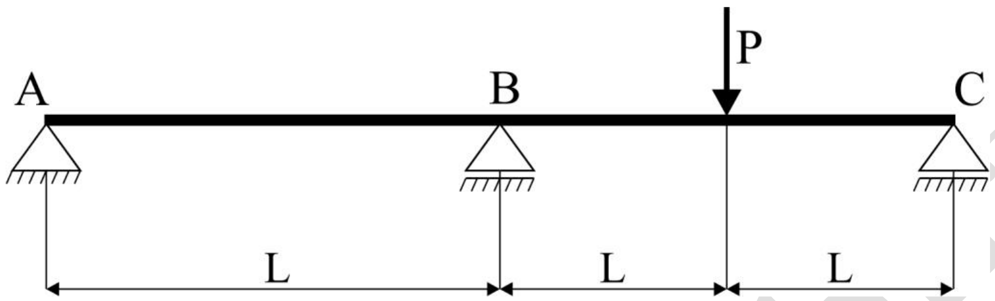
ROZDZIAŁ XIII – ZGINANIE – UKŁADY STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE

1) Metoda analizy odkształceń.

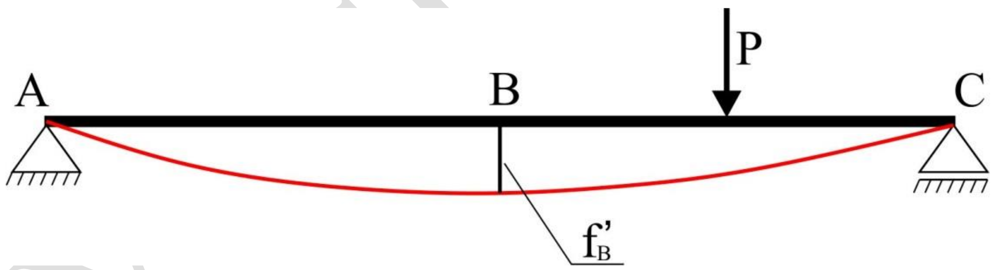
Rozpatrujemy belkę wspartą na trzech podporach, obciążoną siłą P.



W odróżnieniu do przypadków analizowanych dotychczas, zachodzi tutaj konieczność wyznaczenia trzech reakcji podpór. Dysponujemy tylko dwoma równaniami statyki (nie licząc równania rzutów sił na oś belki). Powyższa belka jest zatem układem jednokrotnie statycznie niewyznaczalnym.

W celu wyznaczenia reakcji, należy wykorzystać warunek wynikający z deformacji belki. Rozpatrujemy superpozycję dwóch stanów obciążenia:

Stan „0” – Zakładamy, że belka jest statycznie wyznaczalna, myślowo odrzucając jedną z podpór, np. w punkcie **B**. układ obciążający pozostaje bez zmian.



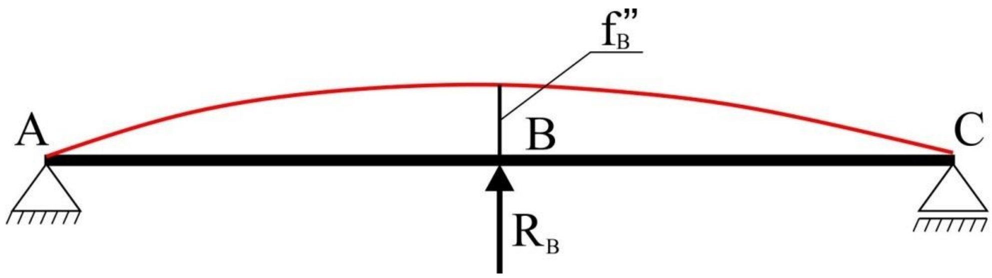
Strzałka ugięcia w punkcie **B**, spowodowana działaniem siły **P**, wynosi $\mathbf{f_B}$' i może być wyznaczona dowolną metodą.

$$f_B' = f_B'(P)$$

Dla powyższej belki:

$$f_B' = \frac{13}{6}\frac{PL^3}{EJ_z}$$

Stan „1” – Zakładamy, że w miejscu występowania usuniętej podpory (w p. **B**) występuje jedyna siła obciążająca belkę, równa niewiadomej reakcji $\mathbf{R_B}$.



Strzałka ugięcia belki w punkcie **B** spowodowana działaniem siły $\mathbf{R_B}$ wynosi $\mathbf{f_B}''$ (może być wyznaczana dowolną metodą jako funkcja R_B)

$$f_B'' = f_B''(R_B)$$

Dla powyższej belki:

$$f_B'' = \frac{14}{3}\frac{R_B \cdot L^3}{EJ_z}$$

W punkcie **B** występuje podpora, zatem rzeczywiste ugięcie w tym punkcie wynosi **0**. Po dokonaniu superpozycji obu stanów, otrzymujemy zatem:

$$f_B' + f_B'' = 0$$

Z powyższego równania wyznaczamy reakcję $\mathbf{R_B}$ jako funkcję znanego obciążenia **P**:

$$R_B = f(P)$$

Dla powyższej belki:

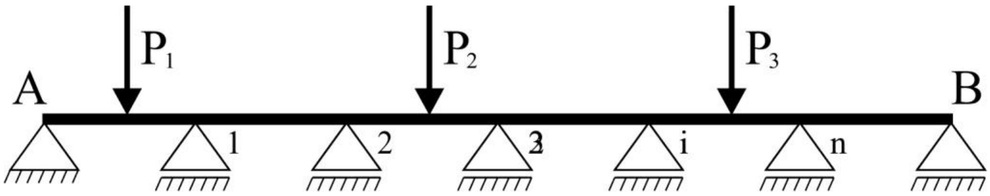
$$R_B = \frac{13}{24}P$$

Opisana metoda nosi nazwę metody analizy odkształceń i może być stosowana dla nieskomplikowanych układów obciążających, z uwagi na pracochłonność (konieczność angażowania poznanych wcześniej metod wyznaczania przemieszczeń belek).

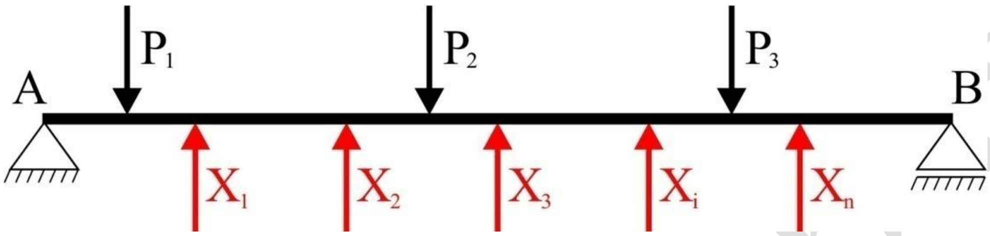
Liczba rozpatrywanych stanów obciążenia przewyższa o 1 krotność statycznej niewyznaczalności.

2) Twierdzenie Menabrei.

Twierdzenie to jest bezpośrednią konsekwencją twierdzenia Castigliano. Rozpatrujemy dowolny układ Clapeyrona, n-krotnie statycznie niewyznaczalny, dowolnie obciążony.



Za statycznie niewyznaczalne przyjmujemy reakcje podpór **1,2,..,n**. W miejscach występowania podpór wprowadzamy siły $\mathbf{X_1}$**,** $\mathbf{X_2}$**,…,** $\mathbf{X_n}$ (rozważany układ reprezentuje układ dowolny, toteż siły $\mathbf{X_1}$**,….**$\mathbf{X_n}$ są siłami uogólnionymi.



Przy założeniu, że otrzymany układ jest układem statycznie wyznaczalnym, można określić przemieszczenia punktów **1,2,3,…,**n za pomocą twierdzenia Castigliano:

$$\frac{\partial V}{\partial P_i} = f_i$$

W rzeczywistości w punktach **1,2,…,n** występują podpory, zatem przemieszczenia $\mathbf{f_i}$ muszą być równe zero:

$$\boxed{\left(\frac{\partial V}{\partial X_i}\right) = 0\Bigg|_{dla\ i=1,2,3,\dots,n}} \quad - \quad tw.\,Menabrei \qquad (1)$$

Równania (1) przedstawiają warunek ekstremum funkcji V. Można wykazac, że zachodzi tu minimum tej funkcji. Tw. Menabrei nosi zatem również nazwę twierdzenia o minimum energii sprężystej i może zostać sformułowane w sposób następujący:

W ustroju statycznie niewyznaczalnym reakcje więzów przyjmują takie wartości, że energia sprężysta osiąga minimum.

Dla ustroju **n-krotnie** statycznie niewyznaczalnego otrzymujemy układ **n** równań postaci (1).