta^2)^2 + 4h^2\theta^2}} \quad (95)$$

to amplituda drgań wymuszonych ustalonych, natomiast kąt przesunięcia fazowego jest zdefiniowany przez wzór

$$tg\gamma = \frac{2h\theta}{\omega_0^2 - \theta^2} \quad (96)$$

Przebieg rozwiązania przedstawiono na wykresie. Takie rozwiązanie, określone wzorami (95) i (96) występuje poza sytuacją gdy jednocześnie $\omega_0 = \theta$ i $h = 0$.



Rys. 14.

Przebieg czasowy drgań pokazuje, że masa wykonuje ruch okresowy o ustalonej amplitudzie. Okres drgań wymuszonych ustalonych T_w jest taki sam jak okres siły wymuszającej. W zaprezentowanym ruchu interesująca jest wielkość amplitudy drgań wymuszonych. Analizuje się tzw. charakterystykę amplitudowo-częstościową, którą uzyskuje się następująco. Należy licznik i mianownik wyrażenia (95) podzielić przez ω_0^2 , czyli

$$B = \frac{\frac{q}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4h^2}{\omega_0^2} \cdot \frac{\theta^2}{\omega_0^2}}} \quad (97)$$

Licznik wyrażenia (33) można przekształcić do postaci

$$\frac{q}{\omega_0^2} = \frac{\frac{F}{m}}{\frac{k}{m}} = \frac{F}{k} = \delta_{st} \quad (98)$$

która wyraża statyczną deformację sprężyny przez siłę o wartości amplitudy wymuszenia F . Natomiast współczynnik $\frac{2h}{\omega_0} = \beta$ reprezentuje bezwymiarowy współczynnik tłumienia, zaś współczynnik $\frac{\theta}{\omega_0} = \alpha$ reprezentuje bezwymiarową częstość. Uwzględniając przyjęte oznaczenia zapisano równanie (97) w postaci

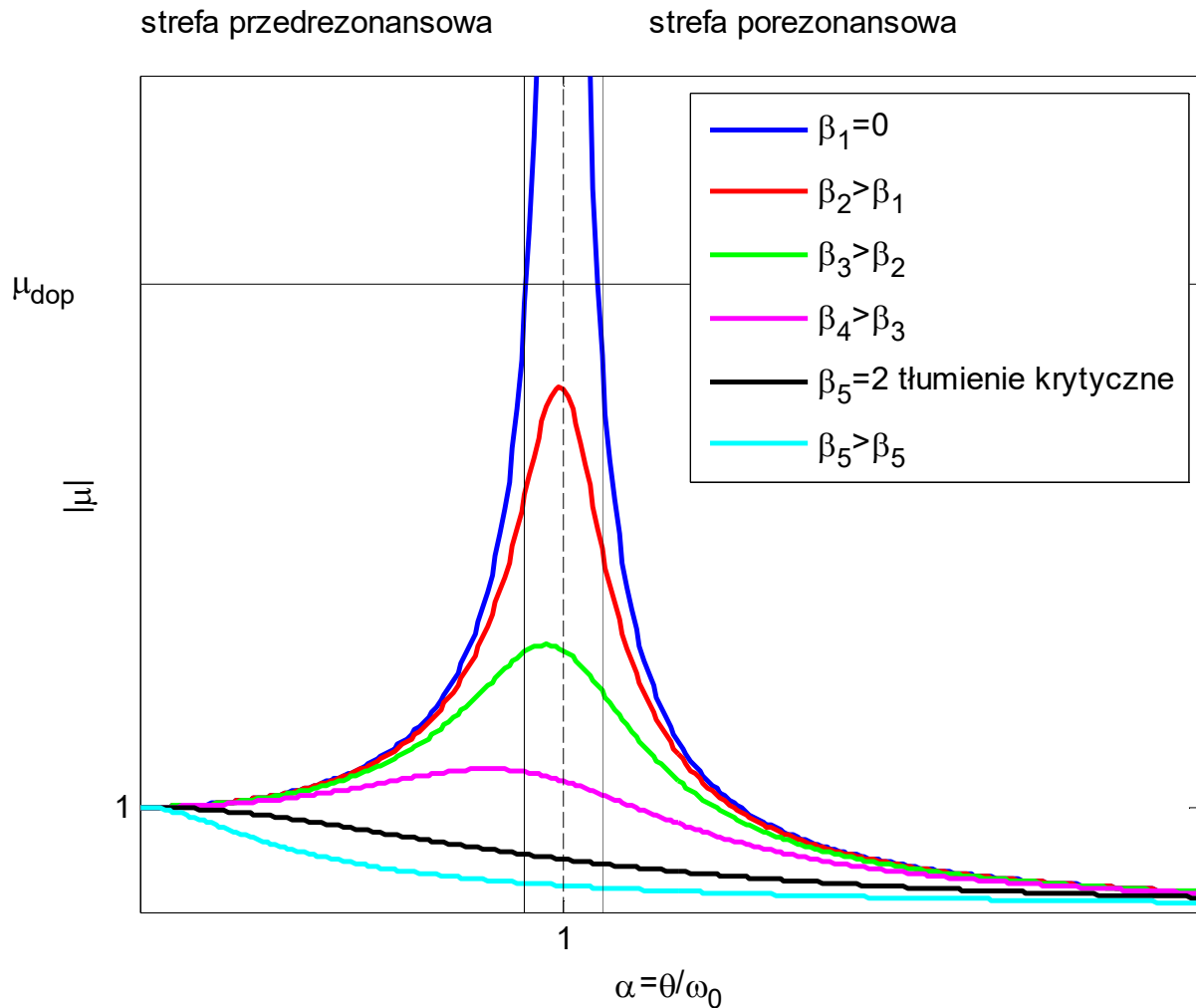
$$B = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + \beta^2 \alpha^2}} \quad (99)$$

Dzieląc równanie (99) przez deformację statyczną δ_{st} otrzymano

$$\mu = \frac{B}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2 + \beta^2 \alpha^2}} \quad (100)$$

gdzie $\mu = \frac{B}{\delta_{st}}$ to tzw. współczynnik uwielokrotnienia amplitudy (współczynnik dynamiczny). Zawiera on informację o tym, jaka jest deformacja wywołana siłą zmienną o amplitudzie F w stosunku do deformacji statycznej wywołanej siłą statyczną o wartości F . Z zależności (99) wynika, że ten stosunek zależy od częstości siły wymuszającej θ zawartej we współczynniku α . Charakterystyka dynamiczna (99) jest nazywana charakterystyką amplitudowo-częstościową i można ją przedstawić na wykresie przyjmując, że α (czyli stosunek częstości wymuszenia do częstości własnej) zmienia się od 0 do

∞ . Taką charakterystykę, dla różnych wartości tłumienia β przedstawiono na poniższym rysunku.



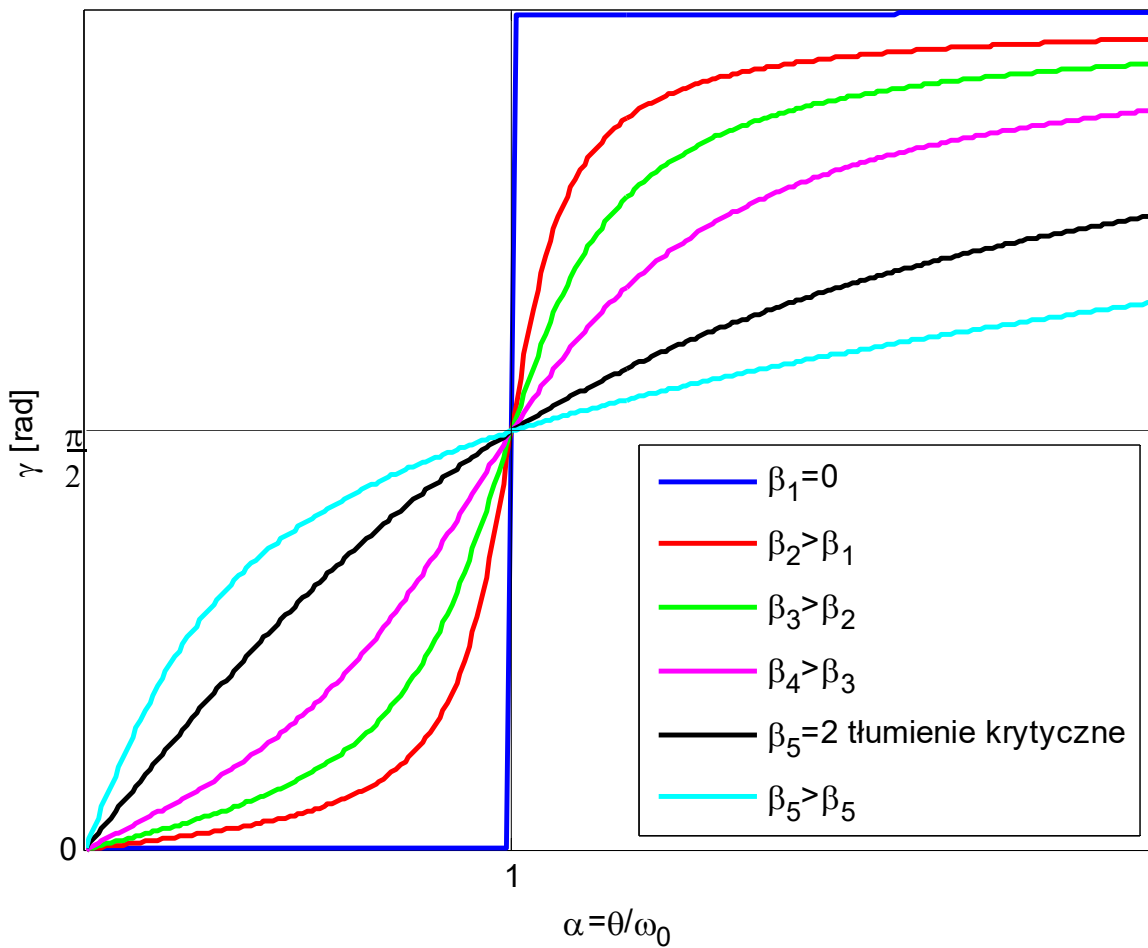
Rys. 15.

Zauważamy, że jeśli $\beta = 0$ (tzn. gdy nie ma tłumienia) to przy $\alpha = \frac{\theta}{\omega_0} = 1$ wartość $\mu = \frac{B}{\delta_{st}} \rightarrow \infty$, czyli występuje zjawisko rezonansu mechanicznego polegającego na ciągłym wzroście amplitudy drgań B do nieskończoności. Dla każdego układu można określić dopuszczalną wartość współczynnika uwielokrotnienia amplitudy, czyli μ_{dop} , którego wartość wyznacza granice strefy rezonansu. Jeżeli nie występuje tłumienie to układ powinien pracować w strefie przed- i pozarezonansowej. Praca w strefie rezonansowej jest niebezpieczna dla układu, gdyż prowadzi ona do jego zniszczenia. Jeżeli $\beta \neq 0$ (tzn. gdy występuje tłumienie), to otrzymujemy przebiegi, z których kilka pokazano na rysunku. Wówczas dla $\alpha = 1$ wartość współczynnika uwielokrotnienia jest ograniczona i wynosi $\mu = \frac{1}{\beta} = \frac{\omega_0}{2h}$, czyli maleje wraz ze wzrostem tłumienia. Należy jeszcze zauważyć kilka faktów. Bez względu na tłumienie, wszystkie krzywe rozpoczynają się w wartości 1 dla $\alpha = 0$. Jest to oczywiste ponieważ wtedy częstość wymuszenia wynosi zero i wymuszeniem jest statyczna siła o wartości F . Ponadto w przypadku, gdy $\alpha = \frac{\theta}{\omega_0} \rightarrow \infty$, czyli częstość wymuszenia θ dąży do nieskończoności, to współczynnik uwielokrotnienia amplitudy maleje do zera. Innymi słowy, bardzo szybkozmienne wymuszenia stabilizują układ. Jeszcze inaczej można powiedzieć, że wymuszenie zmienia się tak szybko, iż układ nie nadąża odpowiadać na wymuszenie.

Wróćmy jeszcze do wyrażenia (96) określającej kąt przesunięcia fazowego przemieszczenia względem wymuszenia. Podzielmy licznik i mianownik tego wyrażenia (95) przez ω_0^2 otrzymując

$$tg\gamma = \frac{\frac{2h \cdot \theta}{\omega_0 \omega_0}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}} = \frac{\beta\alpha}{1-\alpha^2} \quad (101)$$

Zmianę kąta przesunięcia fazowego w funkcji bezwymiarowej częstości α pokazano na rysunku.



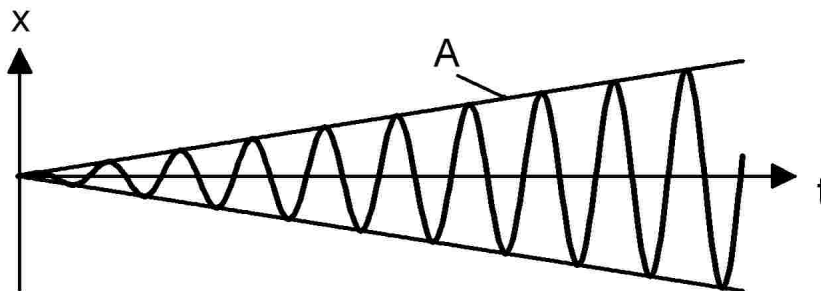
Rys. 16.

Widać, że bez względu na wielkość tłumienia β , w rezonansie kąt przesunięcia fazowego zawsze wynosi 90° i wraz ze wzrostem częstości wymuszenia dąży do 180° (wówczas wymuszenie jest w przeciw-fazie do przemieszczenia i dlatego następuje stabilizacja układu).

Jeżeli występują drgania wymuszone przy pracy układu w rezonansie mechanicznym (gdy $\omega_0 = \theta$) i braku tłumienia ($h = 0$), to rozwiązaniem równania (91) jest

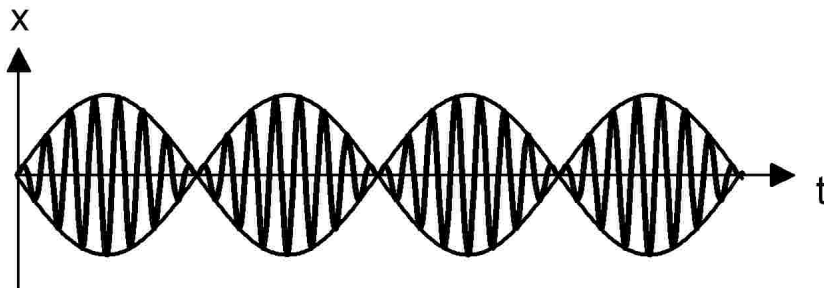
$$x = A \sin(\theta t) \quad (102)$$

gdzie $A = F \frac{\theta}{2k} t$ lub inaczej $A = F \frac{\omega_0}{2k} t = \frac{F}{2\sqrt{mk}} t$. Wynika z tego, że amplituda rośnie do nieskończoności, co pokazano na poniższym rysunku, a obwiednią drgań jest linia prosta.



Rys. 17.

Jeżeli układ pracuje w pobliżu rezonansu, tzn. częstość wymuszenia θ jest nieznacznie mniejsza od ω_0 (tuż przed rezonansem) lub jest nieznacznie większa od ω_0 (tuż poza rezonansem), wówczas występuje tzw. zjawisko dudnienia, co pokazano na poniższym rysunku. Amplituda drgań okresowo rośnie i maleje.



Rys. 18.

4. Wibroizolacja

Drgania występujące w układach mechanicznych to niekorzystne zjawisko, bo powodują zmęczenie materiału (rysy, pęknięcia i zniszczenie konstrukcji) oraz pojawiają się luzów w połączeniach ruchomych (niedokładność pracy układu mechanicznego). Konstruktorzy tak projektują układy, aby występujące drgania były możliwie małe (całkowite ich wyeliminowanie jest niemożliwe). Jeżeli w czasie pracy układu mechanicznego drgania jednak występują, to powinno się zrobić wszystko, co możliwe, aby nie przenosiły się z układu na obudowę lub odwrotnie, rozwiązujemy wówczas tzw. problem wibroizolacji drgań mechanicznych. Mamy dwa rodzaje zagadnień wibroizolacji:

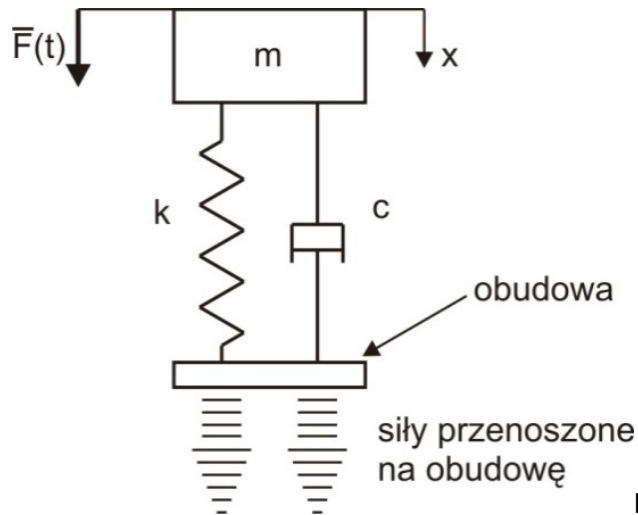
- a) wibroizolacja czynna (siłowa) dawniej nazywana amortyzacją,
- b) wibroizolacja bierna (przemieszczeniowa) dawniej nazywana izolacją.

W przypadku a) konstrukcja wsporcza (obudowa) powinna być chroniona przed działaniem obciążeń dynamicznych, czyli sił przenoszonych na obudowę. W przypadku b) urządzenie powinno być chronione przed drganiami obudowy (fundamentu).

4.1. Wibroizolacja przy wymuszeniu harmonicznym

4.1.1. Wibroizolacja czynna

Rozważmy następujący przykład układu drgającego (np. obrabiarka). Masa m wykonuje drgania wymuszone - ten rodzaj drgań jest niebezpieczny dla układu.



Rys. 1.

Równanie opisujące ruch masy to

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F\cos(\theta t) \quad (1)$$

Równanie to doprowadzimy do postaci

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = q \cos(\theta t) \quad (2)$$

gdzie

$2h = \frac{c}{m}$, h to tzw. współczynnik tłumienia jednostkowego,

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ to częstość własna układu,

$q = \frac{F}{m}$ to amplituda wymuszenia jednostkowego.

Rozwiązanie równania (2) opisujące drgania wymuszone ustalone to

$$x = B \cos(\theta t - \gamma) \quad (3)$$

gdzie amplituda drgań wymuszonych ustalonych określona jest jako

$$B = \frac{q}{\sqrt{(\omega_0^2 - \theta^2)^2 + 4h^2\theta^2}} \quad (4)$$

W tym przypadku na obudowę przenoszona jest siła przez sprężynę i tłumik, która jest równa

$$P(t) = S(t) + G(t) = kx + c\dot{x} \quad (5)$$

Ponieważ przemieszczenie x jest opisane równaniem (3), to prędkość masy opisuje równanie

$$\dot{x} = -B\theta \sin(\theta t - \gamma) \quad (6)$$

Siłę przenoszoną na obudowę można zapisać następująco

$$P(t) = kB \cos(\theta t - \gamma) - cB\theta \sin(\theta t - \gamma) = C \cos(\theta t - \gamma + \alpha) \quad (7)$$

gdzie

$$C = B\sqrt{k^2 + (c\theta)^2} \quad (8)$$

to amplituda siły przenoszonej na obudowę, natomiast kąt przesunięcia fazowego α jest określony przez wzór

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c\theta}{k} \quad (9)$$

Uwzględniając (4) i (8) otrzymamy amplitudę siły przenoszonej na obudowę w formie

$$C = \frac{q\sqrt{k^2 + (c\theta)^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \theta^2)^2 + 4h^2\theta^2}} \quad (10)$$

Dzieląc licznik i mianownik równania (10) przez ω_0^2 dostaniemy zależność

$$C = \frac{\frac{q}{\omega_0^2} \sqrt{k^2 + (c\theta)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4h^2}{\omega_0^2} \frac{\theta^2}{\omega_0^2}}} = \frac{\frac{F}{k} \sqrt{k^2 + (c\theta)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4h^2}{\omega_0^2} \frac{\theta^2}{\omega_0^2}}} = \frac{F \sqrt{1 + \left(\frac{c\theta}{k}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4h^2}{\omega_0^2} \frac{\theta^2}{\omega_0^2}}} = \frac{F \sqrt{1 + \left(\frac{2h\theta}{\omega_0^2}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4h^2}{\omega_0^2} \frac{\theta^2}{\omega_0^2}}} \quad (11)$$

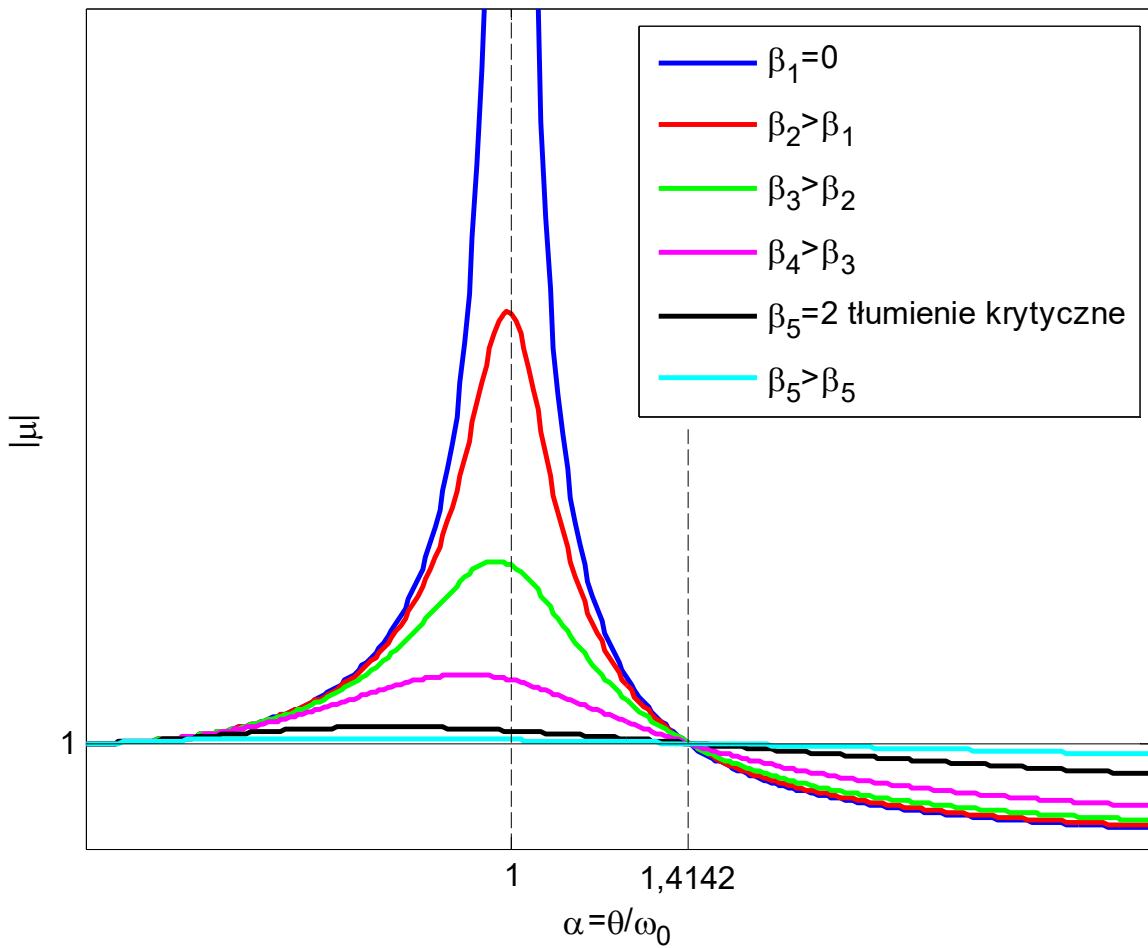
w której najpierw wykorzystano fakt, że $\frac{q}{\omega_0^2} = \frac{F}{k} = \frac{F}{\frac{m}{k}}$ a następnie skorzystano z zależności $c = 2hm$ i $k = \omega_0^2 m$ aby człon $\frac{c\theta}{k}$ przekształcić do postaci $\frac{2h\theta}{\omega_0^2}$. Wprowadzając znane już oznaczenia $\alpha = \frac{\theta}{\omega_0}$ i $\beta = \frac{2h}{\omega_0}$ zapisano

$$C = \frac{F \sqrt{1 + \beta^2 \alpha^2}}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + \beta^2 \alpha^2}} \quad (12)$$

Dzieląc równanie (12) przez amplitudę siły wymuszającej dostaniemy równanie

$$\mu = \frac{C}{F} = \frac{\sqrt{1 + \beta^2 \alpha^2}}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + \beta^2 \alpha^2}} \quad (13)$$

gdzie μ to tzw. współczynnik przepuszczalności wibroizolacji, który jest stosunkiem amplitudy siły przenoszonej na obudowę C do amplitudy siły wymuszającej F . Zależność współczynnika przepuszczalności wibroizolacji μ od bezwymiarowej częstości α dla różnych wartości tłumienia pokazano na poniższym rysunku.



Rys. 2.

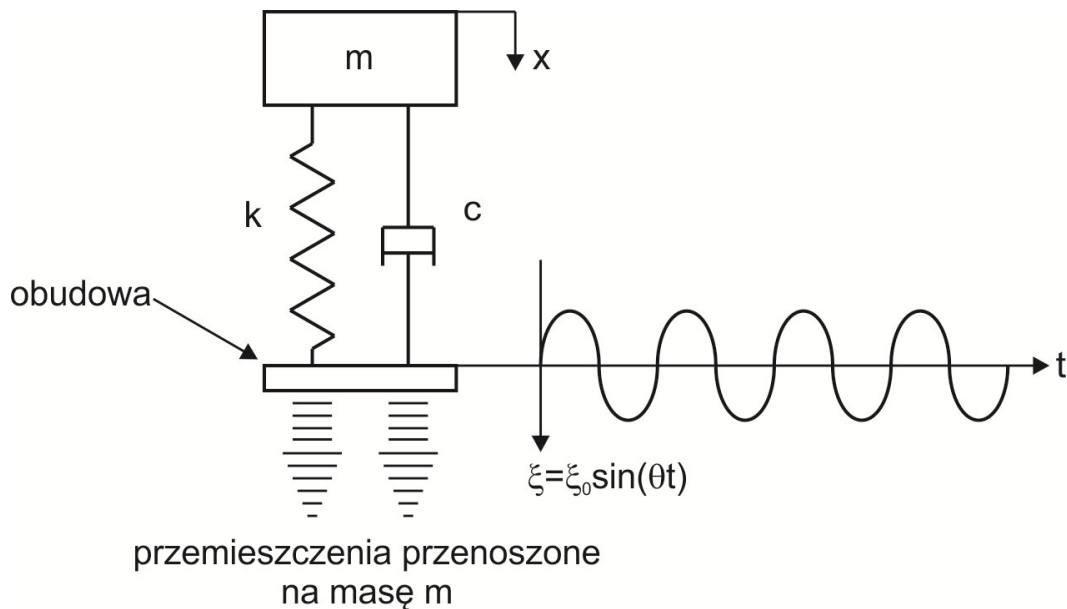
Jeśli $\beta = 0$ (tzn. gdy nie ma tłumienia) to $|\mu| \leq 1$ gdy $\alpha = \frac{\theta}{\omega_0} > \sqrt{2}$. Zatem $\frac{\theta}{\omega_0} > \sqrt{2}$ to warunek wibroizolacji czynnej. Ponieważ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m'}}$, to należy dobrać taką sprężynę (dostatecznie miękką), aby $k < \frac{m\theta^2}{2}$. Jeżeli w układzie występuje tłumienie, ($\beta_i \neq 0$) to wówczas dostajemy przebiegi, których kilka pokazano na rysunku. Z pokazanych przebiegów wynika, że tłumienie psuje wibroizolację, ponieważ siła przenoszona na obudowę jest wówczas większa niż w przypadku, gdy nie ma tłumienia.

Należy pamiętać, że w czasie ruchu maszyny lub jej zatrzymania przechodzimy przez strefę rezonansu, w której tłumienie jest korzystne, bo amplitudy drgań są ograniczone. Dlatego w przypadku wibroizolacji wprowadzamy wkładki z gumy, drewna, tkaniny czy mas plastycznych, bo elementy te jako tłumiki nieznacznie psują wibroizolację, ale są korzystne w przejściowych okresach pracy maszyny.

Podsumowując, warunek osiągnięcia najskuteczniejszej wibroizolacji i spokojnej pracy maszyny w ruchu ustalonym jest taki, aby $\frac{\theta}{\omega_0} > \sqrt{2}$ (zazwyczaj wynosi $4 \div 5$) oraz aby było małe tłumienie. Należy pamiętać, że analizowany powyżej przypadek to układ o jednym stopniu swobody. W rzeczywistości układy mają znacznie więcej stopni swobody, bo np. w przypadku, gdy $\frac{\theta}{\omega_0} \approx 10 \div 20$ może wystąpić zjawisko tzw. rezonansu wewnętrznego sprężyn, które w rzeczywistości mają masę.

4.1.2. Wibroizolacja bierna

W przypadku wibroizolacji biernej mamy następujący układ przedstawiony na rysunku.



Rys. 9.

Przemieszczenie podłoża (obudowy) możemy opisać np. funkcją harmoniczną

$$\xi = \xi_0 \sin(\theta t) \quad (14)$$

Są to np. ruchy podłoża wywołane zaburzeniem równowagi statycznej, oscylacje komunikacyjne albo trzęsienie ziemi, które wymuszają ruch masy. Siła w sprężynie i tłumiku to odpowiednio

$$S = k(\xi - x) \quad (15)$$

$$G = c(\dot{\xi} - \dot{x}) \quad (16)$$

gdzie założono, że $\xi > x$. Równanie ruchu masy ma formę

$$m\ddot{x} = G + S \quad (17)$$

a po podstawieniu wartości sił reakcji sprężyny i tłumika będzie ona następująca

$$m\ddot{x} = c(\dot{\xi} - \dot{x}) + k(\xi - x) \quad (18)$$

i dalej

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{\xi} + k\xi \quad (19)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\xi_0\theta\cos(\theta t) + k\xi_0\sin(\theta t) \quad (20)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \xi_0\sqrt{k^2 + (c\theta)^2}\sin(\theta t + \alpha) \quad (21)$$

Ostatecznie zapiszemy

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = D\sin(\theta t + \alpha) \quad (22)$$

gdzie

$$D = \xi_0\sqrt{k^2 + (c\theta)^2} \quad (23)$$

to amplituda wymuszenia drgań masy, natomiast kąt przesunięcia fazowego α jest określony przez wzór

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{c\theta}{k} \quad (24)$$

Równanie (22) doprowadzimy do znanej formy

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = q \sin(\theta t + \alpha) \quad (25)$$

gdzie

$2h = \frac{c}{m}$, h to tzw. współczynnik tłumienia jednostkowego,

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ to częstość własna układu,

$q = \frac{D}{m}$ to amplituda wymuszenia jednostkowego.

Rozwiązanie równania (25) opisujące drgania wymuszone masy ma znaną postać

$$x = B \cos(\theta t - \gamma) \quad (26)$$

z amplitudą określoną jako

$$B = \frac{q}{\sqrt{(\omega_0^2 - \theta^2)^2 + 4h^2\theta^2}} \quad (27)$$

Uwzględniając, że $q = \frac{D}{m}$ oraz zależność (23), amplitudę drgań masy zapiszemy w postaci

$$B = \frac{\frac{\xi_0}{m} \sqrt{k^2 + (c\theta)^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \theta^2)^2 + 4h^2\theta^2}} \quad (28)$$

Dzieląc licznik i mianownik równania (28) przez ω_0^2 dostaniemy zależność

$$B = \frac{\frac{\xi_0}{\omega_0^2 m} \sqrt{k^2 + (c\theta)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4h^2}{\omega_0^2} \frac{\theta^2}{\omega_0^2}}} = \frac{\frac{\xi_0}{k} \sqrt{k^2 + (c\theta)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4h^2}{\omega_0^2} \frac{\theta^2}{\omega_0^2}}} = \frac{\xi_0 \sqrt{1 + \left(\frac{c\theta}{k}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4h^2}{\omega_0^2} \frac{\theta^2}{\omega_0^2}}} = \frac{\xi_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2h\theta}{\omega_0^2}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4h^2}{\omega_0^2} \frac{\theta^2}{\omega_0^2}}} \quad (29)$$

w której najpierw wykorzystano fakt, że $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ a następnie skorzystano z zależności $c = 2hm$ i $k = \omega_0^2 m$ aby człon $\frac{c\theta}{k}$ przekształcić do postaci $\frac{2h\theta}{\omega_0^2}$. Wprowadzając znane już oznaczenia $\alpha = \frac{\theta}{\omega_0}$ i $\beta = \frac{2h}{\omega_0}$ zapisano

$$B = \frac{\xi_0 \sqrt{1 + \beta^2 \alpha^2}}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + \beta^2 \alpha^2}} \quad (30)$$

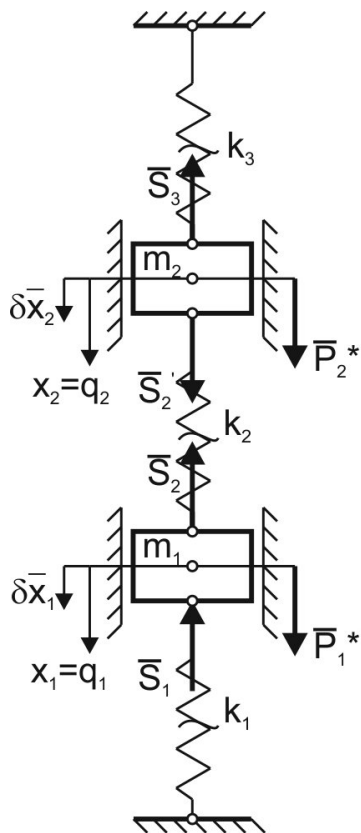
Dzieląc równanie (30) przez amplitudę wymuszenia kinematycznego ξ_0 dostaniemy równanie

$$\mu = \frac{B}{\xi_0} = \frac{\sqrt{1+\beta^2\alpha^2}}{\sqrt{(1-\alpha^2)^2+\beta^2\alpha^2}} \quad (31)$$

gdzie μ to tzw. współczynnik przepuszczalności wibroizolacji, który teraz jest stosunkiem amplitudy drgań masy B do amplitudy wymuszenia kinematycznego ξ_0 . Jak można zauważyć, postać współczynnika przepuszczalności wibroizolacji w przypadku wibroizolacji zarówno czynnej jak i biernej jest taka sama. Zatem wnioski dotyczące wibroizolacji biernej są identycznej jak w przypadku wibroizolacji czynnej. Współczynnik przepuszczalności wibroizolacji biernej nazywany jest współczynnikiem amplifikacji (wzmocnienia) drgań podłoża.

5. Drgania układu mechanicznego o dwóch stopniach swobody

5.1. Drgania wzdłużne



Dla układu mechanicznego pokazanego na rysunku ułożymy dynamiczne równania ruchu stosując równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Układ składa się z dwóch wozików połączonych między sobą oraz z ostoją za pomocą sprężyn. Ruch wozików jest wymuszony przez siły harmoniczne o jednakowej częstotliwości. Tarcie w układzie zostało pominięte. Znane są: masy wozików m_1 [kg] i m_2 [kg], współczynniki sprężystości sprężyn k_1 [N/m], k_2 [N/m] i k_3 [N/m], siły wymuszające ruch $P_1^* = P_{10} \cos(\theta t)$, $P_2^* = P_{20} \cos(\theta t)$, P_{10} [N] i P_{20} [N] - amplitudy sił wymuszających, θ [rad/s] - częstota wymuszenia.

Omawiany układ ma dwa stopnie swobody, ponieważ ruch wozika 1 nie wymusza ruchu wozika 2. Obydwa woziki są w ruchu postępowym, więc przyjmujemy następujące współrzędne uogólnione:

$q_1 = x_1$ - to przemieszczenie wozika 1,

$q_2 = x_2$ - to przemieszczenie wozika 2.

Prędkości uogólnione to $\dot{q}_1 = \dot{x}_1$, $\dot{q}_2 = \dot{x}_2$.

Uogólnione przemieszczenia przygotowane to $\delta q_1 = \delta x_1$,
 $\delta q_2 = \delta x_2$.

W rozważanym przypadku równania Lagrange'a drugiego rodzaju opisujące ruch układu to

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial E}{\partial x_j} = Q_j, \quad j = 1, 2 \quad (1)$$

Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznych wszystkich brył, czyli:

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \quad (2)$$

Elementy lewej strony równań Lagrange'a drugiego rodzaju to:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{d}{dt} (m_1 \dot{x}_1) = m_1 \ddot{x}_1, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}_2} \right) = \frac{d}{dt} (m_2 \dot{x}_2) = m_2 \ddot{x}_2 \end{array} \right. \quad (3)$$

Siły uogólnione wyznaczmy w znany już sposób stosując zasadę prac przygotowanych.

Wprowadzamy siły działające na układ mechaniczny. Są to:

\bar{P}_1^* , \bar{P}_2^* - siły wymuszające ruch wozików, co do wartości równe $P_1^* = P_{10} \cos(\theta t)$,

$P_2^* = P_{20} \cos(\theta t)$,

\bar{S}_1 , \bar{S}_2 , \bar{S}'_2 , \bar{S}_3 - siły reakcji sprężyn, co do wartości $S_1 = k_1 x_1$, $S_2 = S'_2 = k_2 (x_1 - x_2)$,

$S_3 = k_3 x_2$, czyli pominięto siły wstępnego napięcia sprężyn pod wpływem ciężarów brył (ciężary brył również pominięto).

Określamy siły uogólnione układu. Zakładamy pierwszy przypadek, gdzie możliwy jest tylko ruch wozzika 1, tzn. $\delta q_1 = \delta x_1 \neq 0$, $\delta q_2 = \delta x_2 = 0$. Praca przygotowana sił działających na wozzik 1 będzie następująca:

$$Q_1 \delta q_1 = \bar{P}_1 \delta \bar{x}_1 = (P_1^* - S_1 - S_2) \delta x_1 = (P_1^* - S_1 - S_2) \delta q_1 \quad (4)$$

więc wartość pierwszej siły uogólnionej to:

$$Q_1 = P_1^* - S_1 - S_2 \quad (5)$$

Zakładamy teraz drugi przypadek, gdzie możliwy jest tylko ruch wozzika 2, tzn. $\delta q_2 = \delta x_2 \neq 0$, $\delta q_1 = \delta x_1 = 0$. Praca przygotowana sił działających na wozzik 2 będzie następująca:

$$Q_2 \delta q_2 = \bar{P}_2 \delta \bar{x}_2 = (P_2^* + S_2' - S_3) \delta x_2 = (P_2^* + S_2' - S_3) \delta q_2 \quad (6)$$

więc wartość drugiej siły uogólnionej to:

$$Q_2 = P_2^* + S_2' - S_3 \quad (7)$$

Podstawiając obliczone wartości do równań Lagrange'a, otrzymamy:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = P_1^* - S_1 - S_2 \\ m_2 \ddot{x}_2 = P_2^* + S_2' - S_3 \end{cases} \quad (8)$$

Wszystkie elementy równań poza wymuszeniami przenosi się na lewe strony. Po podstawieniu zależności określających siły w sprężynach, otrzymano

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = P_{10} \cos(\theta t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_3 x_2 - k_2 (x_1 - x_2) = P_{20} \cos(\theta t) \end{cases} \quad (9)$$

Uzyskane równania stanowią układ sprzężonych liniowych równań różniczkowych drugiego rzędu niejednorodnych o stałych współczynnikach. Sprzężenie równań polega na tym, że zmienne opisujące ruch każdej z brył układu występują w obydwóch równaniach i nie można rozwiązywać tych równań niezależnie. Rozwiązanie tego układu otrzymuje się stosując teorię dotyczącą równań różniczkowych liniowych.

Bardzo ważnym elementem analizy układu jest wyznaczenie jego częstości własnych. W tym celu analizuje się drgania swobodne opisane układem równań jednorodnych:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_3 x_2 - k_2 (x_1 - x_2) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Rozwiązanie układu równań jednorodnych (10) ma postać:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad (11)$$

gdzie: A_1, A_2 - amplitudy drgań swobodnych wodzików,

ω - częstość własna,

φ - kąt przesunięcia fazowego.

Podstawiając rozwiązanie (11) i jego drugą pochodną

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -A_1\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \\ \ddot{x}_2 = -A_2\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad (12)$$

do układu równań (10), otrzymano układ

$$\begin{cases} [-m_1 A_1 \omega^2 + k_1 A_1 + k_2 (A_1 - A_2)] \cos(\omega t + \varphi) = 0 \\ [-m_2 A_2 \omega^2 + k_3 A_2 - k_2 (A_1 - A_2)] \cos(\omega t + \varphi) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

który po uporządkowaniu ze względu na amplitudy zapisano następująco

$$\begin{cases} [(-m_1 \omega^2 + k_1 + k_2) A_1 - k_2 A_2] \cos(\omega t + \varphi) = 0 \\ [(-m_2 \omega^2 + k_2 + k_3) A_2 - k_2 A_1] \cos(\omega t + \varphi) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Równania (14) będą spełnione dla każdej chwili czasu, jeśli wyrażenia w nawiasach [.] będą równe zero, czyli

$$\begin{cases} (-m_1 \omega^2 + k_1 + k_2) A_1 - k_2 A_2 = 0 \\ (-m_2 \omega^2 + k_2 + k_3) A_2 - k_2 A_1 = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Układ równań (15) można zapisać w postaci macierzowej następująco:

$$\begin{bmatrix} -m_1 \omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2 \omega^2 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Przez przyrównanie do zera wyznacznika charakterystycznego układu równań, otrzymano równanie częstości drgań własnych:

$$(-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)(-m_2\omega^2 + k_2 + k_3) - k_2^2 = 0 \quad (17)$$

które po uporządkowaniu ze względu na częstość ω zapiszemy w postaci

$$\omega^4 - \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2}\right)\omega^2 + \frac{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}{m_1m_2} = 0 \quad (18)$$

Otrzymane równanie jest wielomianem 4-go stopnia. Przez podstawienie:

$$\omega^2 = z \quad (19)$$

można obniżyć stopień wielomianu i otrzymać równanie kwadratowe:

$$\omega^2 - \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2}\right)z + \frac{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}{m_1m_2} = 0 \quad (20)$$

Sposób rozwiązywania tego równania znany jest z matematyki. Rozwiązania zależą od tzw. wyróżnika równania kwadratowego, czyli:

$$\Delta = \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2}\right)^2 - 4\frac{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}{m_1m_2} \quad (21)$$

Można wykazać, że $\Delta > 0$ i rozwiązania równania (20) są następujące

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2} \right) \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2} \right)^2 - 4 \frac{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}{m_1m_2}} \quad (22)$$

Postacie rozwiązań są takie, iż łatwo można zauważyć, że $z_1 > 0$ i $z_2 > 0$. Uwzględniając wykonane wcześniej podstawienie (19), teraz otrzymamy

$$\omega = \pm \sqrt{z_{1,2}} \quad (23)$$

Biorąc pod uwagę jedynie dodatnie rozwiązania równania (23), otrzymamy ostatecznie dwie częstości własne układu:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2} \right) \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2} \right)^2 - 4 \frac{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}{m_1m_2}}} \quad (24)$$

Przyjęte rozwiązania (11) układu równań (10) należy zapisać w postaci, która uwzględnia obydwie częstości własne, czyli

$$\begin{cases} x_1 = x_{11} + x_{12} = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 = x_{21} + x_{22} = A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \quad (25)$$

gdzie

$$\begin{cases} x_{11} = A_{11} \cos(\omega_1 t + \varphi_1), & x_{12} = A_{12} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_{21} = A_{21} \cos(\omega_1 t + \varphi_1), & x_{22} = A_{22} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \quad (26)$$

Każde rozwiązanie zawiera dwie dowolne stałe φ_1 i φ_2 oraz jedną niewiadomą amplitudę, gdyż druga amplituda jest zależna od pierwszej, co wynika z układu równań (15).

$$\begin{cases} (-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)A_1 - k_2A_2 = 0 \\ (-m_2\omega^2 + k_2 + k_3)A_2 - k_2A_1 = 0 \end{cases}$$
 Jeśli w tym układzie równań uwzględnimy i -tą częstość własną to zapiszemy

$$\begin{cases} (-m_1\omega_i^2 + k_1 + k_2)A_{1i} - k_2A_{2i} = 0 \\ (-m_2\omega_i^2 + k_2 + k_3)A_{2i} - k_2A_{1i} = 0 \end{cases} \quad (27)$$

a następnie

$$\begin{cases} \frac{A_{2i}}{A_{1i}} = \frac{-m_1\omega_i^2 + k_1 + k_2}{k_2} = \mu_i \\ \frac{A_{1i}}{A_{2i}} = \frac{-m_2\omega_i^2 + k_2 + k_3}{k_2} = \mu_i \end{cases} \quad (28)$$

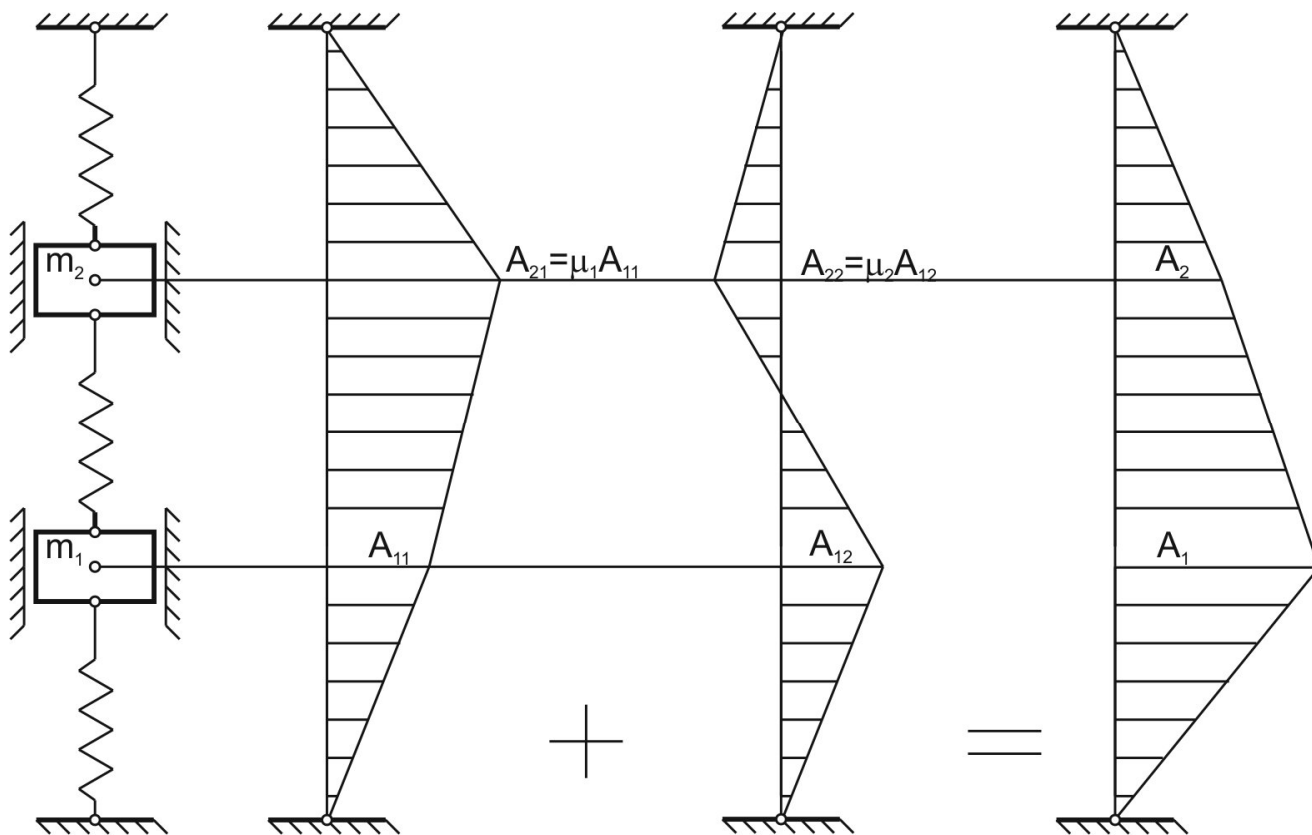
Współczynnik μ_i określający zależność pomiędzy amplitudami można wyznaczyć z dowolnego równania układu (28) przyjmując za i liczbę 1 lub 2 związaną z numerem częstości własnej. Pomimo różnych form równań, jego wartość będzie taka sama niezależnie od tego, z którego równania skorzystamy.

Ostatecznie rozwiązanie (25) przedstawimy w postaci:

$$\begin{cases} x_1 = x_{11} + x_{12} = A_{11}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 = x_{21} + x_{22} = \mu_1 A_{11}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \mu_2 A_{12}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \quad (29)$$

Jest to ogólna postać drgań układu zachowawczego o dwóch stopniach swobody. Stałe φ_1 i φ_2 oraz A_{11} i A_{12} wyznacza się z warunków początkowych.

Omówimy teraz pewne pojęcia typowe dla drgań mechanicznych. Rozwiązanie x_{11} i x_{21} przedstawiające drgania harmoniczne układu z pierwszą częstością własną nazywa się pierwszym drganiem głównym (własnym) układu, zaś rozwiązanie x_{12} i x_{22} przedstawiające drgania harmoniczne układu z drugą częstością własną nazywa się drugim drganiem głównym układu. Współczynniki μ_1 i μ_2 charakteryzujące postać drgań własnych, nazywa się postaciami drgań własnych (głównych).



Rozważmy teraz drgania wymuszone opisane układem równań niejednorodnych (9):

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = P_{10}\cos(\theta t) \\ m_2\ddot{x}_2 + k_3x_2 - k_2(x_1 - x_2) = P_{20}\cos(\theta t) \end{cases}$$

Jeśli dla uproszczenia weźmiemy pod uwagę jedynie część rozwiązania odpowiadającą procesowi stacjonarnemu drgań wymuszonych nietłumionych (to inaczej drgania wymuszone ustalone), należy uwzględnić tylko rozwiązanie szczególne podanego układu równań. Rozwiązanie to ma postać:

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\theta t) \\ x_2 = A_2\cos(\theta t) \end{cases} \quad (30)$$

gdzie: A_1, A_2 - amplitudy drgań wymuszonych wiodników.

Podstawiając rozwiązanie (30) i jego drugą pochodną do układu równań (9), po uporządkowaniu ze względu na amplitudy, otrzymano

$$\begin{cases} [(-m_1\theta^2 + k_1 + k_2)A_1 - k_2A_2]\cos(\theta t) = P_{10}\cos(\theta t) \\ [(-m_2\theta^2 + k_2 + k_3)A_2 - k_2A_1]\cos(\theta t) = P_{20}\cos(\theta t) \end{cases} \quad (31)$$

Równania (31) będą spełnione dla każdej chwili czasu, jeśli

$$\begin{cases} (-m_1\theta^2 + k_1 + k_2)A_1 - k_2A_2 = P_{10} \\ (-m_2\theta^2 + k_2 + k_3)A_2 - k_2A_1 = P_{20} \end{cases} \quad (32)$$

co w zapisie macierzowym wyraża się następująco:

$$\begin{bmatrix} -m_1\theta^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\theta^2 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{10} \\ P_{20} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} -m_1\theta^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\theta^2 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{10} \\ P_{20} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (34)$$

które umożliwiają zapisanie równania (33) w zwartej formie

$$\mathbf{TA} = \mathbf{P} \quad (35)$$

Aby wyznaczyć wektor amplitud drgań, należy pomnożyć lewostronnie równanie (35) przez odwrotność macierzy współczynników \mathbf{T} . Wówczas otrzymamy:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{P} \quad (36)$$

Z definicji macierz odwrotną oblicza się następująco:

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{T})} [\mathbf{T}^D]' \quad (37)$$

gdzie: $\det(\mathbf{T})$ – wyznacznik macierzy \mathbf{T} ,

\mathbf{T}^D – macierz dopełnień algebraicznych.

$[\cdot]'$ - oznacza operację transpozycji macierzy

W naszym przypadku będzie:

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{T})} \begin{bmatrix} (-m_2\theta^2 + k_2 + k_3)(-1)^{(1+1)} & -k_2(-1)^{(1+2)} \\ -k_2(-1)^{(2+1)} & (-m_1\theta^2 + k_1 + k_2)(-1)^{(2+2)} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{(-m_1\theta^2 + k_1 + k_2)(-m_2\theta^2 + k_2 + k_3) - k_2^2} \begin{bmatrix} -m_2\theta^2 + k_2 + k_3 & k_2 \\ k_2 & -m_1\theta^2 + k_1 + k_2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Wstawiając równanie (39) do równania (36), obliczymy amplitudy drgań wymuszonych:

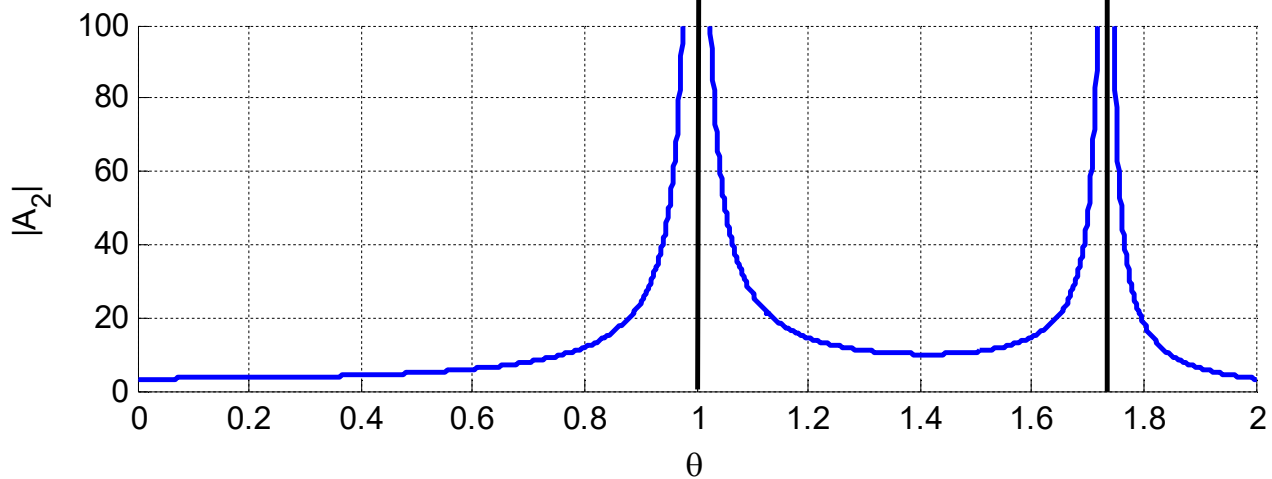
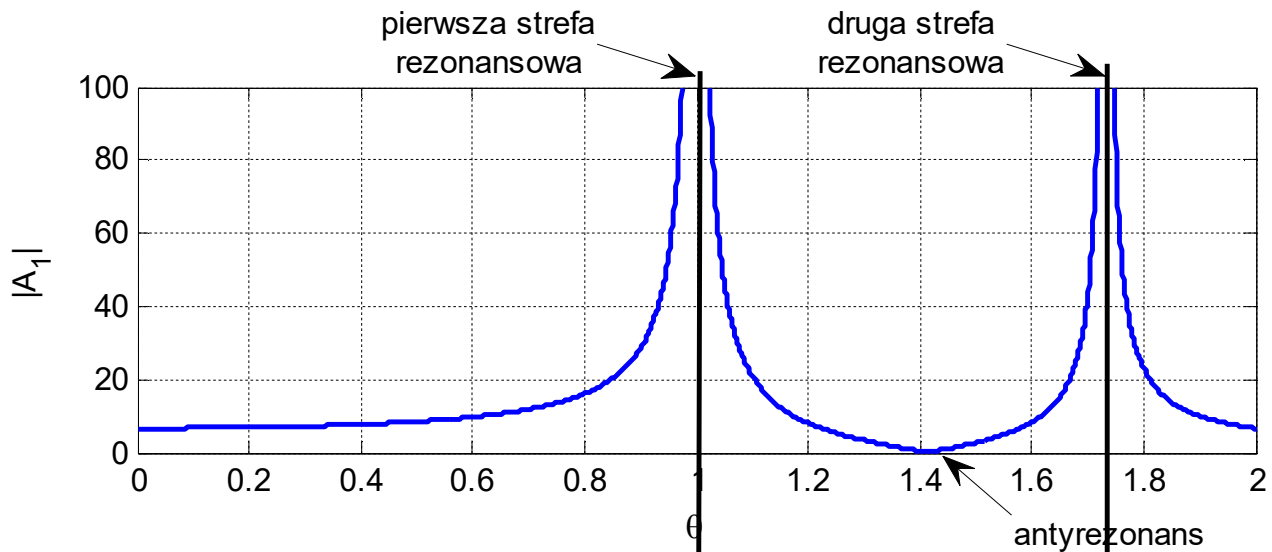
$$\begin{cases} A_1 = \frac{(-m_2\theta^2 + k_2 + k_3)P_{10} + k_2P_{20}}{(-m_1\theta^2 + k_1 + k_2)(-m_2\theta^2 + k_2 + k_3) - k_2^2} \\ A_2 = \frac{k_2P_{10} + (-m_1\theta^2 + k_1 + k_2)P_{20}}{(-m_1\theta^2 + k_1 + k_2)(-m_2\theta^2 + k_2 + k_3) - k_2^2} \end{cases} \quad (40)$$

Jeśli częstość wymuszenia θ będzie równa 0 to z układu równań (40) określimy statyczne wychylenie wodzików (pod wpływem statycznych sił):

$$\begin{cases} A_1(\theta = 0) = \delta_{st} = \frac{(k_2+k_3)P_{10}+k_2P_{20}}{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3} \\ A_2(\theta = 0) = \delta_{st} = \frac{k_2P_{10}+(k_1+k_2)P_{20}}{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3} \end{cases} \quad (41)$$

Natomiast jeśli częstość wymuszenia $\theta = \omega_1$ lub $\theta = \omega_2$ to wówczas zachodzi zjawisko rezonansu i amplitudy A_1 i A_2 będą dążyć do nieskończoności.

Na podstawie układu równań (40) można wyznaczyć tzw. charakterystyki amplitudowo-częstościowe. Dla danych $m_1 = m_2 = 1$ [kg], $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ [N/m], $P_{10} = 10$ [N], $P_{20} = 0$ [N] częstości własne wynoszą: $\omega_1 = 1$ [rad/s], $\omega_2 = 1.73$ [rad/s]. Przyjmując częstość wymuszenia jako zmienną w zakresie $\theta \in \langle 0 - 2 \rangle$ wyznaczono charakterystyki przedstawione na rysunku.



Wartości amplitud dla wybranych wartości częstości wymuszenia przedstawiono w tabeli

θ	0	ω_1	$\sqrt{2} \approx 1.4142$	ω_2	∞
A_1	6.6666	∞	0	∞	0
A_2	3.3333	∞	10	∞	0

Na podstawie danych z tabeli oraz charakterystyk przedstawionych na rysunku możemy stwierdzić, że istnieje taka częstość wymuszenia ($\theta = \sqrt{2}$), że amplituda A_1 masy 1 jest równa 0, pomimo tego, że działa na nią wymuszenie. Jest to zjawisko nazywane antyrezonansiem. Jego istnienie wykorzystuje się w projektowaniu tzw. tłumika dynamicznego. Omówimy teraz zasadę jego działania.

Przyjmijmy, że w rozważanym układzie wozik 1 ze sprężyną k_1 jest układem podstawowym, na który z jakichś względów działa wymuszenie $P_1^* = P_{10} \cos(\theta t)$. Gdyby nie było pozostałych elementów układu, byłby to układ o jednym stopniu swobody. Wówczas jedyną możliwością zmniejszenia amplitudy drgań dla danej częstości wymuszenia byłoby zwiększenie tłumienia. Można jednakże postąpić inaczej, modyfikując układ podstawowy przez dołożenie kolejnej masy zamocowanej sprężycie na układzie podstawowym (można również zastosować dwie sprężyny jak w omawianym wcześniej przykładzie – nie czyni to zagadnienia bardziej złożonym). Dodatkowa masa ze sprężyną muszą być tak dobrane, aby zjawisko antyrezonansu występowało przy częstości działającego wymuszenia θ .

Przeanalizujmy zatem amplitudę A_1 ze wzoru (40), zakładając, że na masę drugą nie działa wymuszenie ($P_{20} = 0$). Zażądamy, aby amplituda $A_1 = 0$, czyli aby zachodziło zjawisko antyrezonansu. Musi być zatem spełnione równanie

$$A_1 = \frac{(-m_2\theta^2 + k_2 + k_3)P_{10}}{(-m_1\theta^2 + k_1 + k_2)(-m_2\theta^2 + k_2 + k_3) - k_2^2} = 0 \quad (42)$$

Będzie ono spełnione jeśli licznik będzie równy zero, czyli

$$-m_2\theta^2 + k_2 + k_3 = 0 \quad (43)$$

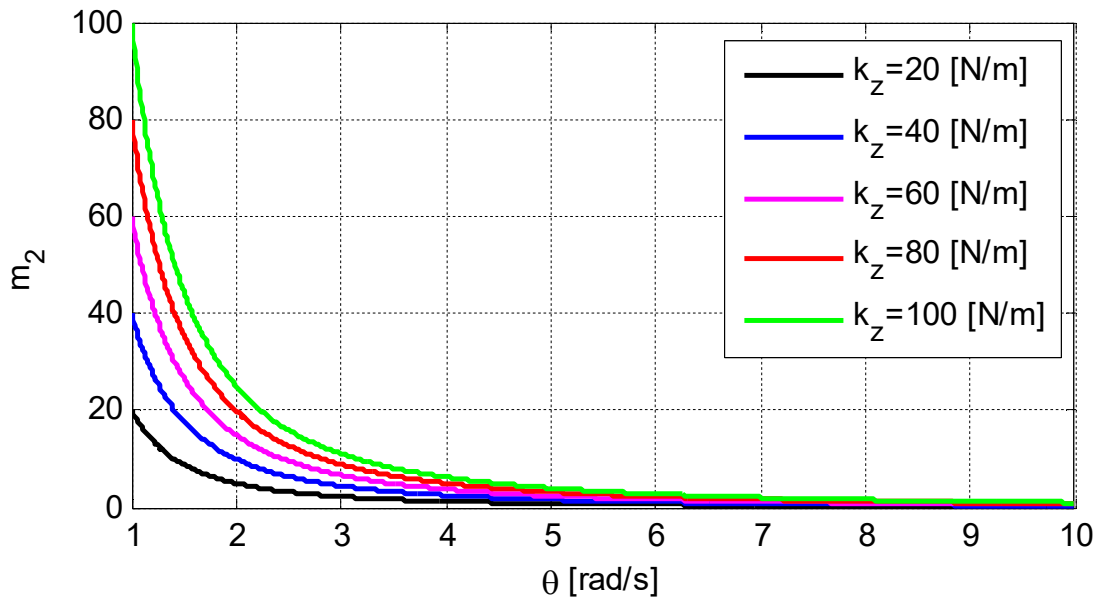
Jeśli założymy masę tłumika dynamicznego m_2 , wówczas obliczymy sumę współczynników sprężystości sprężyn, które powinny być zastosowane

$$k_2 + k_3 = m_2\theta^2 \quad (44)$$

a jeśli założymy jakie mają być sprężyny, to określimy wymaganą masę tłumika dynamicznego

$$m_2 = \frac{k_2 + k_3}{\theta^2} = \frac{k_z}{\theta^2} \quad (45)$$

gdzie k_z – to zastępczy współczynnik sprężystości sprężyn. Zależność masy tłumika od częstości wymuszenia, dla wybranych wartości współczynnika k_z przedstawiono na rysunku.

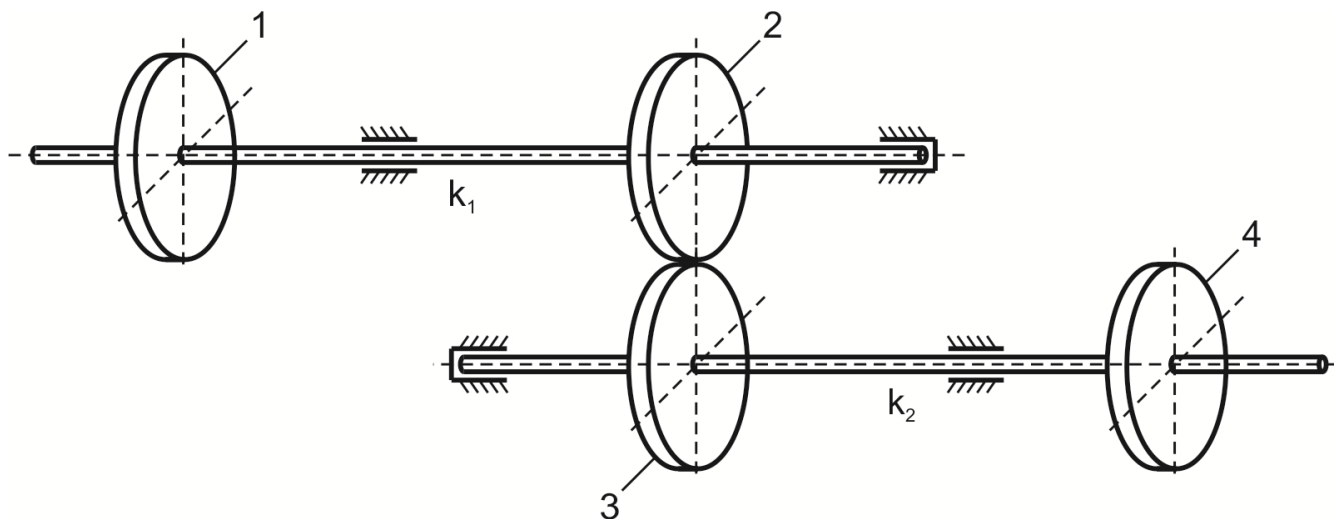


Zauważamy, że do wytłumienia drgań powodowanych wymuszeniami o niskich częstotliwościach, konieczne jest stosowanie dużych mas, przy czym wrażliwość układu na wartość masy m_2 maleje wraz ze wzrostem częstotliwości wymuszenia.

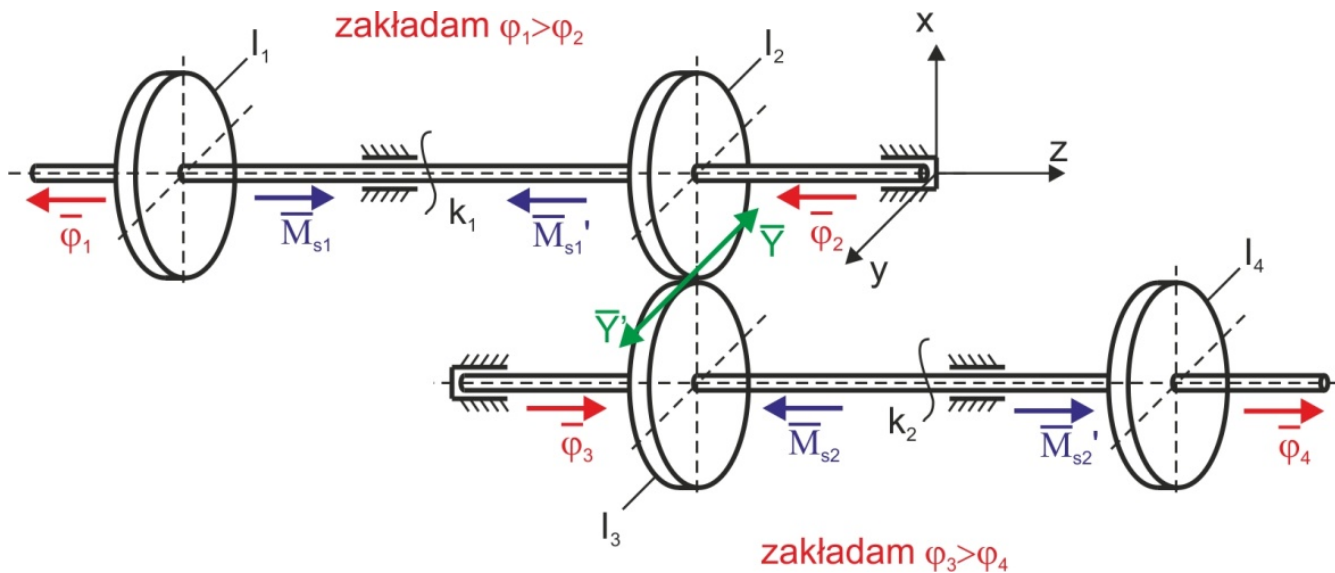
Zwróćmy uwagę na fakt, że tłumik dynamiczny działa poprawnie tylko dla jednej, konkretnej wartości częstotliwości wymuszenia θ . Dodatkowo tłumienie, którego nie braliśmy pod uwagę pogarsza jeszcze działanie tłumika dynamicznego.

5.2. Drgania skrętne

Rozważmy drgania układu przedstawionego na rysunku. W podanym układzie występują cztery krążki o znanych masowych momentach bezwładności odpowiednio I_1 , I_2 , I_3 , I_4 oraz wały o współczynniku sprężystości skrętnej k_1 , k_2 . Zakładamy, że krążki 2 i 3 współpracują bez poślizgu.



Podany układ ma trzy stopnie swobody, ponieważ mogą występować niezależne ruchy krążka 1, pary krążków 2 i 3 oraz krążka 4. Okaże się jednak, że drgania takiego układu można opisać jak w układzie o dwóch stopniach swobody. Jest tak dlatego, że w analizie drgań nie interesują nas kąty obrotu poszczególnych krążków, ale ich obroty względne, a więc ruch pary krążków 2 i 3 względem krążka 1, oraz ruch krążka 4 względem pary krążków 2 i 3.



Dynamiczne równania ruchu układu są następujące

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\varphi}_1 = -M_{S1} \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 = M'_{S1} - Y r_2 \\ I_3 \ddot{\varphi}_3 = -M_{S2} + Y' r_3 \\ I_4 \ddot{\varphi}_4 = M'_{S2} \end{cases} \quad (1)$$

Zależności siłowe

$$Y = Y' \quad (2)$$

pozwalają zapisać dynamikę układu w postaci trzech równań

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\varphi}_1 + M_{S1} = 0 \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 - M'_{S1} + I_3 i \ddot{\varphi}_3 + i M_{S2} = 0 \\ I_4 \ddot{\varphi}_4 - M'_{S2} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Z kinematyki wiadomo, że

$$r_2 \varphi_2 = r_3 \varphi_3 \rightarrow \varphi_3 = \frac{r_2}{r_3} \varphi_2 = i \varphi_2 \quad i = \frac{r_2}{r_3} \quad (4)$$

Momenty sił sprężystych to

$$\begin{cases} M_{S1} = M'_{S1} = k_1(\varphi_1 - \varphi_2) \\ M_{S2} = M'_{S2} = k_2(\varphi_3 - \varphi_4) = k_2(i\varphi_2 - \varphi_4) \end{cases} \quad (5)$$

Uwzględniając (4) i (5), zapiszemy (3) w następującej formie

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\varphi}_1 + k_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \\ (I_2 + i^2 I_3) \ddot{\varphi}_2 - k_1(\varphi_1 - \varphi_2) + i k_2(i\varphi_2 - \varphi_4) = 0 \\ I_4 \ddot{\varphi}_4 - k_2(i\varphi_2 - \varphi_4) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Równanie (6.1) pomnóżmy przez $(I_2 + i^2 I_3)$ a równanie (6.2) przez I_1 i odejmijmy stronami. Następnie równanie (6.2) pomnóżmy przez $i I_4$ a równanie (6.3) przez $(I_2 + i^2 I_3)$ i odejmijmy stronami. Otrzymamy układ dwóch równań

$$\begin{cases} (I_2 + i^2 I_3)I_1[\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2] + k_1[I_2 + i^2 I_3 + I_1](\varphi_1 - \varphi_2) - iI_1 k_2(i\varphi_2 - \varphi_4) = 0 \\ (I_2 + i^2 I_3)I_4[i\ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_4] - k_1 i I_4(\varphi_1 - \varphi_2) + k_2[I_2 + I_3 + i^2 I_4](i\varphi_2 - \varphi_4) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\begin{cases} \varphi_1 - \varphi_2 = \alpha_1 \\ i\varphi_2 - \varphi_4 = \alpha_2 \end{cases} \quad (8)$$

zapiszemy

$$\begin{cases} (I_2 + i^2 I_3)I_1\ddot{\alpha}_1 + k_1[I_2 + i^2 I_3 + I_1]\alpha_1 - iI_1 k_2\alpha_2 = 0 \\ (I_2 + i^2 I_3)I_4\ddot{\alpha}_2 - k_1 i I_4\alpha_1 + k_2[I_2 + I_3 + i^2 I_4]\alpha_2 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

i dalej

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}_1 + a_{11}\alpha_1 - a_{12}\alpha_2 = 0 \\ \ddot{\alpha}_2 - a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

gdzie

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{k_1[I_2 + i^2 I_3 + I_1]}{(I_2 + i^2 I_3)I_1} \\ a_{12} = \frac{iI_1 k_2}{(I_2 + i^2 I_3)I_1} \\ a_{21} = \frac{k_1 i I_4}{(I_2 + i^2 I_3)I_4} \\ a_{22} = \frac{k_2[I_2 + I_3 + i^2 I_4]}{(I_2 + i^2 I_3)I_4} \end{cases} \quad (11)$$

Uzyskany opis drgań skrętnych ma taką samą formę matematyczną jak opis drgań wzdłużnych podany w punkcie 9.1, a zatem do dalszej analizy można zastosować podane wcześniej metody.

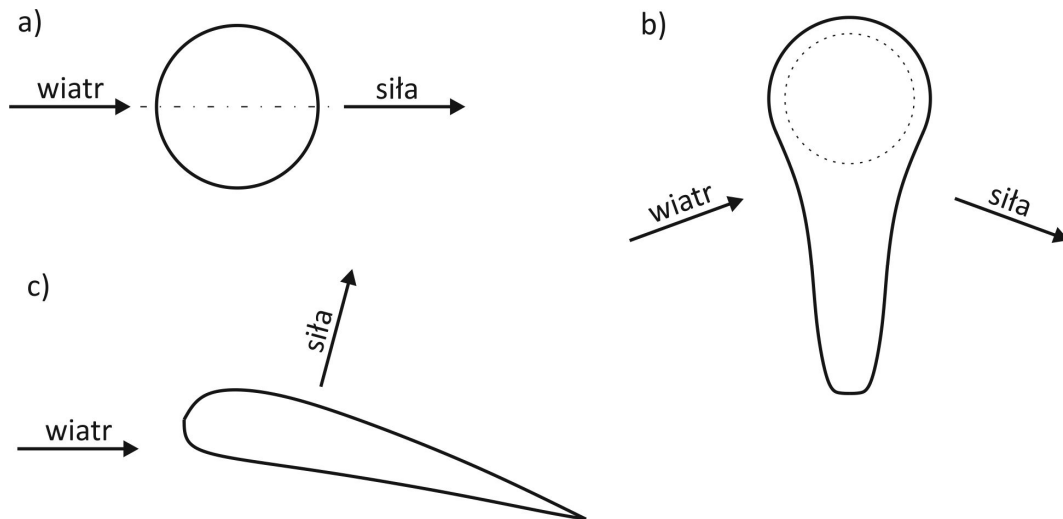
6. Drgania samowzbudne

6.1. Galopowanie przewodów elektrycznych

Zauważono, że przy pewnych warunkach atmosferycznych przewody elektryczne wysokiego napięcia drgają z dużymi amplitudami i bardzo małą częstością. Przewody te są drutami o przekroju kołowym, rozciągniętymi między słupami odległymi o około 90 m. Drut drga w postaci jednej lub dwu półfal, z amplitudą rzędu 3 m w środku rozpiętości i z częstością 1 Hz lub mniej. Ze względu na charakter tego zjawiska nazywa się je „galopowaniem”, a nie drganiem. Zjawiska tego nie zauważono nigdy w kraju o ciepłym klimacie, natomiast występuje prawie każdej zimy w północnych stanach USA i w Kanadzie, kiedy temperatura waha się około 1°C i gdy wieje silny, boczny wiatr. W większości takich przypadków znajdowano na drucie śnieg. Przybliżone obliczenie pokazuje, że częstość drgań własnych odcinka przewodu rozpiętego między dwoma słupami jest tego samego rzędu co częstość zaobserwowana. Fakt, że drgania raz rozpoczęte są bardzo gwałtowne i trwają czasem 24 godziny, wskazuje na to, że nie można ich uważać za drganie wymuszone. Gdyby bowiem były to drgania wymuszone, to podmuchy wiatru musiałyby mieć częstość równą dokładnie częstości drgań własnych przewodów. Niech dla przykładu $T=1$ s i jeżeli w ciągu 10 min mielibyśmy nie 600, a 601 równoodległych podmuchów wiatru, to drgania wzrastałyby w ciągu pierwszych pięciu minut i malałyby w ciągu następnych pięciu minut. Aby utrzymać drgania przewodów w ciągu 2 godzin błąd w dokładności podmuchów wiatru musiałby być mniejszy niż $1/7200$, co jest zupełnie nieprawdopodobne.

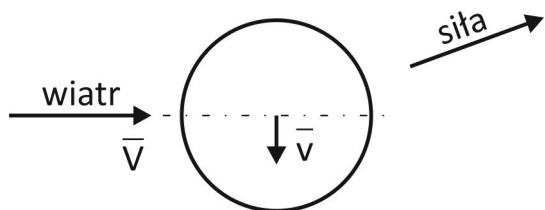
Mamy tu do czynienia z przypadkiem drgań samowzbudnych wywołanych działaniem wiatru na przewody, które na skutek przymarzania do nich śniegu zmieniają swój przekrój i przestają być okrągłe. Wyjaśnienie tego zjawiska wymaga znajomości kilku podstawowych zasad z aerodynamiki.

Kiedy wiatr odmuchiye okrągły cylinder (rys. 1a), wtedy siła pochodząca od wiatru jest z nim zgodna co do kierunku. Jest to oczywiste i wynika z symetrii. W przypadku cylindra o przekroju niekołowym (rys. 1b) twierdzenie takie nie jest słuszne, ponieważ wówczas siła jest odchylona od kierunku wiatru o pewien kąt. Przykładem tego jest skrzydło samolotu, w przypadku którego siła jest prawie prostopadła do kierunku wiatru (rys. 1c).



Rys. 1. Dla niesymetrycznych przekrojów kierunek wiatru i kierunek wywołanej przez niego siły nie pokrywają się

Rozpatrzmy przewód elektryczny podczas występowania galopowania i zwróćmy uwagę na ruch w dół. Jeżeli nie ma wiatru, to przewód będzie odczuwał podmuch skierowany w górę. Kiedy pojawi się wiatr poziomy o prędkości V , na przewód poruszający się w dół z prędkością v będzie dmuchał wiatr skierowany lekko w górę pod kątem $\arctg(v/V)$.



Rys. 2. Poziomy boczny wiatr skierowany jest w górę względem poruszającego się w dół przewodu

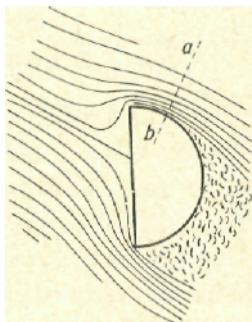
Jeżeli przewód ma przekrój kołowy, to siła wywołana przez ten wiatr będzie posiadała małą składową skierowaną w górę (rys. 2). Ponieważ przewód porusza się w dół, składowa ta jest siłą skierowaną przeciwnie do kierunku ruchu przewodu i tłumi ten ruch. Dla przekrojów *niekołowych* może się jednak zdarzyć, że pochodząca od wiatru siła ma składową skierowaną w dół, z czym związane jest istnienie ujemnego tłumienia (rys. 1b).

Rozważając w podobny sposób warunki, jakie występują podczas ruchu przewodu w górę widzimy, że względny wiatr wieje na przewód z góry pod pewnym kątem, a siła, z jaką działa on na okrągły przewód, ma składową skierowaną w dół, która tłumi ruch. Dla przekroju niekołowego siła może mieć skierowaną w górę składową, która mając ten sam kierunek co ruch działa tak, jak ujemne tłumienie.

Jeżeli zamrożony na przewodzie śnieg ma przekrój, który powoduje, że zależność pomiędzy kierunkiem wiatru a siłą jest taka, jak na rys. 1b, to mamy do czynienia z dynamiczną niestatecznością. Kiedy z jakiegoś powodu drut ma małą prędkość skierowaną w górę, wskutek działania wiatru występuje wtedy jeszcze większy ruch do góry aż do chwili, kiedy siła sprężystości drutu nie zatrzyma go. Następnie siła ta powoduje ruch drutu na dół, w czym znów pomaga wiatr i dlatego małe drgania szybko powiększają się.

6.2. Przekroje niestateczne dynamicznie

Pozostaje nam jeszcze do określenia, które przekroje są dynamicznie stateczne (podobnie jak przekrój okrągły), a które są niestateczne. Wprowadza nas to w zakres aerodynamiki nieregularnych przekrojów. Zazwyczaj możemy zrobić tylko bezpośrednie doświadczenie, ale w niektórych przypadkach również rozważania jakościowe dają pewne informacje. Najbardziej „niestatecznym” ze znanych przekrojów jest półkole odwrócone płaską stroną w kierunku wiatru.

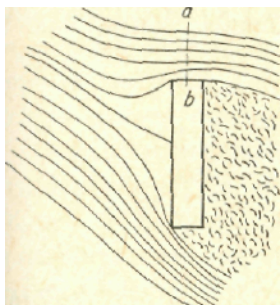


Rys. 3. Optyw powietrza wokół cylindra o półkolistym przekroju

Na rysunku 3 przedstawiono taki przekrój w przepływie wiatru wiejącego nieco z góry, co podczas galopowania odpowiada ruchowi przewodu w górę. Strumień powietrza odrywa się na ostrej, dolnej krawędzi przekroju, ale na pewnej długości może opływać górną powierzchnię. Związane jest to z tym, że wiatr wieje na przewód z góry.

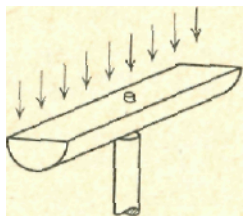
Obszar pokryty kreseczkami jest obszarem zawirowań, o którym wiadomo tylko tyle, że średnie ciśnienie jest tam zbliżone do atmosferycznego. Na dolnej połowie powierzchni cylindra mamy ciśnienie atmosferyczne, tzn. ciśnienie jakie panuje w pewnej odległości od przewodu, gdzie nie ma zakłóceń. Ponad przekrojem linie przepływu zakrzywiają się w dół. Oznacza to, że ciśnienie maleje, gdy przechodzimy od a do b , co można wytłumaczyć w następujący sposób. Rozpatrzmy cząstkę powietrza w linii prądu. Gdyby nie działały na nią żadne siły, to poruszałyby się ona po linii prostej. Ponieważ jej tor jest zakrzywiony w dół, musi więc istnieć siła działająca na nią z góry. Siła ta może być wywołana tylko przez różnicę ciśnień panujących nad i pod cząstką, zatem ciśnienie w punkcie a musi być większe niż w punkcie b . Ponieważ w punkcie a ciśnienie równe jest atmosferycznemu (niezakłóconemu), więc w punkcie b ciśnienie musi być niższe od atmosferycznego. W związku z tym na przekrój w kształcie półkola działa skierowana w górę siła na skutek różnicy ciśnień panującej między górną a dolną powierzchnią. Dlatego też przedstawiony na rys. 3 przypadek należy uznać za zdecydowanie niestateczny.

Innym niestatecznym przekrojem jest wydłużony prostokąt wystawiony szerszym bokiem na działanie wiatru (rys. 4). Wyjaśnienie niestateczności jest tu identyczne, jak dla pręta półkolistego (rys. 3), z tą różnicą, że sam efekt jest mniejszy. Efekt ten można łatwo zaobserwować na płaskiej desce trzymanej w ręce za jeden koniec, której drugi koniec jest zanurzony w zbiorniku z wodą. Kiedy deskę ciągniemy przez wodę tak, że szerszy bok jej przekroju jest prostopadły do kierunku ruchu, wówczas ruch jej jest zygzakowaty. Natomiast w przypadku kiedy węższy bok przekroju jest prostopadły do kierunku ruchu wtedy deska porusza się w sposób prawie ustalony.



Rys. 4. Opływ powietrza wokół pręta o prostokątnym przekroju

Jeżeli przekrój niestateczny umocujemy obrotowo w środku i umieścimy przed wentylatorem tak, jak na rys. 5, to będziemy mieli do czynienia ze zjawiskiem obrotu samowzbudnego. Gdy przyrząd taki znajduje się w spoczynku, wówczas wiatr nie działa na niego żadnym momentem, ale gdy tylko zacznie się on obracać, natychmiast pojawia się moment pochodzący od wiatru, który współdziała z obrotem. Kierunek obrotu zależy oczywiście tylko od wychylenia początkowego, które na ogół jest przypadkowe. Ta bardzo ciekawa zabawka znana jest jako „powietrzny wirnik” Lanchestera.

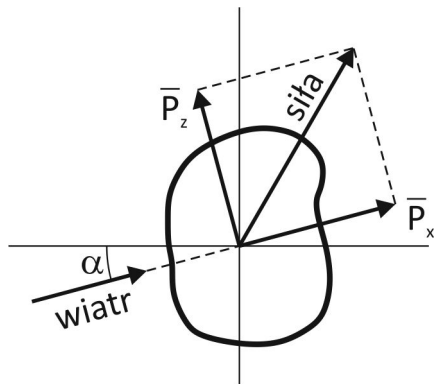


Rys. 5. Wirnik Lanchestera

W aerodynamice całkowitą siłę działającą na ciało rozkłada się na dwie składowe:

- a) opór P_x - skierowany wzdłuż kierunku wiatru, i
- b) siłę nośną P_z - prostopadłą do kierunku wiatru.

Obydwie te siły można łatwo zmierzyć w tunelu aerodynamicznym za pomocą specjalnych urządzeń (tzw. wag aerodynamicznych).



Rys. 6. Całkowita siła wiatru rozłożona na siłę nośną P_z i opór P_x

Niech rys. 6 przedstawia drgający przekrój w chwili, kiedy porusza się on w dół, wskutek czego pozorny wiatr wieje od dołu pod kątem $\alpha = \arctg(v/V)$. Siła nośna P_z i opór P_x mają składowe pionowe skierowane w górę (tzn. składowe skierowane przeciwie do ruchu) równe odpowiednio $P_z \cos \alpha$ i $P_x \sin \alpha$. Całkowita siła tłumiąca F działa w górę i wynosi

$$F = P_z \cos \alpha + P_x \sin \alpha \quad (1)$$

Nie jesteśmy zainteresowani samą siłą F , ale raczej jej pochodną $dF/d\alpha$, tzn. zmianą siły F wywołaną zmianą kąta α , albo zmianą stosunku v/V . Przyjmijmy, że siła F jest duża, a pochodna $dF/d\alpha$ jest równa zero. W takim razie część ciężaru przewodów nie będzie przenoszona przez słupy, a będzie bezpośrednio równoważona przez wiatr. Jeżeli $dF/d\alpha = 0$, to jakiegokolwiek drgania lub galopowania przewodów nie zmienią ciężaru równoważonego przez wiatr i drgania pozostaną bez zmian. Załóżmy teraz, że $dF/d\alpha$ jest ujemne. Oznacza to, że siła wiatru skierowana w górę wzrasta dla ujemnych kątów α i maleje dla α dodatnich. W takim przypadku mamy — o czym była mowa poprzednio — wymuszające działanie siły. Wobec powyższego mamy następujące kryteria stateczności dynamicznej

$dF/d\alpha < 0$ - ruch niestateczny,

$dF/d\alpha > 0$ - ruch stateczny.

Różniczkując wyrażenie (1) należy zwrócić uwagę, że dla małych drgań v jest bardzo małe w stosunku do V . W takim razie mały jest kąt α i jego cosinus możemy przyjąć równy jedności, natomiast sinus jest znikomo mały w porównaniu z jednością. Zatem

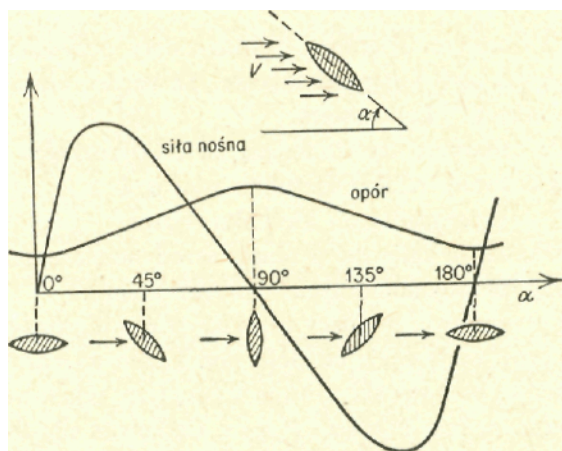
$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\alpha} &= \frac{dP_Z}{d\alpha} \cos\alpha - P_Z \sin\alpha + \frac{dP_X}{d\alpha} \sin\alpha + P_X \cos\alpha = \sin\alpha \left(-P_Z + \frac{dP_X}{d\alpha} \right) + \\ \cos\alpha \left(\frac{dP_Z}{d\alpha} + P_X \right) &\approx \frac{dP_Z}{d\alpha} + P_X \end{aligned} \quad (2)$$

Tak więc układ będzie *niestateczny* wtedy, kiedy

$$\frac{dP_Z}{d\alpha} + P_X < 0 \quad (3)$$

Wartości siły nośnej i oporu dowolnego przekroju nie można obliczyć teoretycznie, ale można je uzyskać z pomiarów tunelowych. Wyniki pomiarów podaje się zazwyczaj w postaci takiego wykresu, jak przedstawiony na rys. 7. Zależność (3) możemy wyrazić słowami w następujący sposób.

„Przekrój jest dynamicznie niestateczny wtedy, kiedy ujemne pochylenie krzywej siły nośnej jest większe od rzędnej krzywej oporu”.



Rys. 7. Siła nośna i opór przekroju soczewkowego w zależności od kąta natarcia

Z rysunku 7 widać, że przekrój soczewkowy ustawiony „wzdłuż” wiatru ($\alpha = 0$) jest zawsze stateczny, natomiast ustawiony „w poprzek” wiatru ($\alpha = 90^\circ$) jest niestateczny. Przewody elektryczne z przymarzniętym śniegiem w temperaturze zbliżonej do temperatury zamarzania mają tendencję do formowania sopli, które są mniej lub bardziej wydłużone w kierunku pionowym. Na wykresie odpowiada temu przypadek $\alpha = 90^\circ$.

Przy tym kącie i przy małych amplitudach drgań (kiedy kąt zmienia się na przykład między 89° a 91°), podczas każdego okresu dostarczana jest energia. Wskutek tego następuje wzrost amplitudy, który trwa dotąd, dopóki istnieje nadmiar energii dostarczanej przez wiatr. Przy pewnej dużej amplitudzie ten nadmiar energii będzie równy zero, nastąpi wtedy równowaga energii i osiągnięta zostanie ostateczna amplituda. Prawdopodobnie będzie to występowało przy α zmieniającym się między 30° a 150° (rys. 7). W pobliżu skrajnych położeń ma miejsce dopływ energii, natomiast w środku skoku energia jest rozpraszana przez tłumienie, ponieważ wtedy $dP_Z/d\alpha + P_X$ jest większe od zera. Ostateczną amplitudę można znaleźć wykonując, na podstawie znanej krzywej, całkowanie graficzne lub numeryczne.

Omówione drgania przewodów charakteryzują się bardzo małą częstością i dużą amplitudą. Obserwuje się je rzadko, tylko wtedy, kiedy istnieje silny boczny wiatr i obmarzanie przewodów. Częściej występuje inny rodzaj drgań przewodów elektrycznych, charakteryzujący się wysoką częstością i małą amplitudą. Do wywołania tych drgań potrzebny jest jedynie boczny wiatr. Zjawisko to można wytłumaczyć za pomocą „ścieżki wirowej Karmana”.

6.3. Flatter skrzydła samolotu

W niektórych samolotach latających na dużych prędkościach, szczególnie w czasie nurkowania, zaobserwowano bardzo gwałtowne drgania skrzydeł. W pewnych przypadkach drgania te były tak silne, że powodowały złamanie skrzydła w locie.

Można spróbować wyjaśnić to zjawisko analogicznie do zjawiska opisanego w punkcie 6.1. Dla „przeciągniętych” skrzydeł pochylenie krzywej wyporu jest ujemne (rys. 7) i ruch wolnonośnego skrzydła w górę i w dół jest niestateczny. Zaobserwowano jednak, że warunki takie nie występują przy typowym „flutterze”, podczas którego kąt natarcia skrzydła jest mały, a pochylenie krzywej siły nośnej jest zdecydowanie dodatnie, co przy rozumowaniu takim jak w punkcie 1 prowadzi do tłumienia dodatniego.

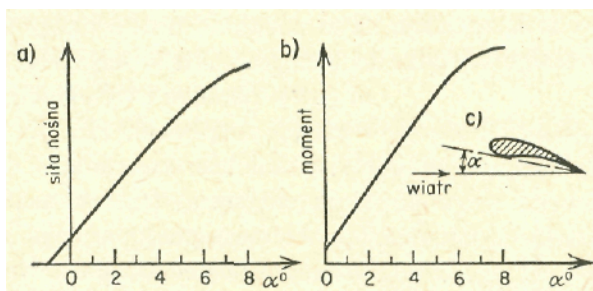
Musimy więc rozróżniać „flutter oderwania (przeciągnięcia)” występujący przy dużych kątach natarcia ($\alpha > 15^\circ$) i „flutter klasyczny” przy małych kątach natarcia. Flutter przeciągnięcia jest bardzo istotny w przypadku łopatek turbin, szczególnie w łopatkach sprężarek silników odrzutowych. Przy okazji badania tego zjawiska natrafiono na szereg poważnych problemów. Flutter skrzydeł i usterek jest niesłychanie ważny, szczególnie dla samolotów osiągających i przekraczających prędkość dźwięku.

Próby wyjaśnienia tego zjawiska przy uwzględnieniu jednego stopnia swobody (dla przykładu gdy skrzydło drga tylko w górę i w dół, tak jak belka wspornikowa) są bezowocne. Mamy tu do czynienia z innym przypadkiem sprzężonego układu o dwóch stopniach swobody, ponieważ skrzydło porusza się nie tylko w górę i w dół, ale jednocześnie wykonuje ruch skrętny. Wzajemne oddziaływanie drgań pionowych i skrętnych,

w obecności strumienia powietrza jako źródła energii, może prowadzić do niestateczności. Powstanie tego zjawiska można od strony fizycznej wyjaśnić w dosyć prosty sposób.

Dla pewnej wartości kąta natarcia (zdefiniowanego na rys. 8c), na skrzydło działa siła nośna i moment skręcający, zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Podczas gdy skrzydło wykonuje drgania skrętne, kąt α zmienia się i dlatego należy znaleźć zależność siły nośnej i momentu od tego kąta. Zależności te, otrzymane na podstawie pomiarów tunelowych przedstawiono graficznie na rys. 8a i b. Dla normalnych kątów lotu α (od 0° do 10°) zależności te są liniowe.

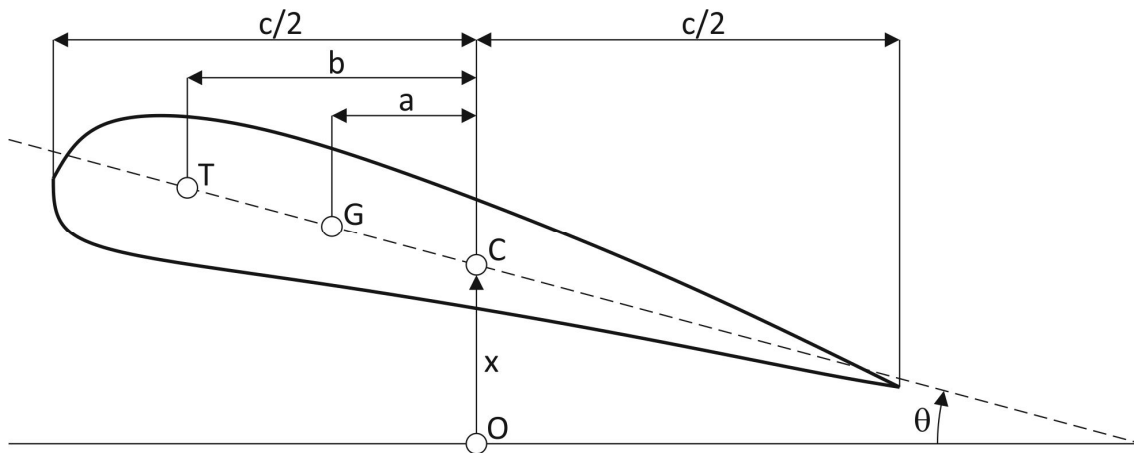
Przyjmijmy, że pionowe i skrętne ruchy skrzydła są takie, że kąt α jest większy podczas ruchu w górę niż podczas ruchu w dół. Zgodnie z rys. 8a siła nośna podczas ruchu skrzydła w górę jest większa niż podczas ruchu w dół, co oznacza, że wiatr dostarcza energii.



Rys. 8. Zależność pomiędzy siłą nośną i momentem, a małymi kątami natarcia jest liniowa

Również z rys. 8b wynika, że energia może być dostarczana. A więc podczas samych drgań pionowych (bez skręcenia) kąt natarcia (co widać na rys. 8) zmienia się, rosnąc podczas ruchu w dół i malejąc podczas ruchu w górę. Analogicznym zmianom podlega również moment skręcający. Jeżeli więc w czasie ruchu skrzydło skręca się w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, to do układu będzie dostarczona energia i drgania będą narastały.

Przystępujemy teraz do analizy ilościowej flatteru skrętno-giętnego samego skrzydła bez lotki i rozpoczniemy od ustalenia różniczkowych równań ruchu. W rzeczywistości skrzydło zachowuje się w przybliżeniu tak, jak belka wspornikowa zamocowana do kadłuba. Dla uproszczenia przyjmiemy, że skrzydło jest ciałem sztywnym tak zawieszonym na sprężynach, że może się ono poruszać w górę i w dół oraz obracać się wokół swojej osi podłużnej.



Rys. 9. Przekrój skrzydła samolotu z dwoma charakterystycznymi punktami: środkiem ciężkości G i środkiem skręcenia T

Na rysunku 9, początek współrzędnych O przyjęto w środku rozpiętości skrzydła w położeniu równowagi. Skrzydło odchyliło się od tego położenia (pokazano to na rysunku) o wielkości x i θ . Poza środkiem rozpiętości C , również punkty G i T przekroju skrzydła odgrywają bardzo ważną rolę. Punkt G jest środkiem ciężkości i określa własności bezwładnościowe. Położenie punktu T określa własności sprężyste zawieszenia. Punkt T znany jest jako „środek skręcenia” i zdefiniowany jest w następujący sposób: punkt T jest to taki punkt na skrzydle, że przyłożona w nim pionowa siła wywołuje tylko przemieszczenie pionowe bez obrotu. Z drugiej strony T jest punktem, który pozostaje nieruchomy, gdy na skrzydło działa czysty moment skręcający. Te dwie własności punktu T występują zawsze razem, co można wykazać za pomocą twierdzenia Maxwella o wzajemności. Niech k_x będzie stałą sprężystości skrzydła dla wychyleń w górę i w dół, a k_θ stałą sprężystości skrętnej skrzydła na jednostkę jego długości.

Niech P_Z będzie siłą nośną (funkcją x , θ i czasu t), a M (również x , θ i czasu t) niech oznacza moment wszystkich sił aerodynamicznych względem punktu O , przypadający na jednostkę rozpiętości, dodatni w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. W takim przypadku różniczkowe równania ruchu mają postać:

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{x} + a\ddot{\theta}) + k_x(x + b\theta) &= P_Z \\ I_G\ddot{\theta} + k_\theta\theta + k_x(x + b\theta)(b - a) &= M - P_Z a \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Występujące w tych równaniach wielkości $(x + a\theta)$ i $(x + b\theta)$ są odpowiednio pionowymi przesunięciami punktów G i T . Symbole m i I_G oznaczają masę i moment bezwładności nie tylko samego skrzydła, ale również i części otaczającego powietrza. Zazwyczaj uwzględnia się cylinder powietrza o promieniu $c/2$. Chociaż wpływ ten jest mały w przypadku łopaty śmigła, jednakże jest on istotny w przypadku skrzydeł samolotu, których ciężar jest nie większy niż trzykrotny ciężar cylindra powietrza wokół nich.

Zmienna siła P_Z działająca na skrzydło jest tego samego rzędu co siły sprężyste i siły bezwładności. We wszystkich poprzednich rozważaniach siły wzbudzające (i siły tłumiące) były małe w porównaniu z siłami sprężystymi i bezwładności, w wyniku czego częstość rezonansowa była określona tylko stosunkiem k/m i była niezależna od siły wzbudzającej. Obecnie siła P_Z , będąca siłą tego samego rzędu co siła sprężystości, oddziałuje na częstość i występujący flutter będzie miał częstość zupełnie różną od którejkolwiek częstości drgań własnych konstrukcji w spokojnym powietrzu.

Dla przypadku ustalonego siła nośna P_Z (przypadająca na jednostkę długości skrzydła) równa jest $\frac{1}{2}V^2 c C_Z$, a współczynnik siły nośnej C_Z jest proporcjonalny do kąta natarcia $\theta - (\dot{x}/V)$ strumienia powietrza. W ostatnim wyrażeniu wyraz pierwszy jest

oczywisty, drugi wynika stąd, że \dot{x} jest pionową składową prędkości powietrza przepływającego wokół skrzydła. Teoria ustaliła, że stałą proporcjonalności jest tu $2\pi\rho$, więc

$$P_Z = \frac{1}{2}V^2 c 2\pi\rho \left(\theta - \frac{\dot{x}}{V}\right) = \pi\rho V^2 c \left(\theta - \frac{\dot{x}}{V}\right) \quad (5)$$

Zgodnie z prostą teorią opisującą skrzydło znajdujące się w podźwiękowym, ustalonym przepływie siła nośna przyłożona jest w jednej czwartej cięciwy skrzydła i moment pochodzący od siły aerodynamicznej liczony względem środka ciężkości skrzydła wynosi

$$M = P_Z \frac{c}{4} = \pi\rho V^2 \frac{c^2}{4} \left(\theta - \frac{\dot{x}}{V}\right) \quad (6)$$

Wstawiając wyrażenia (5) i (6) do układu równań (4) otrzymamy

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{x} + a\ddot{\theta}) + k_x(x + b\theta) &= \pi\rho V^2 c \left(\theta - \frac{\dot{x}}{V}\right) \\ I_G\ddot{\theta} + k_\theta\theta + k_x(x + b\theta)(b - a) &= \pi\rho V^2 c \left(\frac{c}{4} - a\right) \left(\theta - \frac{\dot{x}}{V}\right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

a po uporządkowaniu zmiennych zapiszemy ten układ równań w postaci

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + \pi\rho V c \dot{x} + k_x x + m a \ddot{\theta} + (k_x b - \pi\rho V^2 c) \theta &= 0 \\ \pi\rho V c \left(\frac{c}{4} - a\right) \dot{x} + k_x (b - a) x + I_G \ddot{\theta} + \\ + \left[k_\theta + k_x b (b - a) - \pi\rho V^2 c \left(\frac{c}{4} - a\right) \right] \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

W celu analizy stateczności posłużymy się kryterium Routha, często stosowanym do analizy stateczności układów liniowych. W tym celu wykonamy transformację Laplace'a układu (8), otrzymując

$$\left. \begin{aligned} x(s)(ms^2 + \pi\rho Vcs + k_x) + \theta(s)(mas^2 + k_x b - \pi\rho V^2 c) &= 0 \\ x(s) \left[\pi\rho Vc \left(\frac{c}{4} - a \right) s + k_x(b - a) \right] + \\ \theta(s) \left[I_G s^2 + k_\theta + k_x b(b - a) - \pi\rho V^2 c \left(\frac{c}{4} - a \right) \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Rugując z tych równań wielkości $x(s)$ i $\theta(s)$ otrzymujemy następujące równanie częstotliwości:

$$\begin{aligned} & [ms^2 + \pi\rho Vcs + k_x] \left[I_G s^2 + k_\theta + k_x b(b - a) - \pi\rho V^2 c \left(\frac{c}{4} - a \right) \right] - \\ & \left[k_x(b - a) + \pi\rho Vc \left(\frac{c}{4} - a \right) s \right] [mas^2 + k_x b - \pi\rho V^2 c] = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Po wymnożeniu i uporządkowaniu równanie częstotliwości zapiszemy w następującej formie

$$\begin{aligned} & s^4 + \frac{\pi\rho Vc}{mI_G} \left(I_G + ma^2 - m \frac{ac}{4} \right) s^3 + \left[\frac{k_\theta}{I_G} + \frac{k_x}{m} + \frac{k_x}{I_G} (b - a)^2 - \frac{\pi\rho V^2 c}{I_G} \left(\frac{c}{4} - \right. \right. \\ & \left. \left. a \right) \right] s^2 + \frac{\pi\rho Vc}{mI_G} \left[k_\theta + k_x b \left(b - \frac{c}{4} \right) \right] s + \left[\frac{k_x k_\theta}{mI_G} + \frac{\pi\rho V^2 k_x}{mI_G} c \left(b - \frac{c}{4} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Ogólna postać równania częstotliwości to

$$s^4 + A_3s^3 + A_2s^2 + A_1s + A_0 = 0 \quad (12)$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{k_x k_\theta}{m I_G} + \frac{\pi \rho V^2 k_x}{m I_G} c \left(b - \frac{c}{4} \right) \\ A_1 &= \frac{\pi \rho V c}{m I_G} \left[k_\theta + k_x b \left(b - \frac{c}{4} \right) \right] \\ A_2 &= \frac{k_\theta}{I_G} + \frac{k_x}{m} + \frac{k_x}{I_G} (b - a)^2 - \frac{\pi \rho V^2 c}{I_G} \left(\frac{c}{4} - a \right) \\ A_3 &= \frac{\pi \rho V c}{m I_G} \left(I_G + m a^2 - m \frac{a c}{4} \right) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

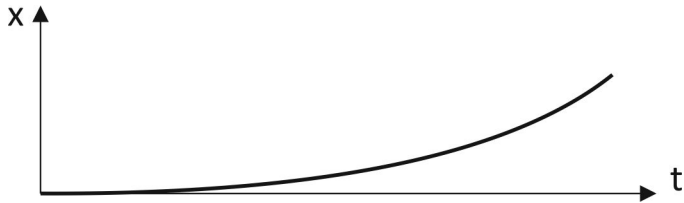
Jest to bardzo skomplikowane wyrażenie, w którym w zależności od wartości wielkości a i b (rys. 9) niektóre współczynniki mogą być ujemne. Rozpatrując najpierw współczynnik A_0 , widzimy, że drugi wyraz w tym nawiasie staje się ujemny dla $b < \frac{c}{4}$, tzn. wtedy, kiedy środek skręcania jest blisko środka ciężkości, co występuje w przypadku cienkiego symetrycznego profilu skrzydła. Układ jest niestateczny wtedy, kiedy A_0 jest ujemne, lub wyrażając to inaczej, kiedy

$$\pi \rho V^2 c \left(\frac{c}{4} - b \right) \geq k_\theta \quad (14)$$

czyli

$$V^2 \geq \frac{4k_\theta}{\pi\rho c(c-4b)} \quad (15)$$

Ostatnie wyrażenie ma bardzo prosty sens fizyczny: Jest to raczej statyczna niestateczność typu przedstawionego na rys. 10, niż prawdziwy flutter.



Rys. 10. Przebieg przemieszczenia układu w przypadku gdy jest on statycznie niestateczny

Wyobraźmy sobie niedrgające skrzydło tak umieszczone w przepływie, że nie występuje na nim żadna siła nośna (kąt natarcia równy zero). Wyobraźmy sobie dalej, że skrzydło to skrzycono o kąt natarcia θ , wskutek czego pojawiła się siła nośna równa $\pi\rho V^2 c\theta$, przyłożona w jednej czwartej cięciwy skrzydła. Ramię tej siły względem środka skręceń wynosi $c/4 - b$, a aerodynamiczny moment skręcający równa się

$$\pi\rho V^2 c\theta \left(\frac{c}{4} - b\right) \quad (16)$$

i równoważony jest przez moment sił sprężystości równy $k_\theta\theta$. Przy małych prędkościach lotu aerodynamiczny moment skręcający jest mniejszy od przeciwnie skierowanego momentu sił sprężystości i skrzydło powraca do położenia $\theta = 0$. Jednakże przy pewnej prędkości obydwa momenty będą jednakowe dla każdej wartości θ i będziemy

mieli równowagę obojętną. Prędkość, przy której to następuje znajdujemy z równania (15) i nosi ona nazwę „prędkości rozbieżności skrętnej skrzydła” (dywergencji). Zjawisko statycznej równowagi obojętnej nosi w aerodynamice nazwę „rozbieżności skrętnej skrzydła” (dywergencji).

Inny przypadek niestateczności pojawia się wtedy, kiedy współczynnik A_2 , ze względu na swój ostatni człon, staje się ujemny. Występuje to wtedy, kiedy a jest małe lub kiedy środek ciężkości leży w pobliżu środka skrzydła. Prędkość krytyczna dla tego przypadku określona jest zależnością

$$V^2 \geq \frac{4k_\theta + 4k_x \left[\frac{I_G}{m} + (b-a)^2 \right]}{\pi \rho c (c-4a)} \quad (17)$$

Prędkość ta może być większa lub mniejsza od prędkości wynikającej ze wzoru (15). Jeżeli jest ona mniejsza, to klasyczny flutter występuje przy prędkości niższej niż prędkość dywergencji.

Taka analiza flutteru możliwa jest jedynie dla niskich częstości (dla skrzydeł bardzo podatnych na skręcanie), ponieważ wyrażenia stosowane przez nas do opisu siły nośnej i momentu aerodynamicznego słuszne są tylko dla przepływu ustalonego. Przy drganiach o niskich częstościach, wypór zawsze zmienia się na skutek zmiany kąta natarcia, a więc mamy do czynienia z „kolejnym następowaniem stanów ustalonych”, dla których przytoczona analiza jest słuszna. W spotykanych w praktyce przypadkach szybkiego flutteru (rzędu 20 Hz) zależności te nie są dłużej słuszne, a analiza flutteru staje się tak bardzo skomplikowana, że część inżynierów rozpatruje ten problem jako odrębne zagadnienie.

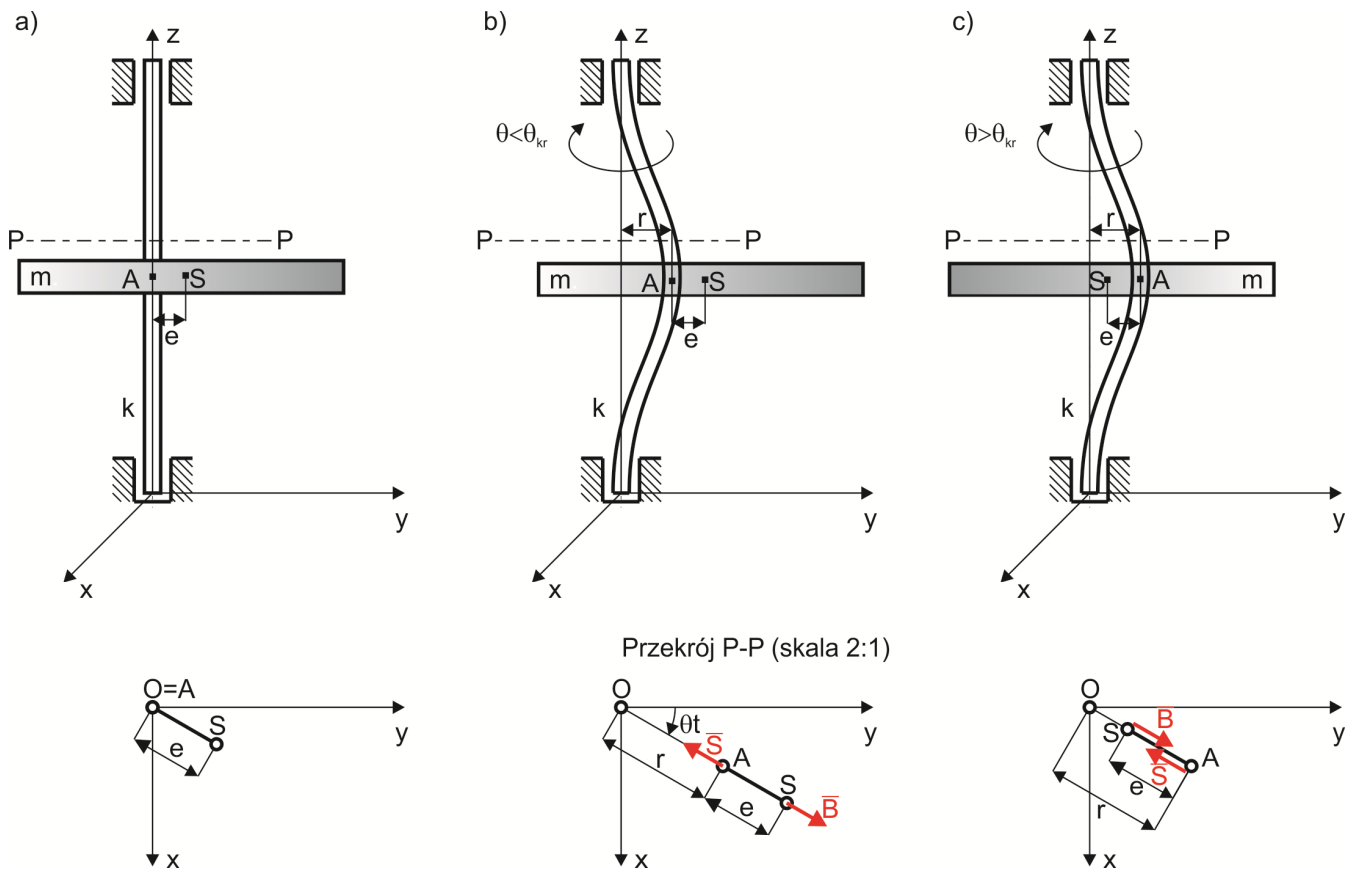
7. Wybrane zagadnienia dynamiki maszyn wirnikowych

7.1. Prędkości krytyczne

Rozważmy wał z wirnikiem zamodelowanym jako krążek o masie m , wirujący ze stałą prędkością kątową θ , którego środek masy S znajduje się w odległości e (nazywanej mimośrodem) od środka wału A .

Jeśli krążek obraca się dookoła osi wału, to na wał działa siła bezwładności \bar{B} (siła odśrodkowa). Tę wirującą siłę można rozłożyć na dwie prostopadłe składowe, z których każda zmienia się w sposób harmoniczny (z częstością θ) i ma tę samą amplitudę. Pod wpływem tych sił wał będzie wykonywał jednocześnie drgania w dwóch prostopadłych płaszczyznach. Drgania mogą stać się szczególnie gwałtowne podczas rezonansu, czyli wtedy, gdy prędkość kątowa wału θ będzie równa częstości drgań własnych ω nieruchomego krążka zamocowanego na sprężystym wale.

Na rys. 1. przedstawiono trzy stany układu: nieruchomy wał – rys. 1a, wał obracający się z prędkością θ mniejszą od tzw. prędkości krytycznej θ_{kr} – rys. 1b, wał obracający się z prędkością θ większą od tzw. prędkości krytycznej θ_{kr} – rys. 1c.



Rys. 1. Ilustracja zjawiska samocentrowania wału

O – oś łożysk,
 A – środek wału,
 S – środek masy krążka,

$r=OA$ – ugięcie wału w miejscu osadzenia krążka,
 $e=AS$ – mimośród,
 m – masa krążka,
 k – współczynnik sprężystości giętnego wału.

Prędkości krytyczne to takie prędkości, przy których zachodzą gwałtowne drgania. Dla okrągłego wału, na którym umieszczonych jest kilka krążków i który osadzony jest w sztywnych łożyskach (dwóch lub więcej) prędkości krytyczne θ_{kr} pokrywają się zwykle z częstotáciami własnymi nieobraccjącego się wału.

Dla układu przedstawionego na rys. 1 wyznaczmy teraz prędkość krytyczną wału postępując w prosty sposób. Na rysunku przedstawiono istotne punkty układu O, A i S, które znajdują się na jednej osi (później wyjaśni się dlaczego punkty leżą na jednej prostej). Załóźmy, że ta oś obraca się wokół punktu O z prędkością kątową θ , taką samą z jaką obraca się wał. Jeśli pominiemy wpływ grawitacji, to na krążek będą działać jedynie dwie siły:

- siła bezwładności \bar{B} przyłożona w środku masy krążka S, dążąca do ugięcia wału (skierowana na zewnątrz), której wartość to $B = m\theta^2(r + e)$, oraz

- siła sprężystości wału \bar{S} przyłożona w punkcie A, dążąca do wyprostowania wału (skierowana do środka), której wartość zależy od współczynnika sprężystości giętej wału k i wynosi $S = kr$.

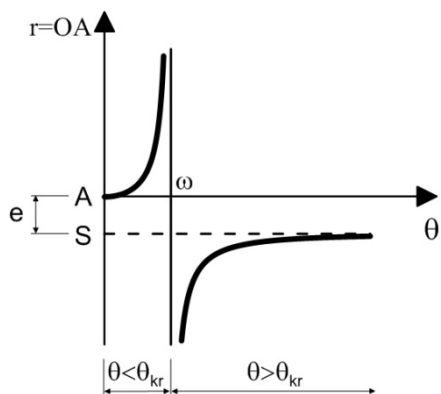
Wał znajduje się w ustalonym ruchu obrotowym, czyli musi zachodzić równowaga sił \bar{S} i \bar{B} . Siły te muszą zatem leżeć na jednej prostej (muszą tworzyć dwójkę zerową) i spełniać równanie:

$$kr = m\theta^2(r + e) \tag{1}$$

Rozwiązując powyższe równanie ze względu na r otrzymamy:

$$r = e \frac{m\theta^2}{(k-m\theta^2)} = e \frac{\theta^2}{(k/m-\theta^2)} = e \frac{\theta^2}{(\omega^2-\theta^2)} = e \frac{(\theta/\omega)^2}{1-(\theta/\omega)^2} \quad (2)$$

gdzie: $\omega = \sqrt{k/m}$ – częstość własna układu.



Rys. 2. Wzajemne położenie punktów A, S, O w funkcji prędkości kątowej wału

Z wykresu przedstawionego na rys. 2 wynika, że odkształcenie sprężyste wału r jest minimalne dla bardzo małych prędkości kątowych ($\theta \sim 0$), a staje się ono nieskończenie duże dla prędkości krytycznej (pamiętajmy, że rozważamy idealny przypadek bez tłumienia). Natomiast dla bardzo dużych prędkości kątowych punkt O zbliża się do S. Oznacza to, że przy bardzo dużych prędkościach kątowych środek masy S pozostaje prawie nieruchomy. Jest to zrozumiałe z fizycznego punktu widzenia, gdyż w przeciwnym przypadku siła bezwładności byłaby bardzo duża (dążyłaby do nieskończoności wraz ze wzrostem prędkości kątowej).

Z wykresu wynika jeszcze jeden ciekawy wniosek, mianowicie taki, że przy prędkościach mniejszych od krytycznej, środek masy S jest bardziej oddalony niż punkt A od osi łożysk O , zaś przy prędkościach większych od krytycznej dzieje się odwrotnie – środek masy krążka jeży bliżej osi łożysk niż punkt A . Zauważamy również, że dla każdej prędkości punkty S i A będą znajdować się po tej samej stronie punktu O . Innymi słowy: przy prędkościach mniejszych od krytycznej „cięższa” część krążka znajduje się na zewnątrz, zaś przy prędkościach wyższych od krytycznej znajduje się ona wewnątrz. To zjawisko nazywamy *samocentrowaniem* wału.

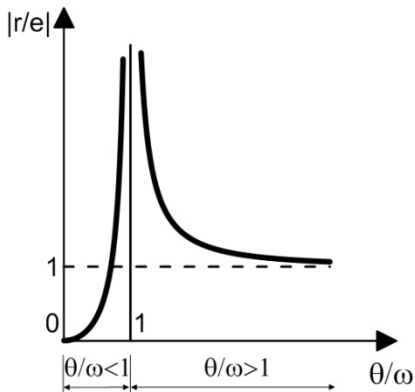
Jeśli chcemy wyznaczyć deformację względną wału (względem wartości mimośrodów e) podzielimy ostatnie równanie przez e , otrzymując

$$\frac{r}{e} = \frac{(\theta/\omega)^2}{1 - (\theta/\omega)^2} \quad (3)$$

Następnie podzielimy licznik i mianownik przez $(\theta/\omega)^2$

$$\frac{r}{e} = \frac{1}{\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2 - 1} \quad (4)$$

otrzymując deformację względną r/e w funkcji bezwymiarowej częstości θ/ω .

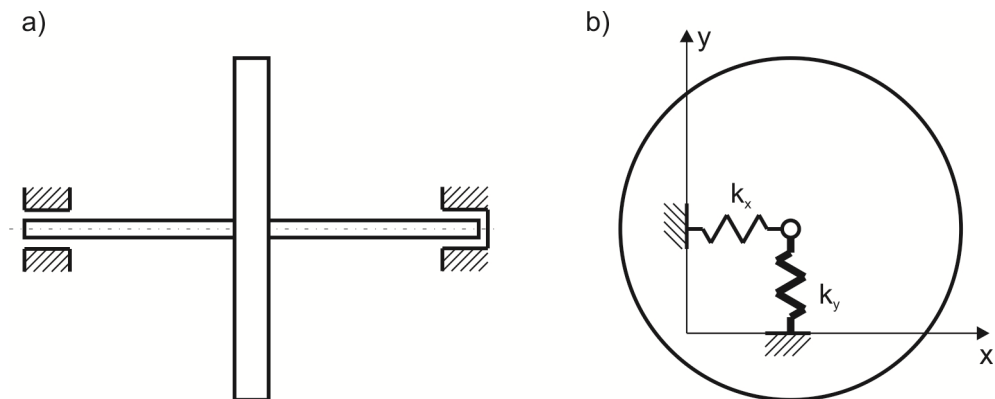


Rys. 3. Deformację względną wału r/e w funkcji bezwymiarowej częstości θ/ω

Wykres przedstawiony na rys. 3 jest inną prezentacją zjawisk wyjaśnianych poprzednio.

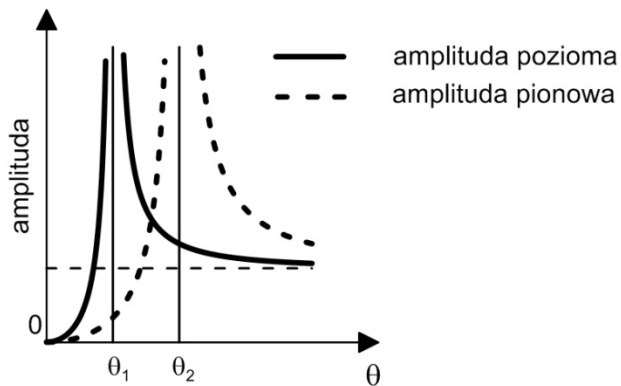
W omawianym dotychczas przypadku zakładaliśmy, że łożyska są sztywne. Jeśli byłoby inaczej, a podatność łożysk byłaby taka sama we wszystkich kierunkach, powyższe rozważania nadal są słuszne. Znaczenie współczynnika sprężystości k pozostaje bez zmian, przy czym jego wartość będzie mniejsza (ze względu na podatność łożysk) co powoduje zmniejszenie prędkości krytycznej wału.

Nieco inna będzie sytuacja, jeśli sztywność łożyska na różnych kierunkach nie jest jednakowa. Taka sytuacja często ma miejsce w układzie, w którym wał obraca się wokół poziomej osi, jak to przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Wał podparty łożyskami o większej sztywności w kierunku pionowym niż poziomym

Zwykle sztywność w kierunku pionowym jest większa niż w poziomym ($k_y > k_x$). Dlatego, podczas gdy przy prędkości kątowej θ_1 występuje rezonans na kierunku poziomym, amplituda ruchu na kierunku pionowym jest mała (rys. 5). Środek wału A porusza się wówczas po elipsie wydłużonej w kierunku poziomym. Przy większej prędkości kątowej θ_2 występuje rezonans na kierunku pionowym i środek wału A porusza się po torze eliptycznym wydłużonej w kierunku pionowym. Zatem przy prędkościach krytycznych środek wału prawie nie wiruje, ale porusza się po torach zbliżonych do linii prostej.

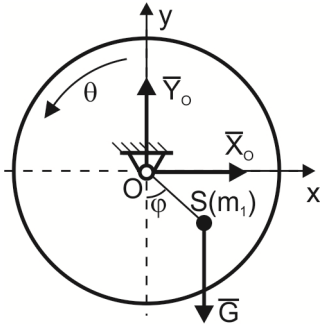


Rys. 5. Charakterystyka rezonansowa wału podpartego łożyskami o większej sztywności w kierunku pionowym niż poziomym

W przypadku bardziej skomplikowanych układów można wyznaczyć prędkości krytyczne stosując metodę współczynników wpływu znaną z wytrzymałości materiałów.

7.2. Prędkości krytyczne Reakcje dynamiczne w łożyskach

Omawiając tematykę wyważania wirników rozpoczniemy rozważania od najprostszego przykładu. Przeanalizujemy ruch układu przedstawionego na rys. 6. Jest to obracający się ze stałą prędkością kątową θ krążek niewyważony, którego środek masy znajduje się w punkcie $S(m_1)$.



Rys. 6. Krążek niewyważony i reakcje łożysk

Dynamiczne równania ruchu środka masy krążka to:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_S = X_O \\ m_1 \ddot{y}_S = Y_O - G \end{cases} \quad (5)$$

Z geometrii wynika, że:

$$\begin{cases} x_S = e \sin \varphi \\ y_S = -e \cos \varphi \end{cases} \quad (6)$$

gdzie $e=OS$. Różniczkując (6) otrzymamy

$$\begin{cases} \dot{x}_S = e\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{y}_S = e\dot{\varphi}\sin\varphi \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_S = e\ddot{\varphi}\cos\varphi - e\dot{\varphi}^2\sin\varphi \\ \ddot{y}_S = e\ddot{\varphi}\sin\varphi + e\dot{\varphi}^2\cos\varphi \end{cases} \quad (8)$$

Oznaczając prędkość kątową jako $\dot{\varphi} = \theta$ i przyspieszenie kątowe jako $\ddot{\varphi} = \varepsilon$, określono reakcje w łożysku w punkcie O:

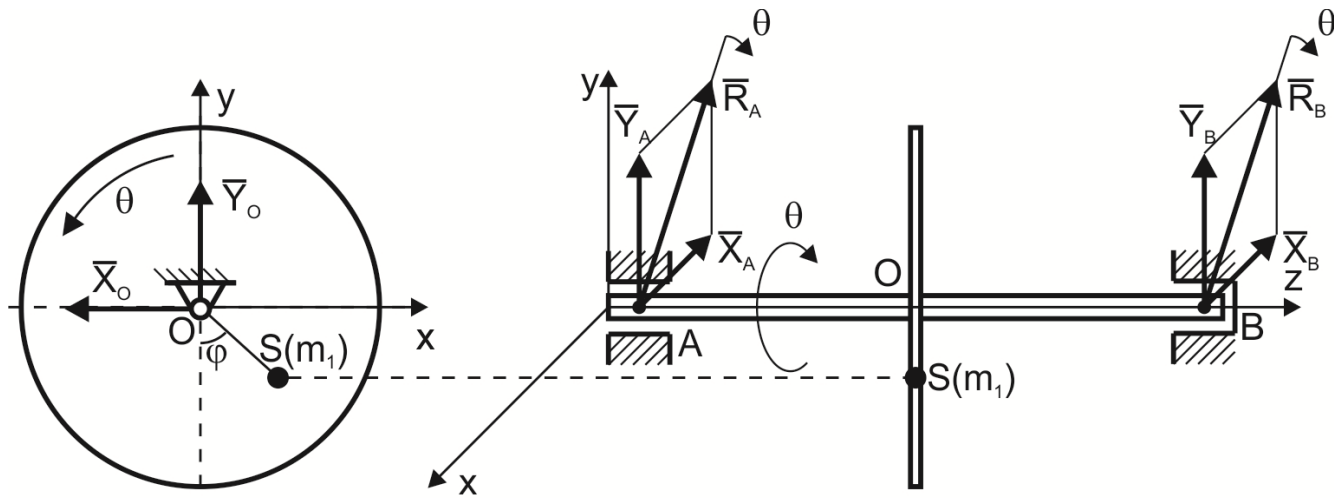
$$\begin{cases} X_O = m_1e(\varepsilon\cos\varphi - \theta^2\sin\varphi) \\ Y_O = m_1e(\varepsilon\sin\varphi + \theta^2\cos\varphi) + G \end{cases} \quad (9)$$

Reakcje te mają charakter dynamiczny, co niekorzystnie wpływa na żywotność łożyska. Wyrażenia $m_1e(\varepsilon\cos\varphi - \theta^2\sin\varphi)$ oraz $m_1e(\varepsilon\sin\varphi + \theta^2\cos\varphi)$ to rzuty siły bezwładności pochodzącej od niewyważenia na osie x i y. Reakcje miałyby charakter statyczny ($X_O = 0$ i $Y_O = G$) jeśli prędkość i przyspieszenie kątowe byłyby równe zero, lub jeśli nie występowałoby niewyważenie. Pierwszy przypadek z oczywistych względów należy pominąć – wymagałoby to unieruchomienia układu. Należy więc dążyć do zredukowania niewyważenia. Niewyważeniem jest tu m_1e czyli iloczyn masy m_1 i mimośrodowego przesunięcia środka masy e . W praktyce niewyważenie można zmniejszyć przez zmniejszenie wartości e .

7.3. Wyważenie statyczne

Rozważony w poprzednim punkcie przypadek jest bardzo prosty z tego względu, iż nie bierzemy pod uwagę „szerokości” krążka, traktując go jako bardzo cienki. Rozważając dalej omawiany układ narysujemy go w innej płaszczyźnie (rys. 7). Założymy również dla przejrzystości, że prędkość kątową krążka θ jest stała, czyli $\varepsilon = 0$. Pominiemy również część statyczną reakcji pochodzącą od ciężaru zakładając $G = 0$. Wówczas reakcje w łożyskach wyznaczone z zależności (9) będą równe

$$\begin{cases} X_O = -m_1 e \theta^2 \sin \varphi \\ Y_O = m_1 e \theta^2 \cos \varphi \end{cases} \quad (10)$$

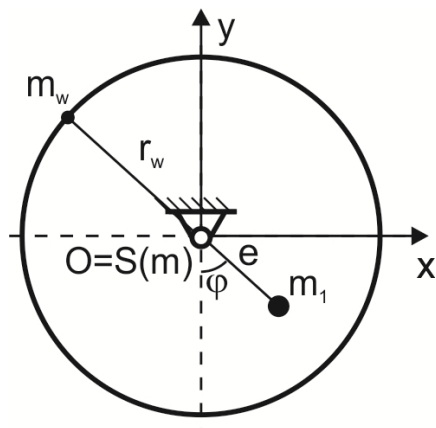


Rys. 7. Niewyważony wirnik o małej szerokości zamodelowany krążkiem i reakcje dynamiczne łożysk

Widać wówczas, że w rzeczywistości łożyska są rozstawione w punktach A i B i będą w nich występować reakcje, których suma rzutów na osie x i y będzie określona przez (10). Reakcje \vec{R}_A i \vec{R}_B wirują wraz z wałem z prędkością kątową teta θ . Wyważenie takiego układu będzie polegało na umieszczeniu masy wyważającej po przeciwnej stronie niewyważenia. Jeśli chcemy umieścić masę wyważającą m_w w odległości r_w od osi wału, to wielkość tej masy określimy z równania

$$m_w r_w = m_1 e \quad (11)$$

W praktyce często umieszcza się masę wyważającą na obwodzie krążka (rys. 8).

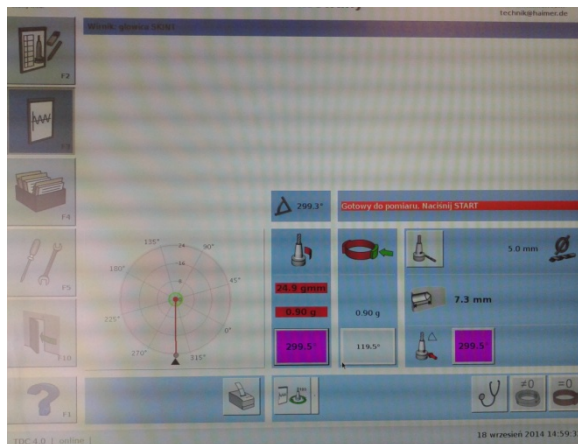


Rys. 8. Wyważenie statyczne wirnika o małej szerokości

Przedstawiony tutaj przykład to wyważenie statyczne układu. Może ono być stosowane w przypadku krążków o małej szerokości. Warunkiem wystarczającym wyważenia statycznego jest sprowadzenie środka masy układu do środka obrotu, czyli

$$\begin{cases} x_S = 0 \\ y_S = 0 \end{cases} \quad (12)$$

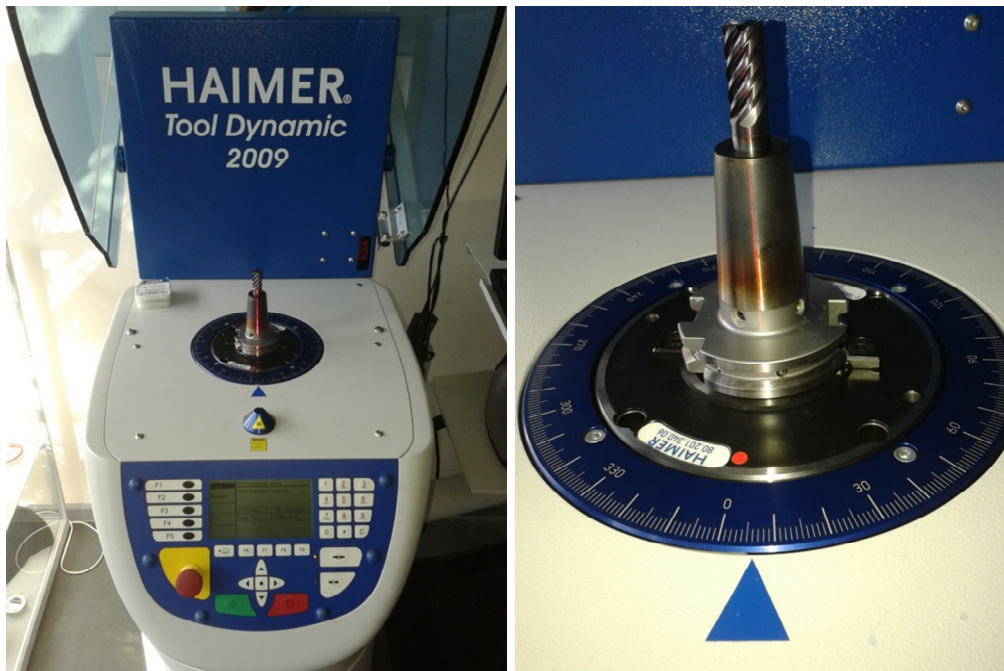
Wybrane elementy poddawane wyważeniu statycznemu przedstawiono na trzech kolejnych rysunkach. Posłużono się przykładami wyważania narzędzi do obróbki mechanicznej. Na rys. 9 przedstawiono wyważarkę do narzędzi maszyn.



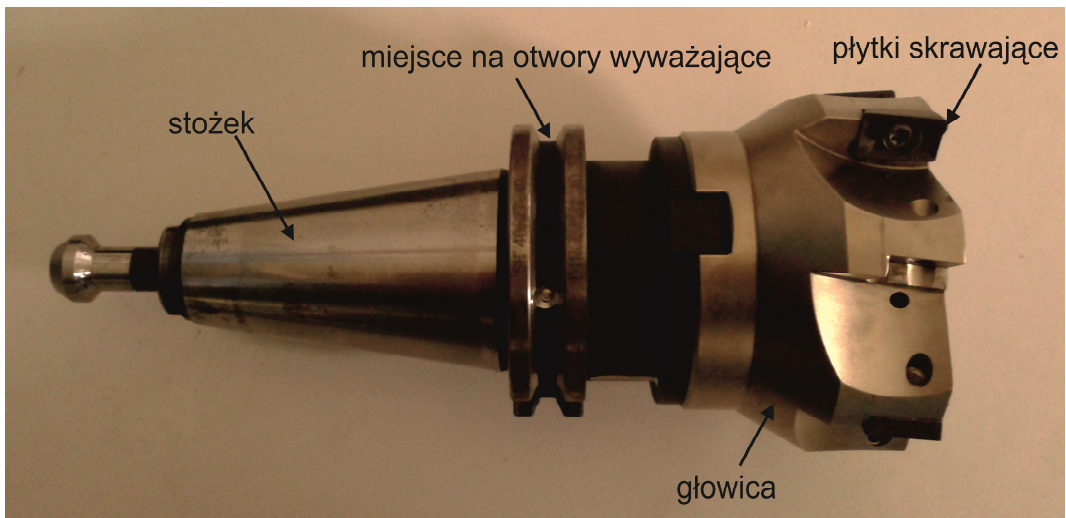
Rys. 9. Wyważarka do narzędzi: a) widok ogólny, b) widok pulpitu

Wyważarka służy do wyważania statycznego, które odbywa się na podstawie pomiarów dokonywanych podczas obrotów narzędzia. Po przeprowadzeniu procedury pomiarowej na pulpicie wyświetlana jest informacja o wielkości niewyważenia w gmm (gramomilimetry) oraz jego położeniu kątowym w stopniach. Podane są również dwa warianty wyważenia. Pierwszy polega na dodaniu masy – wówczas podawana jest masa ciężarka

oraz położenie kątowe, w którym powinien być on zamocowany, drugi polega na nawierceniu otworu wyważającego – wówczas podawane jest położenie otworu wyważającego, jego głębokość oraz średnica wiertła jakiego należy użyć do jego wykonania. Na rys. 10 zaprezentowano wyważarkę z zamontowaną głowicą wiertarską, natomiast na rys. 11 pokazano głowicę frezarską z nawierconym otworem wyważającym.



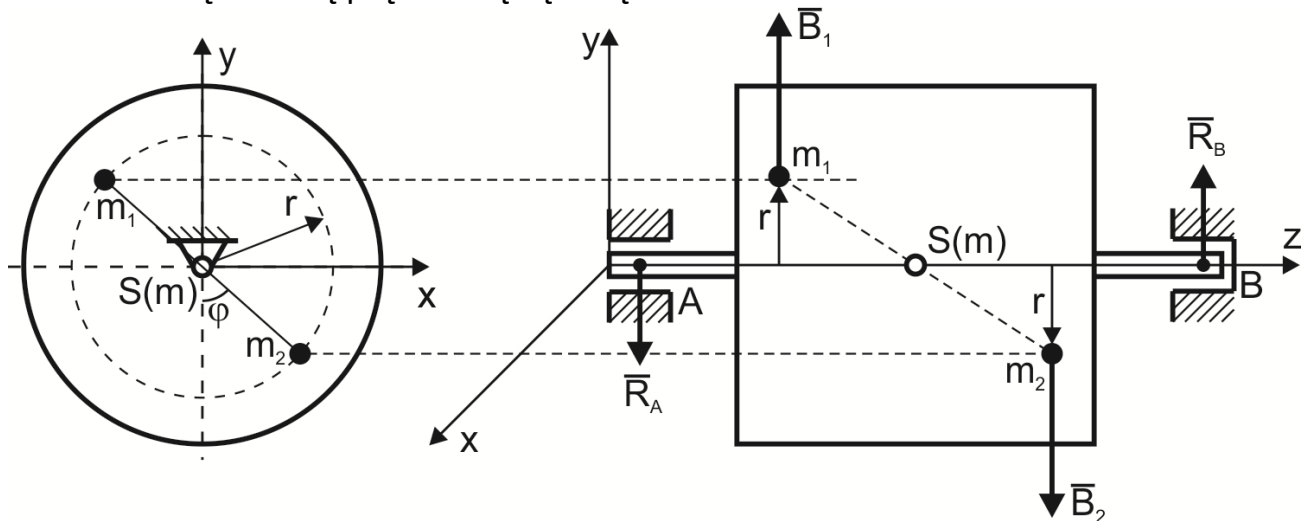
Rys. 10. Wyważarka do narzędzi z głowicą wiertarską



Rys. 11. Głowica frezarska z nawierconym otworem wyważającym

7.4. Wyważenie dynamiczne

W przypadku wirników o wydłużonym kształcie, wyważenie statyczne jest niewystarczające (poza szczególnymi przypadkami). W celu wyjaśnienia istoty problemu założmy idealny wirnik, czyli symetryczny osiowo z dodanymi masami powodującymi niewyważenie w taki sposób, że środek masy pozostaje na osi obrotu (rys. 12). Założmy, że wirnik obraca się ze stałą prędkością kątową θ wokół osi z .



Rys. 12. Dynamicznie niewyważony wirnik i obracające się przeciwnie skierowane reakcje łożysk

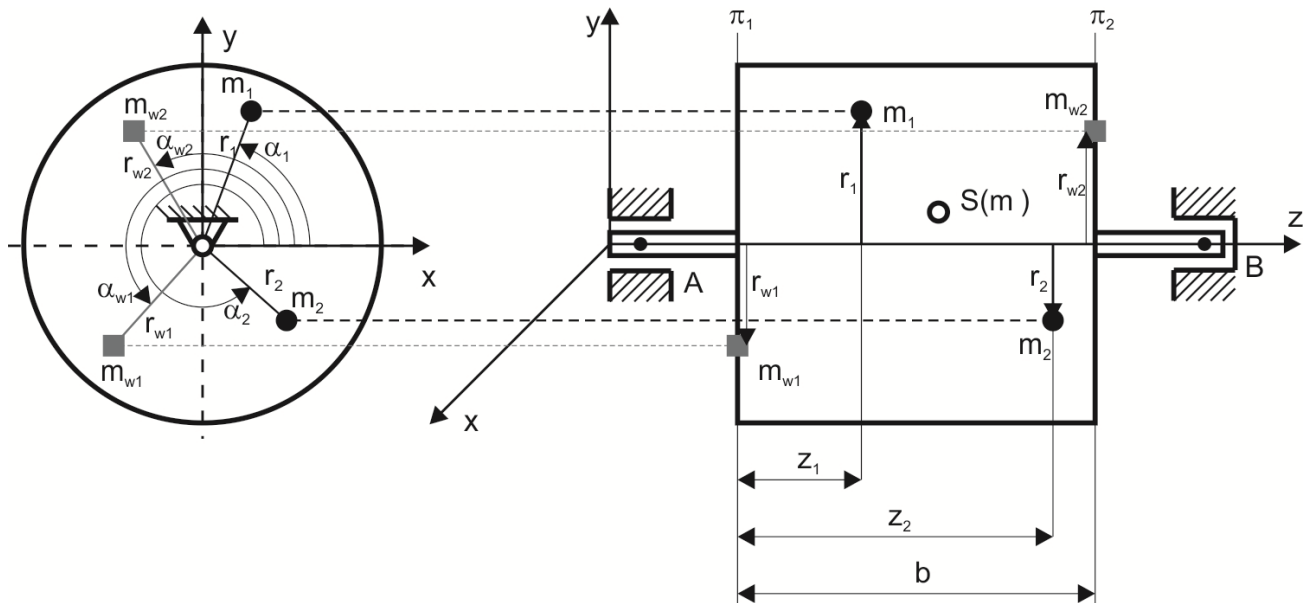
Warunek wyważenia statycznego (12) jest spełniony, ale pomimo tego reakcje w łożyskach będą mieć charakter dynamiczny. Siły bezwładności \bar{B}_1 i \bar{B}_2 stanowią parę sił, która może być zrównoważona tylko przez parę sił reakcji łożysk \bar{R}_A i \bar{R}_B . Reakcje w łożyskach wirują wraz z wałem z prędkością kątową θ , czyli stanowią obciążenie dynamiczne. Niewyważenie tego rodzaju może być stwierdzone tylko podczas ruchu i w związku z tym mówimy, że wirnik jest niewyważony dynamicznie.

Powiemy, że wirnik jest wyważony dynamicznie jeśli jest wyważony statycznie (spełniona jest zależność (12)) i jednocześnie odpowiednie masowe momenty dewiacji są równe zero, czyli

$$\left. \begin{aligned} S_{yz} = \sum_i^n m_i x_i = 0 \\ S_{xz} = \sum_i^n m_i y_i = 0 \\ I_{xz} = \sum_i^n m_i x_i z_i = 0 \\ I_{yz} = \sum_i^n m_i y_i z_i = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{warunki wyważenia} \\ \text{statycznego} \\ \text{warunki wyważenia} \\ \text{dynamicznego} \end{array} \quad (13)$$

gdzie S_{xz} i S_{yz} to masowe momenty statyczne, I_{xz} i I_{yz} to masowe momenty dewiacji (odśrodkowe).

Wyważanie dynamiczne przeprowadza się na urządzeniach nazywanych wyważarkami. Efekt wyważenia można osiągnąć dodając (lub odejmując) co najmniej dwie masy wyważające. Ze względów praktycznych masy dodaje się (lub odejmuje) w specjalnie przeznaczonych do tego miejscach, tzw. płaszczyznach wyważania prostopadłych do osi obrotu. Często również promienie wyważania są z góry określone, np. w przypadku wyważania kół samochodowych. Aby omówić proces wyważania, weźmiemy teraz pod uwagę bardziej ogólny przypadek, w którym obydwie warunki (12) i (13) nie są spełnione. Do symetrycznego osiowo wirnika przedstawionego na rys. 13, dodane zostały masy m_1 i m_2 powodujące niewyważenie dynamiczne. Wybierzmy płaszczyzny wyważania π_1 i π_2 w których mają zostać umieszczone masy wyważające m_{w1} i m_{w2} .



Rys. 13. Przykład dynamicznego wyważenia wirnika

W procesie wyważania muszą zostać określone wielkości mas wyważających m_{w1} i m_{w2} , promienie wyważenia r_{w1} i r_{w2} oraz położenia kątowe mas wyważających α_{w1} i α_{w2} . Wymienione wielkości muszą spełniać warunki (13), z których wynika układ równań

$$\begin{cases}
 m_1 r_1 \cos \alpha_1 + m_2 r_2 \cos \alpha_2 + m_{w1} r_{w1} \cos \alpha_{w1} + m_{w2} r_{w2} \cos \alpha_{w2} = 0 \\
 m_1 r_1 \sin \alpha_1 + m_2 r_2 \sin \alpha_2 + m_{w1} r_{w1} \sin \alpha_{w1} + m_{w2} r_{w2} \sin \alpha_{w2} = 0 \\
 m_1 r_1 (z_1 + l) \cos \alpha_1 + m_2 r_2 (z_2 + l) \cos \alpha_2 + m_{w1} r_{w1} l \cos \alpha_{w1} + \\
 \quad m_{w2} r_{w2} (b + l) \cos \alpha_{w2} = 0 \\
 m_1 r_1 (z_1 + l) \sin \alpha_1 + m_2 r_2 (z_2 + l) \sin \alpha_2 + m_{w1} r_{w1} l \sin \alpha_{w1} + \\
 \quad m_{w2} r_{w2} (b + l) \sin \alpha_{w2} = 0
 \end{cases} \quad (14)$$

Podany układ równań pozwala na wyznaczenie czterech niewiadomych. Zakładając np. promienie r_{w1} i r_{w2} możemy wyznaczyć pozostałe parametry mas wyważających, czyli m_{w1} , m_{w2} , α_{w1} i α_{w2} .

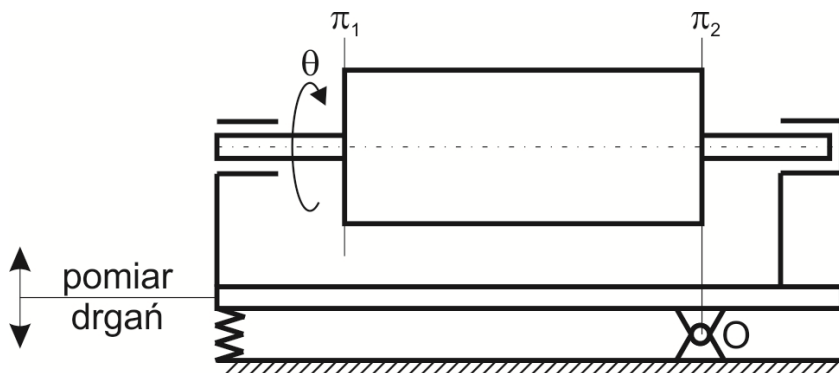
Dla przejrzystości przykładu przyjmijmy konkretny stan niewyważenia, stosunkowo łatwy do analizy, czyli np.: $m_1 = 0.01 [kg]$, $m_2 = 0.02 [kg]$, $r_1 = 0.1 [m]$, $r_2 = 0.1 [m]$, $\alpha_1 = 0 [rad]$, $\alpha_2 = \frac{3}{2}\pi [rad]$, $z_1 = 0 [m]$, $z_2 = 1 [m]$. Ponadto przyjmijmy szerokość wirnika $b = 1 [m]$ oraz promienie wyważenia $r_{w1} = 0.1 [m]$ i $r_{w2} = 0.1 [m]$. Z rozwiązania układu równań wynika, że są możliwe cztery sposoby wyważenia układu.

Tabela. 1. Warianty doboru parametrów wyważenia wirnika

	$m_{w1} [kg]$	$m_{w2} [kg]$	$\alpha_{w1} [rad]$	$\alpha_{w2} [rad]$
wariant 1	0.01	0.02	π	$\pi/2$
wariant 2	0.01	-0.02	π	$3\pi/2$
wariant 3	-0.01	0.02	0	$\pi/2$
wariant 4	-0.01	-0.02	0	$3\pi/2$

Wariant pierwszy polega na dodaniu mas wyważających, wariant 4 polega na ich odjęciu. W wariacie 2 i 3 jedna z mas jest dodawana a druga odejmowana.

Równania rozwiązano zakładając znajomość stanu niewyważenia, czyli wartości niewyważenia oraz jego położenia. W praktyce są to wielkości nieznane i wymagane jest ich określenie. Do tego celu stosuje się wyważarki dynamiczne. Prześledzimy teraz zasadę działania takiego urządzenia, które zostało schematycznie przedstawione na rys. 14.

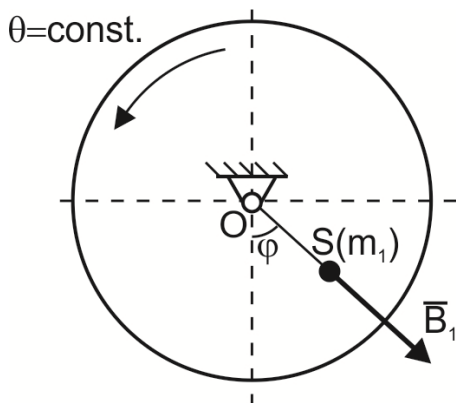


Rys. 14. Schemat wyważarki dynamicznej

Wał jest ułożyskowany w ramie zamocowanej przegubowo w taki sposób, że jedna z płaszczyzn wyważania przechodzi przez oś obrotu ramy. Drugi koniec ramy jest podparty sprężysto. Jeśli wirnik zostanie wprowadzony w ruch obrotowy wokół własnej osi, wówczas siły bezwładności niewyważonych mas będą powodować wychylenie się ramy wokół punktu O . Wychylenie ramy będzie wywołane jedynie przez siły bezwładności niewyważenia przypadającego na płaszczyznę korekcji π_1 .

O wartości niewyważenia można wnioskować na podstawie amplitudy drgań. Amplituda drgań A jest proporcjonalna do amplitudy siły wymuszającej pochodzącej od niewyważenia (siły bezwładności). Będziemy rozważać kolejno trzy przypadki, na podstawie których wyznaczymy parametry niewyważenia.

a) Drgania wywołane istniejącym niewyważeniem



Rys. 15. Pierwszy etap wyważania – wirnik z początkowym niewyważeniem

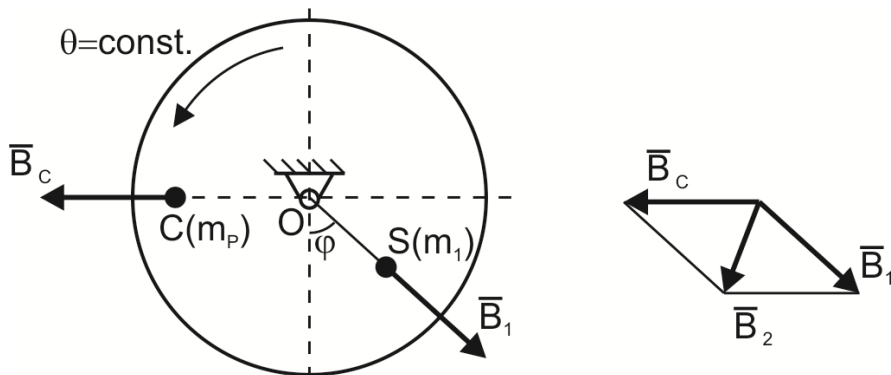
W pierwszym przypadku amplituda drgań A_1 jest proporcjonalna do amplitudy siły wymuszającej B_1

$$A_1 = KB_1 \quad (15)$$

gdzie A_1 to maksymalna amplituda przemieszczenia (występująca przy prędkości rezonansowej), $B_1 = m_1\theta^2e$ to amplituda siły bezwładności, K to współczynnik proporcjonalności. Współczynnik K nie jest znany. Podobnie nie są znane parametry niewyważenia, czyli m_1 , $OS = e$, φ . W takim przypadku należy zarejestrować jedynie amplitudę przemieszczenia A_1 .

b) *Drgania wywołane istniejącym niewyważeniem oraz masą próbną w punkcie C*

W dowolnym miejscu, np. w punkcie C należy zmocować dowolną ale znaną masę próbną m_p w dowolnej lecz znanej odległości $OC = r_p$ jak pokazano na rys. 16.



Rys. 16. Drugi etap wyważania – wirnik z masą próbną po lewej stronie

Po ponownym uruchomieniu wirnika należy odczytać amplitudę A_2 , która jest proporcjonalna do amplitudy siły wymuszającej B_2

$$A_2 = KB_2 \quad (16)$$

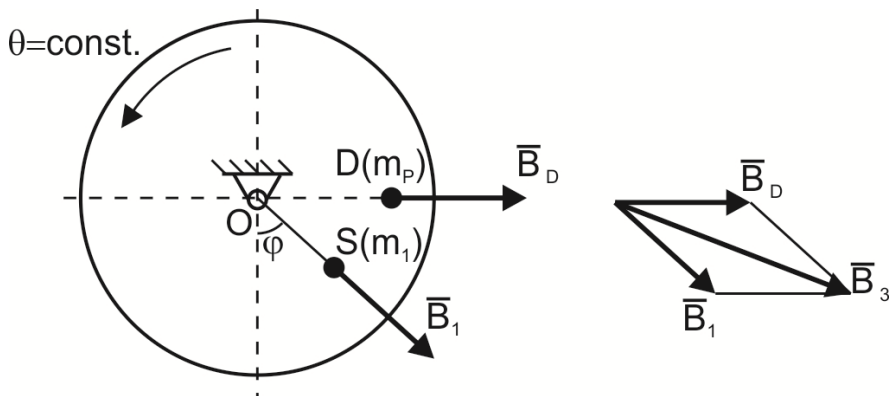
gdzie

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_1 + \vec{B}_C \quad (17)$$

to wypadkowa siła bezwładności.

c) Drgania wywołane istniejącym niewyważeniem oraz masą próbną w punkcie D

Masę próbną m_p należy przenieść na przeciwną stronę wirnika i zamocować w punkcie D ($OD = r_p$) jak pokazano na rys. 17.



Rys. 17. Trzeci etap wyważania – wirnik z masą próbną po prawej stronie

Po ponownym uruchomieniu wirnika należy odczytać amplitudę A_3 , która jest proporcjonalna do amplitudy siły wymuszającej B_3

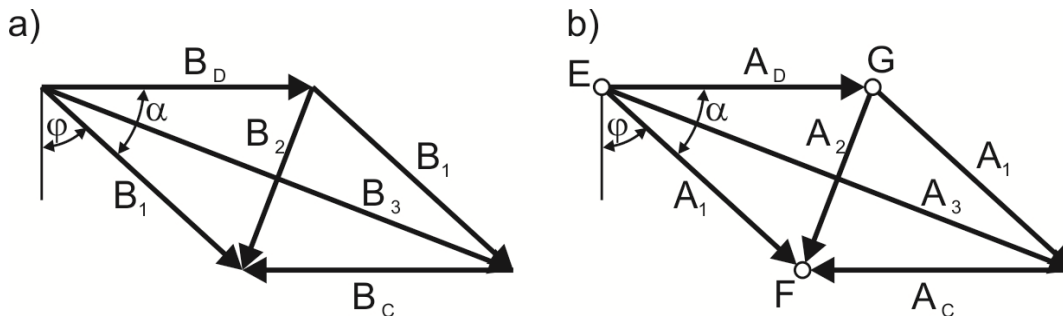
$$A_3 = KB_3 \quad (18)$$

gdzie

$$\vec{B}_3 = \vec{B}_1 + \vec{B}_D \quad (19)$$

to wypadkowa siła bezwładności.

Otrzymane podczas trzech kolejnych prób wyniki są wystarczające do wyznaczenia parametrów niewyważenia. Siły \bar{B}_1 , \bar{B}_2 , \bar{B}_3 , \bar{B}_C i \bar{B}_D tworzą plan sił przedstawiony na rysunku 18a. Podobny proporcjonalny plan tworzą amplitudy A_1 , A_2 , A_3 , A_C i A_D (rys 18b).



Rys. 18. a) plan sił, b) plan amplitud

Stosując twierdzenie o przekątnych równoległoboku zapiszemy:

$$2A_D^2 + 2A_1^2 = A_2^2 + A_3^2 \quad (20)$$

a stąd mamy

$$A_D = \sqrt{\frac{A_2^2 + A_3^2 - 2A_1^2}{2}} \quad (21)$$

Amplituda A_D jest proporcjonalna do amplitudy siły wymuszającej B_D

$$A_D = KB_D \quad (22)$$

Stąd można wyznaczyć współczynnik proporcjonalności

$$K = \frac{A_D}{B_D} \quad (23)$$

Korzystając z wzorów (15) i (23) wyznaczono

$$B_1 = \frac{A_1}{K} = \frac{A_1}{A_D} B_D \quad (24)$$

Amplituda siły $B_1 = m_1 \theta^2 e$ wynika z niewyważenia, amplituda siły $B_D = m_P \theta^2 r_P$ wynika z dodatkowej masy próbnej. Zatem z wzoru (24) można wyznaczyć wartość niewyważenia:

$$m_1 \theta^2 e = \frac{A_1}{A_D} m_P \theta^2 r_P \quad (24)$$

$$m_1 e = \frac{A_1}{\sqrt{\frac{A_2^2 + A_3^2 - 2A_1^2}{2}}} m_P r_P \quad (25)$$

Z trójkąta EFG stosując wzór cosinusów wyznaczmy kąt α

$$A_2^2 = A_1^2 + A_D^2 - 2A_1 A_D \cos \alpha \rightarrow \alpha = \arccos \frac{A_3^2 - A_2^2}{4A_1 \sqrt{\frac{A_2^2 + A_3^2 - 2A_1^2}{2}}} \quad (26)$$

a następnie kąt φ określający położenie kątowe niewyważenia

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (27)$$

Powyższa teoria pozwala wyznaczyć wielkość niewyważenia oraz jego położenie kąto-
we. Znając te wielkości można w odpowiednim miejscu (po przeciwnej stronie do nie-
wyważenia) umieścić masę wyważającą m_W taką, że:

$$m_W = \frac{m_1 e}{r_W} = \frac{A_1}{\sqrt{\frac{A_2^2 + A_3^2 - 2A_1^2}{2}}} m_P \frac{r_P}{r_W} \quad (28)$$

gdzie r_W to promień, na którym umieszcza się masę wyważającą.

Praktyczne rozwiązania układów do wyważania wymagają układu, za pomocą którego można mierzyć położenie kątowe wału, aby było wiadomo, gdzie umieszcza się masy próbne oraz gdzie umieścić masę wyważającą.

Po wyważeniu układu w płaszczyźnie π_1 należy odwrócić wał i dokonać wyważenia w płaszczyźnie π_2 .

Omówione postępowanie można rozszerzyć na dowolną ilość niewyważonych mas, przy czym każde niewyważenie sztywnego wirnika może być usunięte przez umieszczenie masy wyważającej (ewentualnie odjęcie masy) w każdej z dwóch płaszczyzn wirnika.

7.5. Wyważenie odkształcalnych wirników

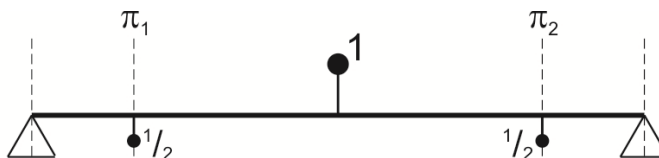
W poprzednich punktach omawialiśmy zagadnienia wyważania wirników sztywnych, tzn. takich, które nie odkształcają się. Założenie takie jest słuszne pod warunkiem, że prędkości kątowe wirnika są znacznie niższe od pierwszej prędkości krytycznej. Jeśli prędkość kątowa wirnika przekracza połowę pierwszej prędkości krytycznej wirnik odkształca się na tyle, że nie można już pomijać tego zjawiska. Oprócz sił odśrodkowych związanych z początkowym mimośrodem, pojawiają się nowe siły tego typu, związane z odkształceniami wału.

Aby to wykazać rozważmy sytuację przedstawioną na rys. 19, kiedy w środku symetrycznego wirnika umieszczamy niewyważenie, którego skutkiem jest jednostkowa siła odśrodkowa. Jeśli wirnik byłby sztywny, to w każdym z dwóch łożysk wystąpiłaby reakcja równa połowie tej siły. Jeśli jednak wirnik jest odkształcalny to jednostkowa siła bezwładności wywołuje ugięcie osi wirnika i przesunięcie jej z początkowego położenia. Na skutek tego obraca się wygięta linia środkowa i powstają dodatkowe siły odśrodkowe, które zmieniają wartości sił reakcji w łożyskach.

Wyważenie można przeprowadzić umieszczając masę wyważającą naprzeciwko niewyważenia początkowego, ale wygodniej jest umieścić masy wyważające w dwóch płaszczyznach w pobliżu końców wirnika. Załóżmy, że mamy do czynienia z wydłużonym wirnikiem o stałym przekroju, a płaszczyzny wyważania π_1 i π_2 są oddalone od końców wirnika o $1/6$ całkowitej długości wirnika.

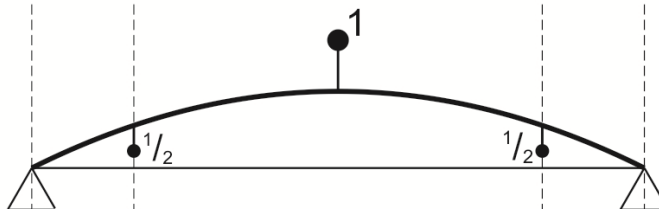
a)

prędkość znacznie
mniejsza od pierwszej
prędkości krytycznej



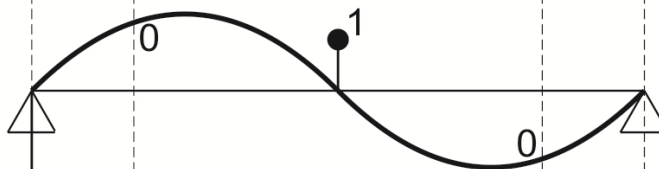
b)

pierwsza
prędkość
krytyczna



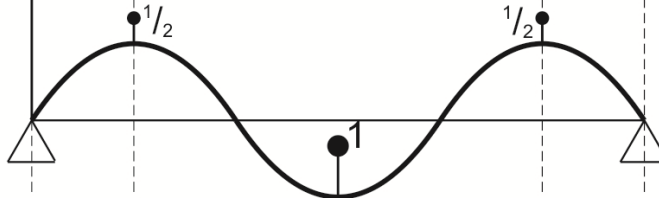
c)

druga
prędkość
krytyczna



d)

trzecia
prędkość
krytyczna



Rys. 19. Położenie mas wyważających zależnie od prędkości odkształcalnego wirnika

Sztywny wirnik (można go tak traktować jeśli prędkość kątowa jest znacznie niższa od pierwszej prędkości krytycznej) będzie wyważony, jeśli w każdej płaszczyźnie wyważenia umieścimy połowę jednostkowego wyważenia (rys. 19a)). Kiedy wirnik obraca się z prędkością równą pierwszej prędkości krytycznej (rys. 19b)) jego linia ugięcia ma kształt połowy sinusoidy (kształt nie zależy od początkowego niewyważenia) o amplitudzie tak dużej, że niewyważenie jest znacząco większe od początkowego niewyważenia jednostkowego. Istotne jest, że kształt linii ugięcia jest taki, że odkształcenia wirnika w płaszczyznach wyważenia są o połowę mniejsze niż w jego środku. Zatem wirnik będzie wyważony jeśli w płaszczyznach wyważenia będą umieszczone dodatkowe wyważenia, które dadzą w sumie wyważenie równe jednostkowemu. Uzasadnienie tego faktu jest następujące. Wirnik będący w rezonansie znajduje się w stanie równowagi obojętnej, czyli siły odśrodkowe równoważone są przez siły sprężystości wału. Jeżeli pojawi się przyrost ugięcia środka wału o δ pod wpływem niewyważenia, to praca wykonana przez niewyważenie będzie wynosić $\delta \cdot 1$. Natomiast praca wykonana przez każde z wyważen będzie wnosić $1/2 \delta \cdot 1$ i wirnik pozostanie w stanie równowagi obojętnej.

Przy drugiej prędkości krytycznej wirnik odkształca się w ten sposób, że niewyważenie pozostaje nieruchome. Zatem wyważanie nie jest potrzebne (rys. 19c). Z kolei przy trzeciej prędkości krytycznej (rys. 19d) wyważenia muszą być umieszczone po przeciwnej stronie w stosunku do wyważen stosowanych dla małych prędkości.

Na podstawie analizy tego przykładu dochodzimy do wniosku, że wyważenie odkształcalnego wirnika w dwóch płaszczyznach jest możliwe, ale tylko dla jednej prędkości. Przy każdej innej prędkości wirnik będzie ponownie niewyważony. Jednak w dużej liczbie przypadków takie wyważenie jest wystarczające, ponieważ w licznych zastosowaniach maszyny wirnikowe pracują ze stałymi prędkościami kątowymi.

W przypadku długich i elastycznych wirników stosuje się wyważanie w większej liczbie płaszczyzn, ze względu na to, iż wyważanie w dwóch płaszczyznach, choć teoretycznie możliwe, wymagałoby zastosowania niedopuszczalnie dużych mas.