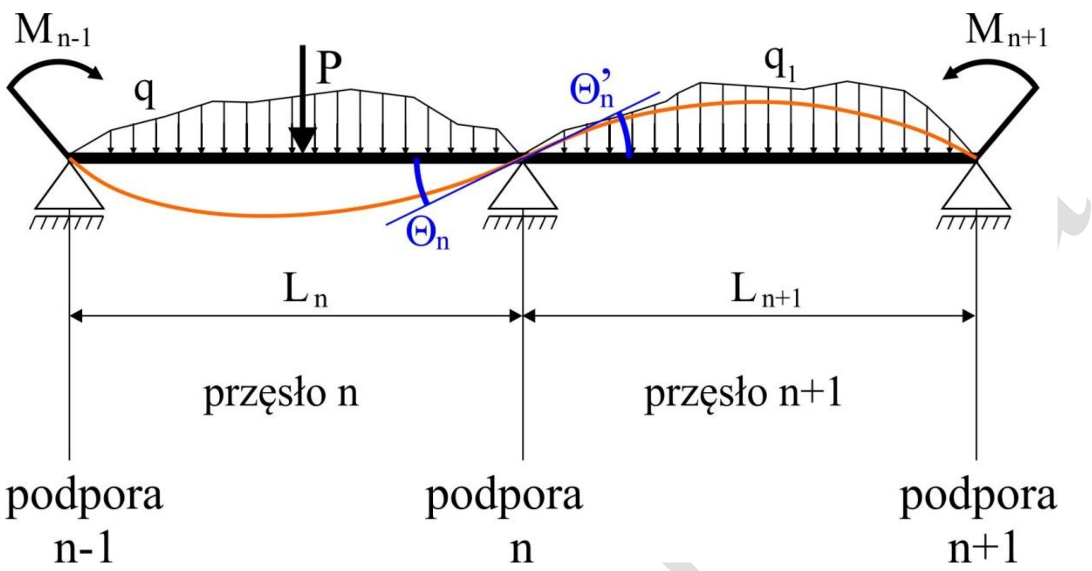
4) Równanie trzech momentów.

Rozpatrujemy dwa sąsiadujące z sobą przęsła belki wieloprzęsłowej, zawierające podporę numer **n**.



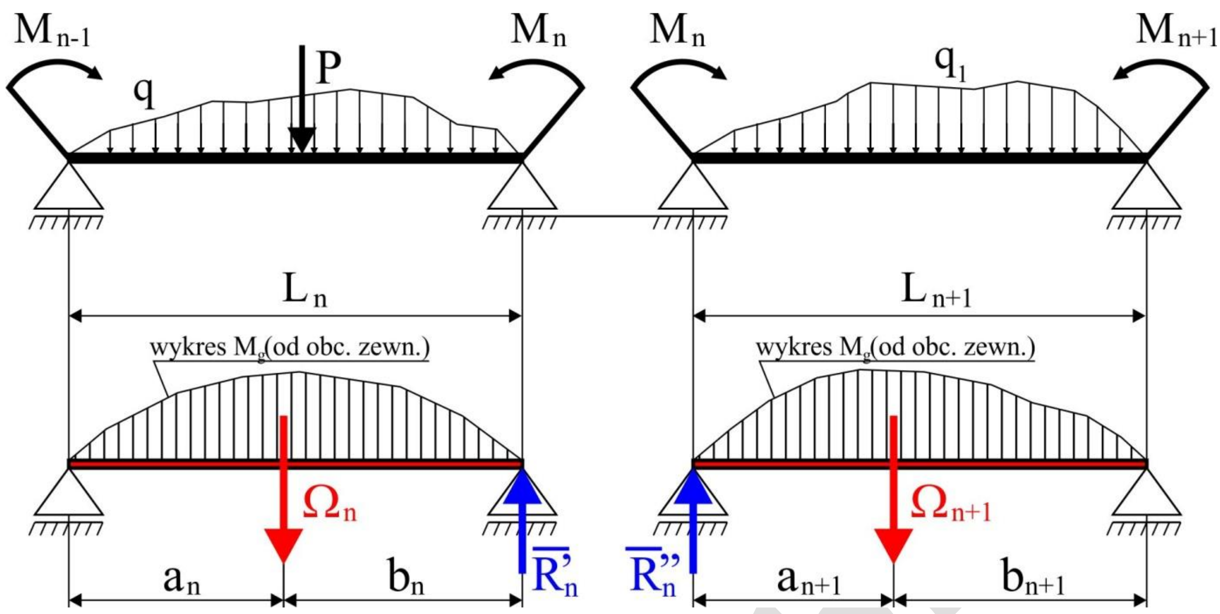
Zakładamy, że powyższy układ jest fragmentem większej całości, stąd też w skrajnych podporach występują momenty $\mathbf{M_{n-1}}$ i $\mathbf{M_{n+1}}$ będące efektem oddziaływania kolejnych przęseł.

Z warunku ciągłości linii ugięcia belki wynika równość kątów Θ_n i Θ_n':

Mamy zatem:

$$\Theta_n = -\Theta_n' \qquad (a)$$

Dokonujemy myślowego przecięcia belki, wyodrębniając poszczególne układy podporowe. Efektem wzajemnego oddziaływania przęseł jest moment $\mathbf{M_n}$ występujący w przekroju nad podporą **n**.



Po wprowadzeniu zastępczych momentów podporowych, każde z przęseł można traktować jako samodzielną belkę, podpartą na końcach, obciążoną działającym na każde przęsło obciążeniem zewnętrznym oraz momentami podporowymi, przyłożonymi do końców tego przęsła.

Przęsło n jest zatem obciążone siłą P, obciążeniem ciągłym q oraz momentami podporowymi M_{n-1}, M_n. Kąt Θ_n ugięcia prawego końca przęsła obliczamy stosując zasadę superpozycji, obliczając najpierw kąt Θ_{n1} wynikający z działania obciążeń zewnętrznych przyłożonych do przęsła, a następnie kąt Θ_{n2} wynikający z działania momentów podporowych.

Otrzymujemy zatem związek:

$$\Theta_n = \Theta_{n1} + \Theta_{n2} \qquad (b)$$

Kąt Θ_{n1} można obliczyć metodą analityczno-wykreślną. Sporządzamy wykres momentów gnących dla przęsła n, traktując go jako obciążenie ciągłe belki fikcyjnej.

Zgodnie z zasadami metody, kąt Θ_{n1} wynosi:

$$\Theta_{n1} = \frac{\overline{T}_n}{EJ_z} \quad ; \ \overline{T}_n - siła\ tnąca\ fikcyjna\ w\ przekroju\ nad\ podporą\ \boldsymbol{n}$$

Ponieważ $\overline{T}_n = \overline{R}_n{}'$, zatem:

$$\Theta_{n1} = \frac{\overline{R}_n{}'}{EJ_z} \qquad (c)$$

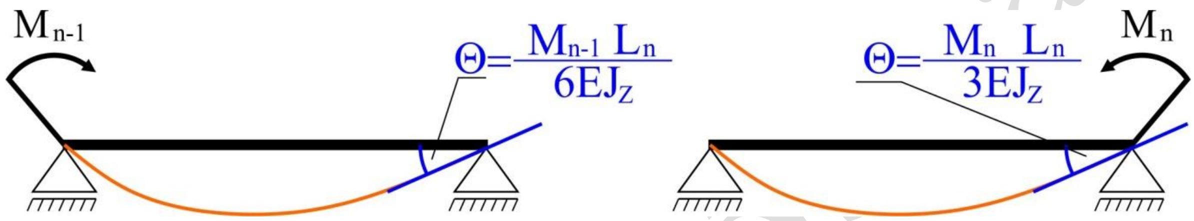
Reakcję R_n’ wyznaczamy z równania sumy momentów względem punktu nad podporą **n-1**:

$$\Omega_n \cdot a_n = \overline{R}_n' \cdot L_n$$

$$\overline{R}_n' = \frac{\Omega_n \cdot a_n}{L_n} \qquad (d)$$

$$\Theta_{n1} = \frac{\Omega_\mathrm{n} \cdot \mathrm{a_n}}{EJ_z \cdot L_n} \qquad (e)$$

Kąt Θ_{n2} wyznaczamy dowolną metodą. Belki obciążone wyłącznie momentami podporowymi odpowiadają elementarnym przypadkom zginania, można zatem stosować gotowe wzory zawarte w podręcznikach do W.M.



Kąt Θ_{n2} jest superpozycją powyższych kątów:

$$\Theta_{n2} = \frac{M_{n-1} \cdot L_n}{6EJ_z} + \frac{M_n \cdot L_n}{3EJ_z} \qquad (f)$$

Kąt ugięcia $\mathbf{\Theta_n}$ przęsła **n** na prawym końcu wynosi zatem:

$$\Theta_n = \frac{\Omega_\mathrm{n} \cdot \mathrm{a_n}}{EJ_z \cdot L_n} + \frac{M_{n-1} \cdot L_n}{6EJ_z} + \frac{M_n \cdot L_n}{3EJ_z} \qquad (g)$$

W analogiczny sposób wyznaczamy kąt $\mathbf{\Theta_n}$' ugięcia przęsła **n+1** na jego lewym końcu:

$$\Theta_{n1}' = \frac{\Omega_\mathrm{n+1} \cdot \mathrm{b_{n+1}}}{EJ_z \cdot L_{n+1}} - \ \textit{od obciążeń zewnętrznych}$$

$$\Theta_{n2}' = \frac{M_{n+1} \cdot L_{n+1}}{6EJ_z} + \frac{M_n \cdot L_{n+1}}{3EJ_z} - \ \textit{od momentów podporowych}$$

$$\Theta_n{}' = \frac{\Omega_\mathrm{n+1} \cdot \mathrm{b_{n+1}}}{EJ_z \cdot L_{n+1}} + \frac{M_{n+1} \cdot L_{n+1}}{6EJ_z} + \frac{M_n \cdot L_{n+1}}{3EJ_z} \qquad (h)$$

Po podstawieniu formuł (g) i (h) do związku (a) otrzymujemy:

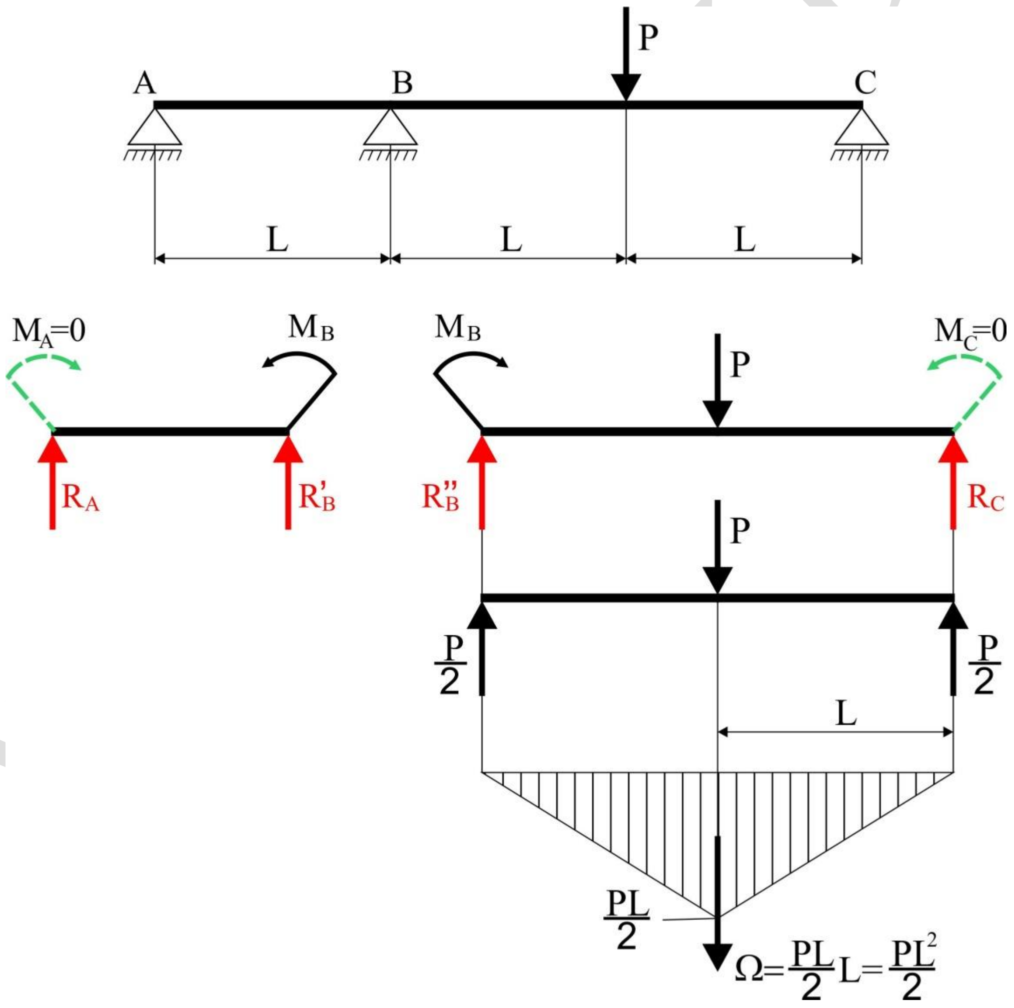
$$\frac{\Omega_\mathrm{n} \cdot \mathrm{a_n}}{EJ_z \cdot L_n} + \frac{M_{n-1} \cdot L_n}{6EJ_z} + \frac{M_n \cdot L_n}{3EJ_z} = -\left[\frac{\Omega_\mathrm{n+1} \cdot \mathrm{b_{n+1}}}{EJ_z \cdot L_{n+1}} + \frac{M_{n+1} \cdot L_{n+1}}{6EJ_z} + \frac{M_n \cdot L_{n+1}}{3EJ_z}\right] \qquad (9)$$

Powyższy związek jest równaniem trzech momentów. Po uporządkowaniu wyrażeń otrzymujemy użytkową postać wzoru:

$$M_{n-1} \cdot L_n + 2M_n(L_n + L_{n+1}) + M_{n+1} \cdot L_{n+1} = -6\left[\frac{\Omega_n \cdot a_n}{L_n} + \frac{\Omega_{n+1} \cdot b_{n+1}}{L_{n+1}}\right] \quad (10)$$

Zastosowanie równania (10) do rozwiązywania statycznie niewyznaczalnych przypadków belek zginanych sprowadza się do odpowiedniego utożsamiania składowych obciążenia belki oraz jej parametrów geometrycznych z wielkościami występującymi we wzorze.

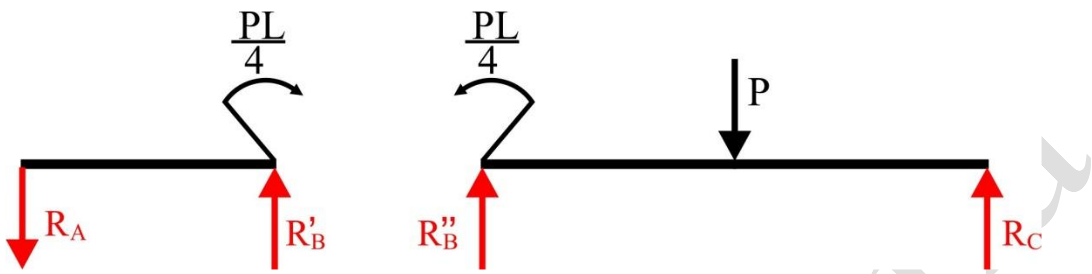
Przykład: Sporządzić wykres momentów gnących dla belki pokazanej na rysunku.



Równanie trzech momentów:

$$0 + 2M_B \cdot 3L + 0 = -6\left[\frac{PL^2}{2} \cdot \frac{L}{2L}\right]$$

$$6M_B = -6\frac{PL^2}{4} \quad \rightarrow \quad M_B = -\frac{PL}{4}$$



$$R_A \cdot L = \frac{PL}{4}$$

$$R_A = \frac{P}{4}$$

$$R'_B = R_A = \frac{P}{4}$$

$$R_C \cdot 2L = PL - \frac{PL}{4}$$

$$R_C \cdot 2L = \frac{3}{4}PL$$

$$R_C = \frac{3}{8}P$$

$$R''_B = P - \frac{3}{8}P = \frac{5}{8}P$$

$$R_B = R'_B + R''_B = \frac{1}{4}P + \frac{5}{8}P = \frac{7}{8}P$$