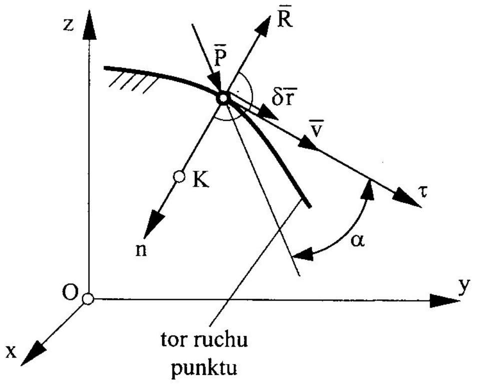
2. Zasada prac przygotowanych (wirtualnych)

2.1. Praca przygotowana

Dany jest punkt materialny poruszający się po określonym torze (rys. 1). Zgodnie z geometrią różniczkową określimy dla punktu oś τ styczną do toru w punkcie A oraz oś normalną n prostopadłą do τ w punkcie A. Na punkt materialny działa układ sił o wypadkowej $\overline{P}$:

$$\overline{P} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \tag{1}$$



Rys. 1

Wypadkowa $\overline{P}$ jest zorientowana w płaszczyźnie $n\tau$ pod kątem α do osi τ. Dodatkowo na punkt działa reakcja $\overline{R}$, której linia działania pokrywa się z osią n. Wektor prędkości liniowej leży na osi τ. Wektor $\overline{v}$ nazywamy też wektorem prędkości możliwej. Wprowadzamy wektor określony jako:

$$\delta\overline{r} = \lambda \cdot \overline{v} \tag{2}$$

gdzie: $\delta\overline{r}$ - tzw. wektor przesunięcia przygotowanego (albo wirtualnego),
$\overline{v}$ - tzw. wektor prędkości możliwej (prędkości zgodnej z więzami),
λ - współczynnik proporcjonalności, który przyjmujemy np. $\lambda = 1$.

Równanie (2) to tzw. wektor przesunięcia przygotowanego (możliwego), jest on proporcjonalny do wektora prędkości możliwej. Gdy ruch opisujemy w układzie xyz, to:

$$\delta\overline{r} = \delta x \cdot \overline{i} + \delta y \cdot \overline{j} + \delta z \cdot \overline{k} \tag{3}$$

Wyrażenie:

$$\delta L = \overline{P} \cdot \delta\overline{r} = P_x \cdot \delta x + P_y \cdot \delta y + P_z \cdot \delta z = P \cdot \delta r \cos\alpha \tag{4}$$

jest to tzw. praca przygotowana (lub praca wirtualna) wykonana przez siłę lub układ sił.

Załóżmy, że na układ narzucone są więzy idealnie gładkie (beztarciowe, wówczas reakcje więzów są tylko reakcjami normalnymi). Jeżeli punkt, na który działają siły, pozostaje w równowadze statycznej, to:

$$\overline{P} + \overline{R} = 0 \tag{5}$$

gdzie: $\overline{P}$ - wektor sił czynnych,
$\overline{R}$ - wektor sił reakcji.

Jeśli układ jest w stanie równowagi statycznej to praca wirtualna sił czynnych i reakcji takiego układu wynosi zero:

$$\delta L = \left(\overline{P} + \overline{R}\right)\delta\overline{r} = \overline{P}\cdot\delta\overline{r} + \overline{R}\cdot\delta\overline{r} = 0 \tag{6}$$

Reakcje więzów nie wykonują pracy, bo reakcje są tylko normalne, czyli:

$$\overline{R}\cdot\delta\overline{r} = 0 \tag{7}$$

Możemy więc zapisać, że:

$$\delta L = \overline{P}\cdot\delta\overline{r} = 0 \tag{8}$$

Zależność (8) jest to tzw. zasada prac przygotowanych (lub wirtualnych). Z równania tego wynika, że punkt będzie pozostawał w równowadze statycznej, jeżeli praca przygotowana wykonana przez wszystkie siły czynne działające na punkt będzie równa zeru! Opisując ruch w układzie xyz, równanie (8) zapiszemy jako:

$$\delta L = \overline{P}\cdot\delta\overline{r} = P_x\cdot\delta x + P_y\cdot\delta y + P_z\cdot\delta z = 0 \tag{9}$$

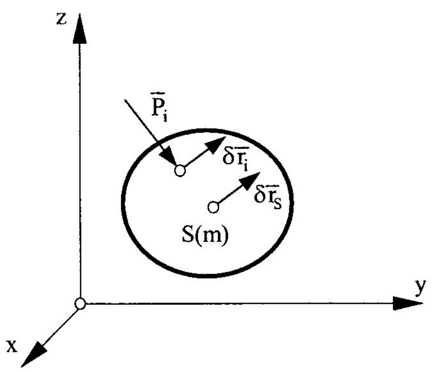
Jeżeli występuje układ sił działających na bryłę lub układ brył, to zasadę prac przygotowanych określimy wówczas jako:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n}\overline{P}_i\cdot\delta\overline{r}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(P_{ix}\cdot\delta x_i + P_{iy}\cdot\delta y_i + P_{iz}\cdot\delta z_i\right) = 0 \tag{10}$$

Wzór (10) jest to zasada prac przygotowanych dla złożonego układu sił. Równanie to pozwala na szukanie położenia równowagi statycznej dowolnego układu sił.

2.2. Praca przygotowana układu sił działających na bryłę w ruchu postępowym

W ruchu postępowym (rys. 2) mamy: $\delta\overline{r}_i = \delta\overline{r}_S$



Rys. 2

wówczas pracę przygotowaną w ruchu postępowym opisuje zależność:

$$\delta L = \overline{P} \cdot \delta\overline{r}_S = P_x \cdot \delta x_S + P_y \cdot \delta y_S + P_z \cdot \delta z_S = 0 \tag{11}$$

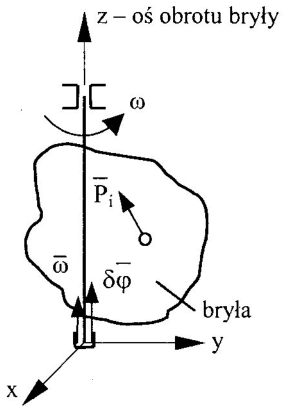
gdzie: $\overline{P} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i$ - wektor wypadkowy sił działających na bryłę,

$\delta \overline{r}_S = \lambda \cdot \overline{v}_S$ - wektor przesunięcia przygotowanego środka masy.

Równanie (11) określa równowagę statyczną układu sił działających na bryłę w ruchu postępowym.

2.3. Praca przygotowana układu sił działających na bryłę w ruchu obrotowym

Bryła pokazana na rys. 3 może się obracać dookoła osi z układu odniesienia.



Rys. 3

Pracę przygotowaną wykonaną przez układ sił działający na bryłę określimy więc następująco:

$$\delta L = M_z \cdot \delta\varphi = 0 \tag{12}$$

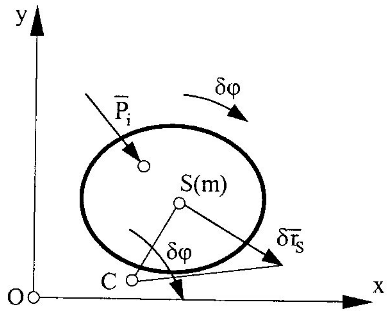
gdzie: $M_z = \sum_{i=1}^{n} M_z\left(\overline{P}_i\right)$ -moment względem osi z pochodzący od sił działających na bryłę,

$\delta\overline{\varphi} = \lambda \cdot \overline{\omega}$ - wektor obrotu wirtualnego (przygotowanego).

Równanie (12) jest to zasada prac przygotowanych dla układu sił działających na bryłę w ruchu obrotowym.

2.4. Praca przygotowana układu sił działających na bryłę w ruchu płaskim

W przypadku ruchu płaskiego (rys. 4) pracę wirtualną określimy jako sumę prac przygotowanych w ruchach postępowym i obrotowym, czyli:



Rys. 4

$$\delta L = \overline{P} \cdot \delta\overline{r}_S + M_S \cdot \delta\varphi = 0 \tag{13}$$

gdzie: $\overline{P} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i$ - wektor wypadkowy sił zewnętrznych działających na bryłę,

$M_S = \sum_{i=1}^{n} M_S\left(\overline{P}_i\right)$ - moment sił zewnętrznych określonych względem środka masy bryły.

Równanie (13) opisuje zasadę prac przygotowanych dla układu sił działających na bryłę w ruchu płaskim. Można również pracę przygotowaną sił w ruchu płaskim określić jako.

$$\delta L = M_C \cdot \delta\varphi = 0 \tag{14}$$

gdzie: $M_C = \sum_{i=1}^{n} M_C\left(\overline{P}_i\right)$ - moment ogólny układu sił określony względem chwilowego środka prędkości.

2.5. Praca przygotowana układu sił działających na układ brył (np. mechanizm)

Pracę przygotowaną układu sił działających na układ brył liczymy z zależności:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} \delta L_i = 0 \tag{15}$$

gdzie: δL - praca przygotowana wszystkich sił zewnętrznych działających na układ brył,

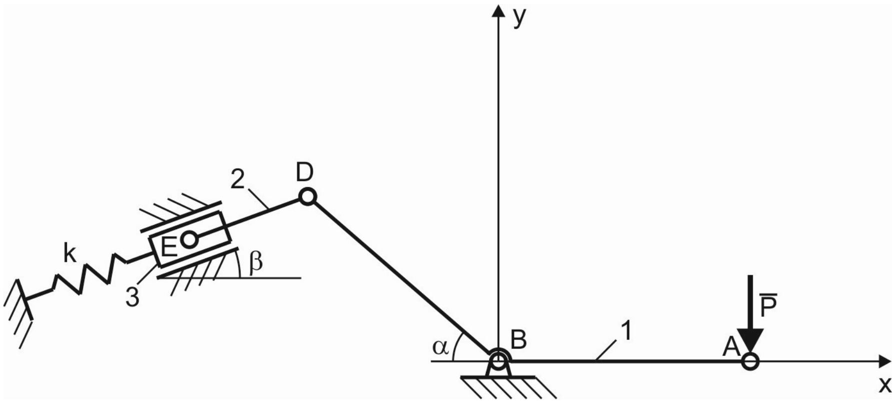
δL_i - praca przygotowana sił zewnętrznych działających na i-tą bryłę.

Uwaga!

Pracę przygotowaną siły określa się podobnie jak pracę elementarną siły, w pierwszym przypadku to praca siły na przesunięciu przygotowanym, w drugim przypadku to praca na przesunięciu elementarnym.

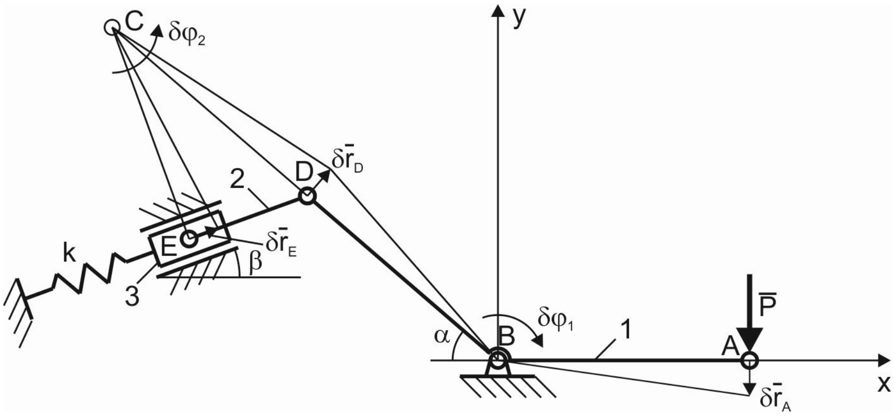
Przykład 1

Dla układu mechanicznego pokazanego na rysunku, wyznaczyć deformację sprężyny stosując zasadę prac przygotowanych. Znane są długości członów mechanizmu AB=BD=2DE=a [m], współczynnik sprężystości sprężyny k [N/m], wartość siły P [N] oraz kąty α [rad] oraz β [rad]. Ciężary członów oraz tarcie w parach kinematycznych należy pominąć. Układ pozostaje w równowadze statycznej.



Bryła 1 to układ prętów podpartych przegubowo w punkcie B. Bryła 3 to wodzik połączony z bryłą 1 przy pomocy łącznika 2. Tak skonstruowany mechanizm jest układem o jednym stopniu swobody, tzn. że więzy narzucone na poszczególne człony umożliwiają wykonywanie ruchu. Ze względu na narzucone więzy, poszczególne bryły mogą wykonywać następujące ruchy: bryła 1 – ruch obrotowy wokół osi obrotu przechodzącej przez punkt B, bryła 2 – ruch płaski, który może być widziany jako ruch obrotowy wokół chwilowego środka obrotu, czyli punktu C, człon 3 – ruch postępowy. Wiadomo jednak, że mechanizm pozostaje w równowadze statycznej, zatem ruchy nie wystąpią. O równowadze statycznej układu mechanicznego decyduje równowaga układu sił działających na mechanizm.

Określimy przemieszczenia możliwe do wykonania ze względu na narzucone więzy, czyli tzw. przemieszczenia przygotowane (wirtualne) poszczególnych brył, które wynikają z rozkładu prędkości liniowych odpowiednich punktów i prędkości kątowych odpowiednich brył.



Zakładamy, że $\delta\varphi_1$ – przemieszczenie wirtualny bryły 1 – jest znane. Rozpatrując przemieszczenie przygotowane punktu D, który jest punktem wspólnym brył 1 i 2, zapiszemy

$$\begin{aligned}\delta\overline{r}_D^{(1)} &= \delta\overline{r}_D^{(2)} \\ \delta r_D^{(1)} &= \delta r_D^{(2)}\end{aligned} \tag{p1.1}$$

co oznacza, że przemieszczenie przygotowane punktu D jest takie samo, niezależnie od tego, czy punkt D przypisze się bryle pierwszej, czy drugiej. Przemieszczenie przygotowane punktu D, jeśli przypisze się go do bryły 1, będzie określone jako:

$$\delta r_D^{(1)} = BD \cdot \delta\varphi_1 = a \cdot \delta\varphi_1 \tag{p1.2}$$

a jeśli do bryły 2, to

$$\delta r_D^{(2)} = CD \cdot \delta\varphi_2 \tag{p1.3}$$

Odległość CD określimy z Δ CDE. Kąt wierzchołkowy CDE to $\alpha + \beta$, zatem

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{DE}{CD} \Rightarrow CD = \frac{DE}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{a}{2\cdot\cos(\alpha+\beta)} \tag{p1.4}$$

Z powyższych wzorów wynika, że przemieszczenie przygotowane bryły 2 to

$$\delta\varphi_2 = 2 \cdot \cos(\alpha+\beta) \cdot \delta\varphi_1 \qquad \text{(p1.5)}$$

Przemieszczenie przygotowane bryły 3 określimy jako

$$\delta r_E = CE \cdot \delta\varphi_2 \qquad \text{(p1.6)}$$

natomiast odległość CE określimy z Δ CDE:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{CE}{DE} \Rightarrow CE = DE \cdot \mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{a}{2} \cdot \mathrm{tg}(\alpha+\beta) \qquad \text{(p1.7)}$$

Ostatecznie, uwzględniając wzory (p1.5-p1.7) otrzymamy

$$\delta r_E = a \cdot \sin(\alpha+\beta) \cdot \delta\varphi_1 \qquad \text{(p1.8)}$$

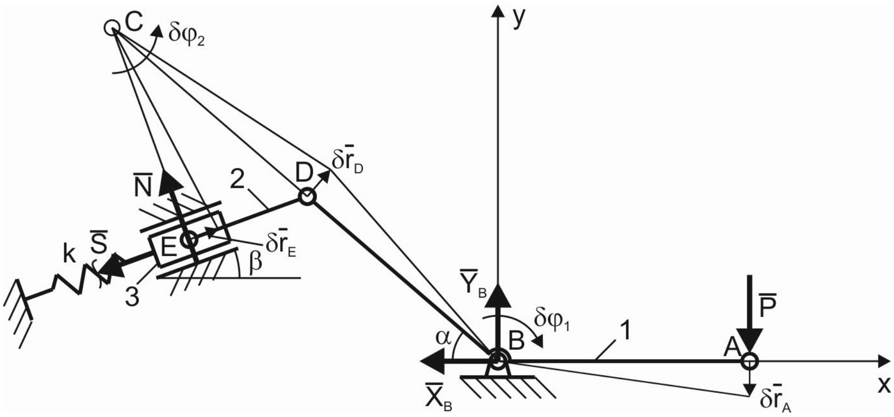
O równowadze statycznej mechanizmu decyduje równowaga działającego układu sił. Wprowadźmy na rysunek, zgodnie z zasadami mechaniki, wszystkie siły zewnętrzne działające na układ mechaniczny. Są to:

$\overline{P}$ - znana siła czynna,

$\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$ - siły reakcji podpory w punkcie B,

$\overline{N}$ - siła reakcji prowadnic na wodzik,

$\overline{S}$ - siła reakcji sprężyny, przyjmując liniową charakterystykę sprężyny, jej wartość określa się jako $S = k\Delta$, gdzie Δ [m] to deformacja sprężyny.



Jeżeli układ pozostaje w równowadze statycznej, to praca przygotowana sił zewnętrznych będzie określona jako

$$\delta L = \delta L_1 + \delta L_2 + \delta L_3 = 0 \tag{p1.9}$$

Ponieważ bryła pierwsza może być w ruchu obrotowym, to

$$\delta L_1 = M_B \cdot \delta\varphi_1 = P \cdot a \cdot \delta\varphi_1 \tag{p1.10}$$

W przypadku bryły drugiej ruch płaski można widzieć jako złożenie ruchu postępowego środka masy człony i obrotowego wokół środka masy, lub jako ruch obrotowy wokół chwilowego środka obrotu C. To drugie podejście jest zwykle wygodniejsze, zatem

$$\delta L_2 = M_C \cdot \delta\varphi_2 = 0 \tag{p1.11}$$

Bryła trzecia może być w ruchu postępowym, więc

$$\begin{aligned}\delta L_3 &= \overline{P}_3 \cdot \delta\overline{r}_E = \left(\overline{N}+\overline{S}\right)\cdot\delta\overline{r}_E = N\delta r_E \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + S\delta r_E\cos\left(\pi\right) = -S\delta r_E = \\ &= -k\cdot\Delta\cdot a\cdot\sin\left(\alpha+\beta\right)\cdot\delta\varphi_1\end{aligned} \tag{p1.12}$$

Dla całego układu będziemy więc mieli

$$\delta L = \left[P\cdot a - k\cdot\Delta\cdot a\cdot\sin\left(\alpha+\beta\right)\right]\cdot\delta\varphi_1 = 0 \tag{p1.13}$$

Równanie to musi być spełnione dla każdej wartości $\delta\varphi_1 \neq 0$, czyli

$$P\cdot a - k\cdot\Delta\cdot a\cdot\sin\left(\alpha+\beta\right) = 0 \tag{p1.14}$$

Stąd wartość szukanej deformacji sprężyny wynosi

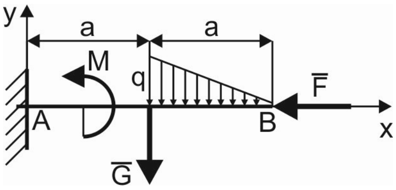
$$\Delta = \frac{P}{k \cdot \sin\left(\alpha + \beta\right)} \qquad \text{(p1.15)}$$

Uwaga!

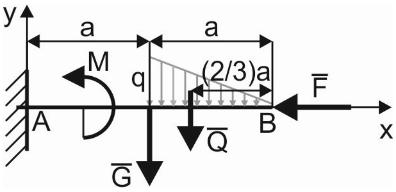
Zasadę prac przygotowanych można również stosować w układach, gdzie szukamy sił reakcji. Siły te wprowadzamy do układu jako siły czynne tak, jak pokazano w zamieszczonych poniżej przykładach.

Przykład 2

Określić siły reakcji więzów belki wspornikowej przedstawionej na poniższym rysunku. Belka jest obciążona parą sił o momencie M, siłą ciężkości $\overline{G}$, siłą poziomą $\overline{F}$ oraz obciążeniem ciągłym.



Najpierw obciążenie rozłożone zastępujemy siłą skupioną $\overline{Q}$ o wartości pola obciążenia czyli Q = qa/2 i o linii działania leżącej w odległości (2/3)a od końca belki (p. B).



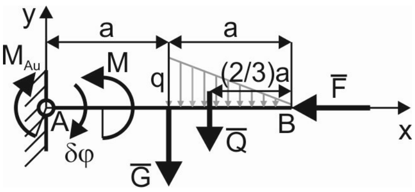
Następnie szukamy kolejno reakcji w utwierdzeniu (p. A). Są to:

$\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ - siły reakcji w punkcie A,

M_{Au} - moment utwierdzenia w punkcie A.

Aby wyznaczyć te reakcje, należy kolejno wprowadzać je (**pojedynczo!**) jako siły/momenty czynne do układu i jednocześnie tak zmieniać więzy w punkcie A, aby był możliwy ruch na kierunku, na którym działa siła/moment reakcji. Tzn. z nieruchomej konstrukcji należy każdorazowo zrobić mechanizm o jednym stopniu swobody. Ilustrują to poniższe rysunki.

Najpierw szukamy np. momentu utwierdzenia w punkcie A. W punkcie A wprowadzono więzy typu przegub płaski i zaczepiono tam szukany moment utwierdzenia M_{Au} jako moment czynny. Wprowadzono również przemieszczenie przygotowane bryły $\delta\varphi$, którego zwrot można przyjąć dowolnie.



Bryła może wykonywać ruch obrotowy względem punktu A. Praca wirtualna sił czynnych:

$$\delta L = M_A \cdot \delta\varphi = \left(M_{Au} - M + G \cdot a + Q \cdot \frac{4}{3} a \right) \cdot \delta\varphi = 0 \qquad \text{(p2.1)}$$

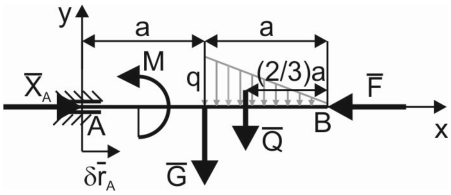
Ponieważ $\delta\varphi \neq 0$, to

$$M_{Au} - M + G \cdot a + Q \cdot \frac{4}{3} a = 0 \qquad \text{(p2.2)}$$

Z uwzględnieniem wartości siły skupionej Q, moment utwierdzenia wynosi

$$M_{Au} = M - G \cdot a - \frac{2}{3} \cdot q \cdot a^2 \qquad \text{(p2.3)}$$

Jeżeli szukamy składowej $\overline{X}_A$ reakcji w punkcie A, wprowadzamy więzy tak, aby było możliwe przesunięcie bryły na kierunku osi x (więzy typu tzw. przegub pryzmatyczny). W punkcie A zaczepiono szukaną składową $\overline{X}_A$ jako siłę czynną i wprowadzono wektor przemieszczenia przygotowanego $\delta\overline{r}_A$, którego zwrot można przyjąć dowolnie.



Bryła może wykonywać ruchu postępowy, więc praca wirtualna sił czynnych to:

$$\delta L = \overline{P}\cdot\delta\overline{r}_A = \left(\overline{X}_A + \overline{G} + \overline{Q} + \overline{F}\right)\cdot\delta\overline{r}_A = \left(X_A - F\right)\cdot\delta r_A = 0 \qquad \text{(p2.4)}$$

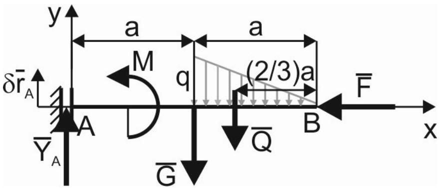
Ponieważ $\delta r_A \neq 0$, to

$$X_A - F = 0 \qquad \text{(p2.5)}$$

więc wartość szukanej składowe siły reakcji to

$$X_A = F \qquad \text{(p2.6)}$$

Jeżeli szukamy składowej $\overline{Y}_A$ reakcji w punkcie A, postępujemy podobnie jak w poprzednim przypadku. Wprowadzamy więzy tak, aby było możliwe przesunięcie bryły na kierunku osi y (więzy typu tzw. przegub pryzmatyczny). W punkcie A zaczepiono szukaną składową $\overline{Y}_A$ jako siłę czynną i wprowadzono wektor przemieszczenia przygotowanego $\delta\overline{r}_A$, którego zwrot można przyjąć dowolnie.



Bryła może wykonywać ruchu postępowy, więc praca wirtualna sił czynnych to:

$$\delta L = \overline{P} \cdot \delta\overline{r}_A = \left(\overline{Y}_A + \overline{G} + \overline{Q} + \overline{F}\right) \cdot \delta\overline{r}_A = \left(Y_A - G - Q\right) \cdot \delta r_A = 0 \qquad \text{(p2.7)}$$

Ponieważ $\delta r_A \neq 0$, to

$$Y_A - G - Q = 0 \qquad \text{(p2.8)}$$

Z uwzględnieniem wartości siły skupionej Q, wartość szukanej składowe siły reakcji to

$$Y_A = G + \frac{q \cdot a}{2} \qquad \text{(p2.9)}$$