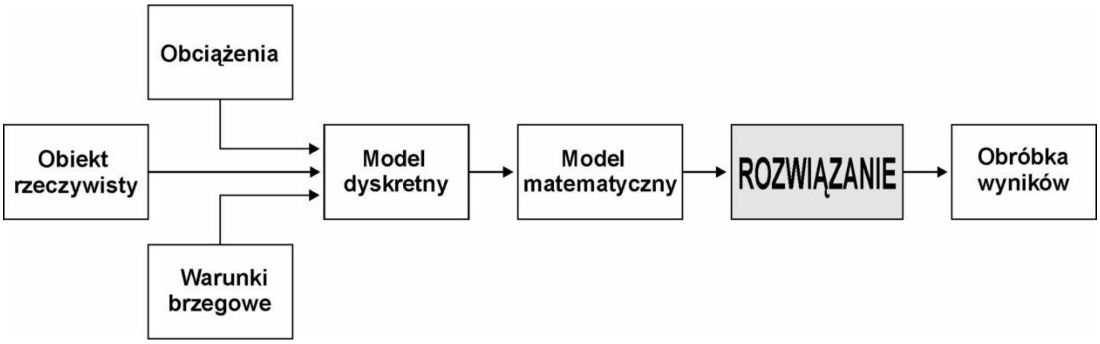
11. Zarys teorii MES w ujęciu nieliniowym.

Zdecydowana większość współczesnych problemów obliczeniowych dotyczących projektowania ustrojów nośnych opiera się na relacjach liniowych, odnoszących się zarówno do charakterystyk fizycznych materiału jak i związków geometrycznych pomiędzy przemieszczeniami i odkształceniami.
Istotę analizy strukturalnej projektowanego ustroju nośnego w ujęciu MES opierającą się na kilku podstawowych etapach, można zilustrować w formie schematu blokowego:



W odniesieniu do zagadnień liniowych, etap ROZWIĄZANIE sprowadza się do wyznaczenia macierzy będącej zbiorem parametrów geometrycznych opisujących stan deformacji ustroju wywołany obciążeniem:

$$\mathbf{g} = \mathbf{K}^{-1}\,\mathbf{f}\,, \tag{165}$$

gdzie f jest zbiorem parametrów statycznych, K - macierzą sztywności układu zawierającą stałe parametry lub wyrażenia określane na podstawie liniowego związku konstytutywnego.
Zasadniczo różną kategorię problemów stanowią zagadnienia uwzględniające odwzorowania wszelkiego typu nieliniowości. Z punktu widzenia formalnego rozwiązanie problemu nieliniowego składa się z podobnych etapów, jak w przypadku analizy liniowej. Zasadnicza różnica pomiędzy obydwoma kategoriami problemów zawarta jest w etapie ROZWIĄZANIE.
Z punktu widzenia formalnego problem nieliniowy można najprościej przedstawić w formie równania:

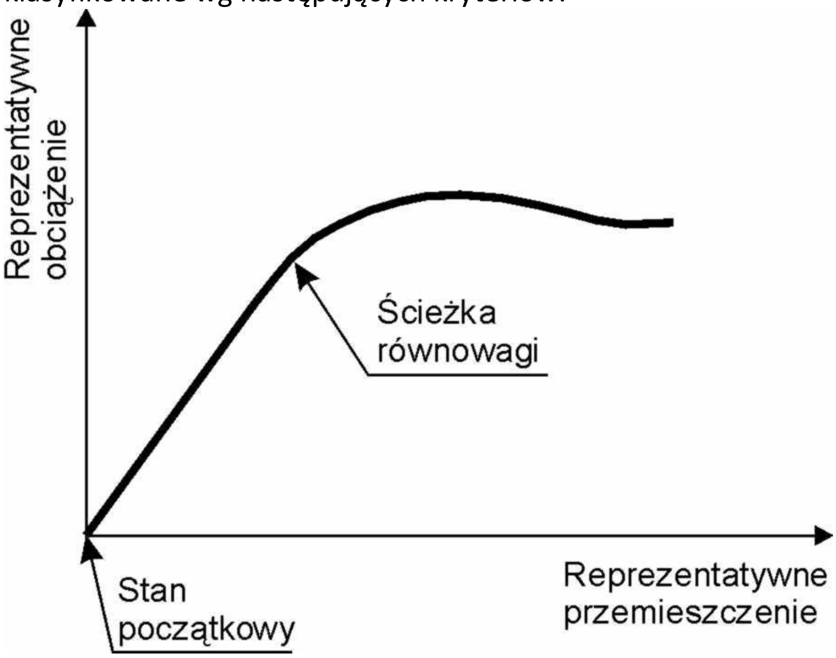
$$\mathbf{g} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{g})\,\mathbf{f}\,. \tag{166}$$

Sztywność struktury reprezentowana przez macierz **K** zależna jest od zbioru parametrów geometrycznych określających jej aktualny stan deformacji oraz szeregu innych czynników, np. nieliniowego związku konstytutywnego.
Rozwiązywanie problemu nieliniowego metodami bezpośrednimi nie jest możliwe, z uwagi na niemożność przewidywania czynników określających bieżącą, zależną od stanu deformacji, sztywność układu.
Zasadniczą ideą, na której oparte są dyskretne metody analizy układów nieliniowych, jest etapowość w dochodzeniu do rozwiązania bazowana na koncepcji wyznaczania ścieżki równowagi układu.

Sztywność struktury reprezentowana przez macierz **K** zależna jest od zbioru parametrów geometrycznych określających jej aktualny stan deformacji oraz szeregu innych czynników, np. nieliniowego związku konstytutywnego.
Rozwiązywanie problemu nieliniowego metodami bezpośrednimi nie jest możliwe, z uwagi na niemożność przewidywania czynników określających bieżącą, zależną od stanu deformacji, sztywność układu.
Zasadniczą ideą, na której oparte są dyskretne metody analizy układów nieliniowych, jest etapowość w dochodzeniu do rozwiązania bazowana na koncepcji wyznaczania ścieżki równowagi układu.

12. Ścieżka równowagi układu.

W ogólnym przypadku ścieżka równowagi jest zależnością pomiędzy parametrami statycznymi odpowiadającymi obciążeniu struktury, a parametrami geometrycznymi związanymi z przemieszczeniami poszczególnych jej punktów. Rzeczywista ścieżka równowagi może być interpretowana jako hiperpowierzchnia przebiegająca w przestrzeni wielowymiarowej, której liczba wymiarów odpowiada liczbie stopni swobody układu. Punkty hiperprzestrzeni należące do ścieżki równowagi odpowiadają konfiguracjom struktury, dla których zachowana jest równowaga statyczna układu. W przypadku układu o wielu stopniach swobody przedstawienie graficznej interpretacji tego rodzaju zależności nie jest możliwe, toteż z reguły tworzy się zależności zastępcze, najczęściej pomiędzy dwoma parametrami reprezentatywnymi, należącymi do dwóch, spośród wymienionych grup.
Chwilowa konfiguracja określona zbiorem przemieszczeń punktów struktury będąca odpowiedzią na aktualne obciążenie, odpowiadająca aktualnemu położeniu równowagi, nazywana jest stanem układu a wspomniany zbiór jest zbiorem parametrów stanu. Zatem punkt stanowiący początek układu odniesienia odpowiada stanowi początkowemu układu.
Kształt ścieżki równowagi może charakteryzować się rozmaitymi zakłóceniami, którym odpowiadają punkty charakterystyczne (Ang.: special equilibrium points). Punkty te bywają klasyfikowane wg następujących kryteriów:

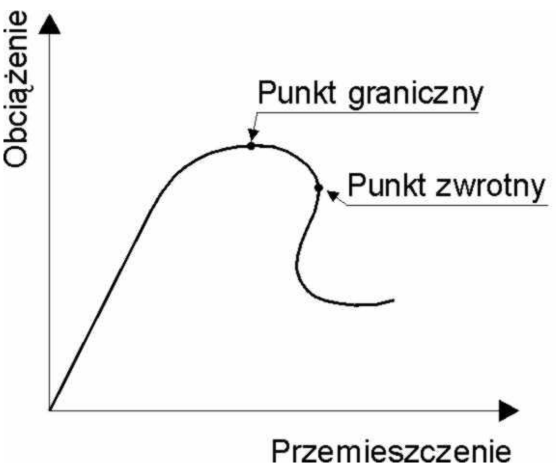


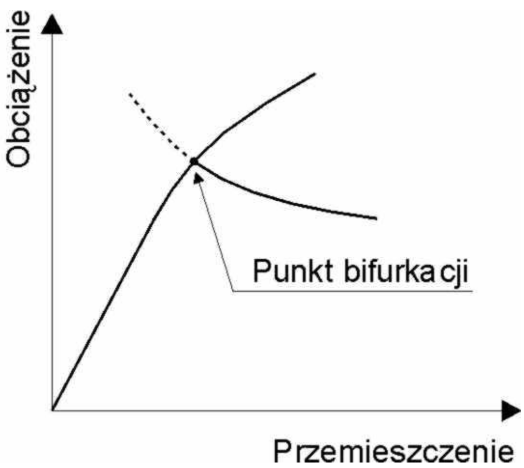
- ***punkty graniczne (*Ang.*: limit points)***: - w których styczna do ścieżki równowagi posiada zerowy kąt nachylenia do osi odpowiadającej parametrom stanu (przemieszczeniom),

- ***punkty bifurkacji (*Ang.*: bifurcation points)***:- łączenia się lub przecięcia dwu lub więcej ścieżek równowagi,

- ***punkty zwrotne (*Ang.*: turning points)***: - w których styczna do ścieżki równowagi posiada zerowy kąt nachylenia do osi odpowiadającej obciążeniom,

- ***punkty zniszczenia (*Ang.*: failure points)***: - w których ścieżka równowagi „urywa się" wskutek fizycznego zniszczenia struktury. Zjawisko to może posiadać charakter lokalny lub globalny. W przypadku uszkodzeń lokalnych, punkty zniszczenia odpowiadają dynamicznym przeskokom pomiędzy ścieżkami równowagi.





13. Rodzaje nieliniowości.

Nieliniowa relacja pomiędzy parametrem obciążenia konstrukcji a wektorem przemieszczeń określającym jej stan może posiadać wielorakie przyczyny. Z punktu widzenia analizy strukturalnej, wyróżnić można następujące zasadnicze źródła nieliniowości:

- Nieliniowość fizyczna (Ang.: physical nonlinearity) – wynikająca z nieliniowego związku konstytutywnego, opisującego właściwości fizyczne materiału. W tym przypadku właściwości materiału zależą od aktualnego stanu deformacji układu zmieniającego się w miarę wzrostu obciążenia. Związek ten można przedstawić w formie:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \tag{167}$$

gdzie **F(ε)** jest funkcją, zależną od stanu deformacji układu.
Nieliniowość fizyczna bywa często określana mianem nieliniowości materiałowej (Ang.: material nonlinearity).

- Nieliniowość geometryczna (Ang: geometric nonlinearity) – wynikająca z nieliniowości związku pomiędzy przemieszczeniami punktów struktury a jej odkształceniami. Związek ten uwzględniany jest w formie równań kinematycznych, wiążących wspomniane wielkości:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} \qquad (167)$$

gdzie **D** jest nieliniowym operatorem odwzorowującym złożony charakter deformacji, u jest wektorem stanu zawierającym składowe przemieszczeń punktów struktury. Za pomocą nieliniowego operatora D można sformułować związek, wyrażający układ równań równowagi wewnętrznej:

$$\mathbf{b} = -\, \mathbf{D}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \qquad (168)$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma}$ zawiera składowe stanu naprężenia, **b** jest macierzą sił zewnętrznych.
Uwzględnianie nieliniowości geometrycznych zachodzi w przypadkach analizy zaawansowanych stanów deformacji rozpatrywanego ustroju.

- Nieliniowość obciążenia (Ang.: force nonlinearity) – wynikająca z uzależnienia wielkości i rozkładu obciążenia konstrukcji od aktualnego stanu deformacji układu. Jest to jednoznaczne z założeniem, iż siły zewnętrzne są funkcją przemieszczeń:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{u}) \qquad (169)$$

Przykład praktycznej aplikacji tego rodzaju nieliniowości mogą stanowić siły aerodynamiczne działające na odkształcalny statek powietrzny.

- Nieliniowość więzów (Ang.: displacement boundary conditions nonlinearity) – wynikająca ze zmian warunków brzegowych w miarę wzrostu odkształcenia konstrukcji. Przykład mogą stanowić tutaj zagadnienia kontaktowe, w których następują znaczące zmiany powierzchni kontaktu w warunkach wzrastającego obciążenia.