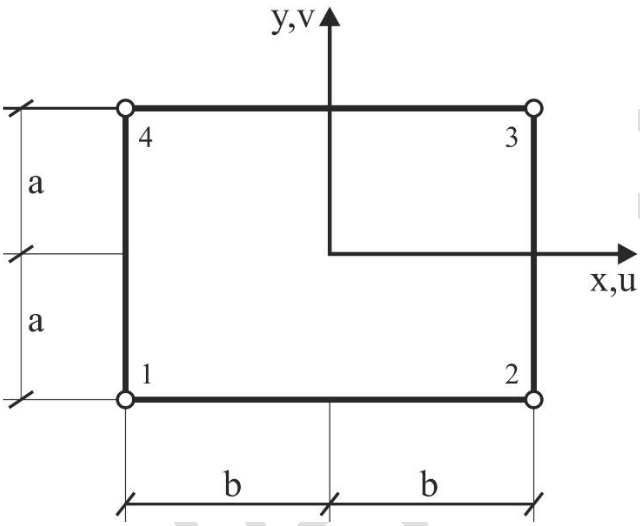
10. Element izoparametryczny.

Koncepcja elementu izoparametrycznego zrodziła się w związku z trudnościami pojawiającymi się w przypadku analizy obszarów o konturach zakrzywionych. Uzyskanie dostatecznie dokładnych wyników przy użyciu elementów ograniczonych liniami prostymi lub płaszczyznami wiąże się z koniecznością stosowania znacznej liczby tych elementów.
Z kolei stworzenie elementu o konturze zakrzywionym wiąże się z trudnościami w opisie pola przemieszczeń i określaniu macierzy sztywności.
Omawiana koncepcja polega na odwzorowaniu elementu o skomplikowanym kształcie przez element prostszy. Obliczenia przeprowadzane są zatem na elemencie prostszym, tzw. *elemencie rodzimym*, a wyniki przenoszone są na element bardziej skomplikowany.
Pojęcie elementu izoparametrycznego wiąże się z opisem kształtu geometrycznego oraz opisem pola przemieszczeń. Jeżeli geometria i przemieszczenia danego elementu opisane są tymi samymi wielomianami, a zatem za pomocą tej samej liczby parametrów, wówczas element nazywamy izoparametrycznym.
Istotę koncepcji prześledzić można rozważając prostokątny element tarczowy, o założonej liniowej zmienności przemieszczeń:



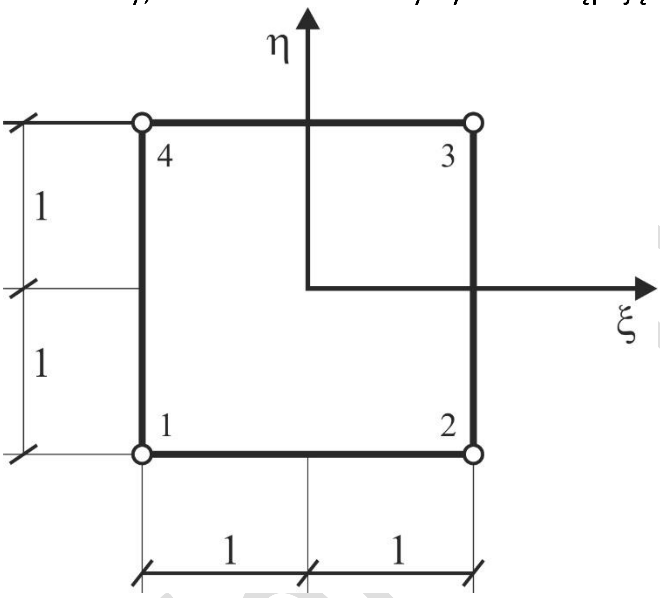
Jest to element opisany ośmioma parametrami. Geometrię opisują dwie współrzędne w każdym z węzłów, natomiast przemieszczenia – dwie składowe przemieszczeń węzłów.
Pole przemieszczeń opisane jest równaniem:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \tag{157}$$

Występujące we wzorze (157) funkcje kształtu otrzymane np. przez *interpolację Lagrange'a* mają postać:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{(b-x)(a-y)}{4ab} \\ N_2 &= \frac{(b+x)(a-y)}{4ab} \\ N_3 &= \frac{(b+x)(a+y)}{4ab} \\ N_4 &= \frac{(b-x)(a+y)}{4ab} \end{aligned}\right\} \qquad (158)$$

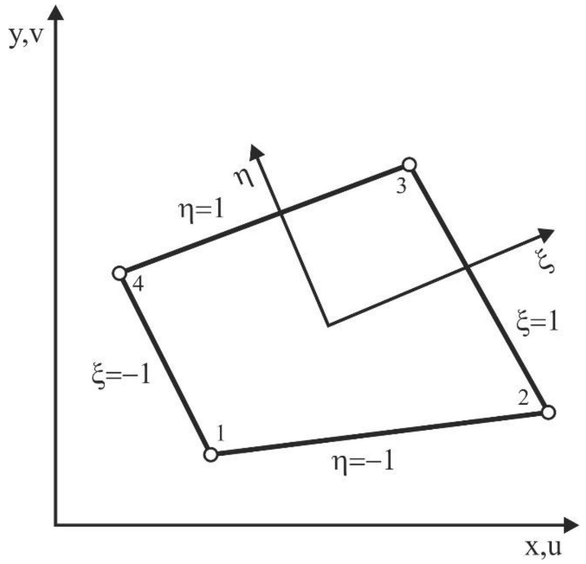
Zakładamy, że element macierzysty ma następującą postać:



Funkcje kształtu (158) dla powyższego kwadratu wyrażają się następująco:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \\ N_2 &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\ N_3 &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \\ N_4 &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \end{aligned}\right\} \qquad (159)$$

Rozpatrzmy z kolei dowolny prostokąt i określmy jego związek z przedstawionym powyżej elementem macierzystym:



Boki czworokąta są liniami prostymi, a zatem współrzędne x, y są liniowo zależne od ξ, η.
Określamy współrzędną x:

$$x(\xi, \eta) = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta = \boldsymbol{ua} \tag{160}$$

gdzie:

$$\boldsymbol{u} = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta] \quad , \quad \boldsymbol{a} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4]$$

Niewiadome parametry a_i wyznaczamy z układu równań:

Węzeł 1: $\xi_1 = -1,\ \eta_1 = -1 \quad \rightarrow \quad x_1 = a_1 - a_2 - a_3 + a_4$

Węzeł 2: $\xi_2 = 1,\ \eta_2 = -1 \quad \rightarrow \quad x_2 = a_1 + a_2 - a_3 + a_4$

Węzeł 3: $\xi_3 = 1,\ \eta_3 = 1 \quad \rightarrow \quad x_3 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

Węzeł 4: $\xi_4 = -1,\ \eta_4 = 1 \quad \rightarrow \quad x_1 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4$

Który zapisać można w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \tag{161}$$

Lub krótko:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{a} \tag{162}$$

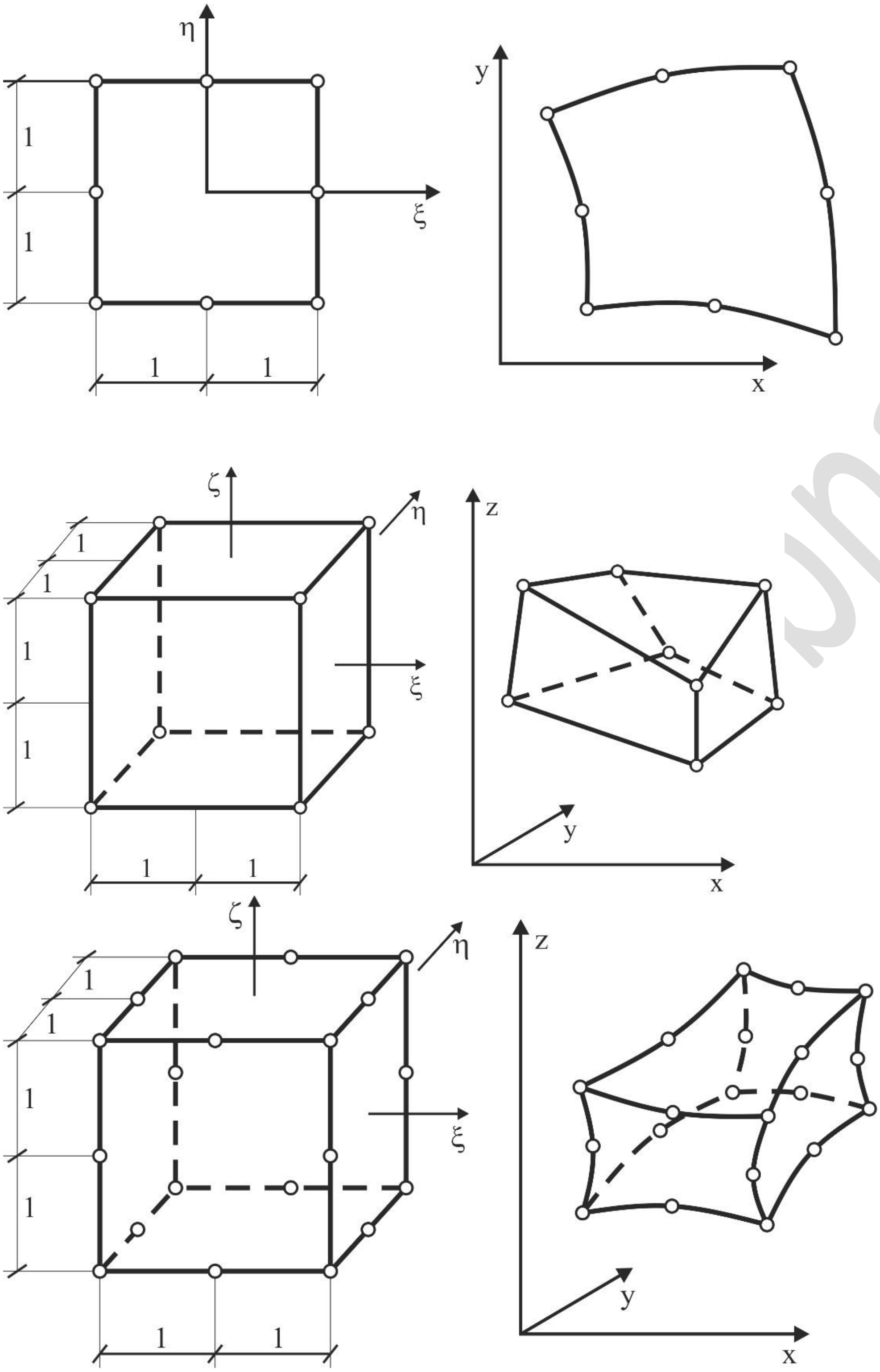
Po rozwiązaniu powyższego równania ze względu na $\boldsymbol{a}$ i wstawieniu do (160):

$$x(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{163}$$

Stwierdzamy, że wystąpiły tutaj funkcje N_i określone równaniami (159).
Przeprowadzając ten sam sposób postępowania w odniesieniu do parametru $y(\xi,\eta)$ oraz łącząc wyniki otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} x(\xi,\eta) \\ y(\xi,\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} \tag{164}$$

Widać zatem, że funkcje $N_i$przekształcają kwadrat w układzie ξ,η w dowolny czworokąt w układzie x,y.
Porównanie wyrażeń (157) i (164) wskazuje, że pole przemieszczeń i geometria opisane są tymi samymi funkcjami i taką samą liczbą parametrów. Zatem przedstawiony powyżej kwadrat jest elementem macierzystym dla izoparametrycznego elementu w postaci dowolnego czworokąta.
W sposób analogiczny można określić związki pomiędzy elementami o większej liczbie parametrów.
Na rysunku poniżej pokazano przykładowe elementy macierzyste oraz ich odpowiedniki izoparametryczne.



η
ξ
1
1
1
1
y
x
ζ
η
ξ
1
1
1
1
1
1
z
y
x
ζ
η
ξ
1
1
1
1
1
1
z
y
x