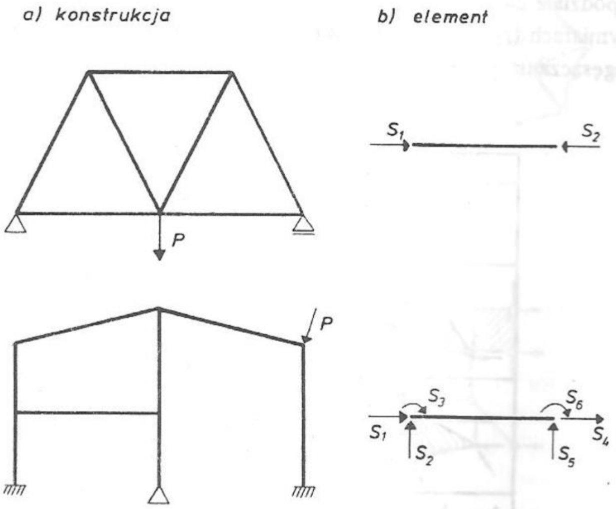
7. METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH (MES)*

7.1. Wiadomości ogólne

Każdą konstrukcję można rozłożyć na pewną skończoną liczbę części składowych – *elementów*. Wydzielając element z konstrukcji należy, jak wiadomo, w miejscach odcięcia (w przekrojach skrajnych elementu) przyłożyć siły wyrażające oddziaływanie pozostałej części konstrukcji na wydzielony element. W przypadku **układów prętowych** zarówno rozkład na elementy jak i ustalenie rodzaju sił oddziaływania jest bardzo proste (rys. 7.1). Stosunkowo łatwe jest także ustalenie związków pomiędzy siłami oddziaływania a przemieszczeniami skrajnych przekrojów elementu. W przypadku **konstrukcji powierzchniowych** (tarcze, płyty, powłoki) sprawa wygląda zupełnie inaczej. Na konturze elementu wydzielonego z konstrukcji powierzchniowej rozkład naprężeń i odkształceń jest ciągły. Gdyby jednak można było znaleźć wielkości o charakterze dyskretnym (występujące w określonych punktach konturu) pozwalające opisać funkcyj-



Rys. 7.1

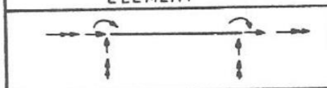
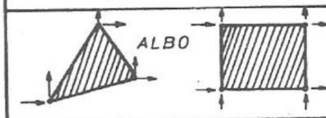
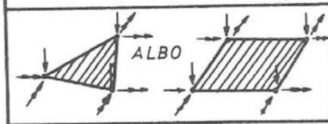
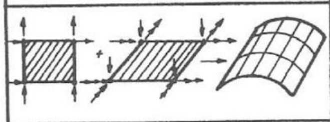
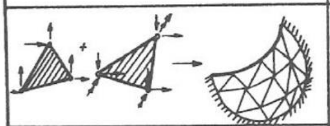
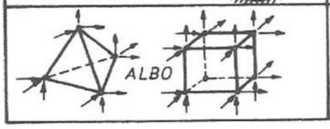
---

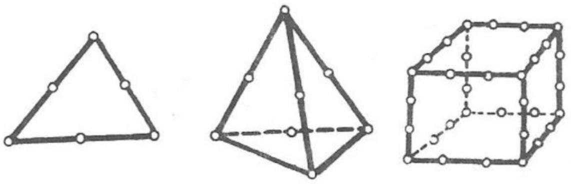
* W rozdziale tym omówiono najpowszechniej stosowaną w praktyce przemieszczeniową wersję metody elementów skończonych.

nie ciągły rozkład naprężeń i odkształceń na całym konturze, wówczas obliczanie układu powierzchniowego przebiegałoby identycznie jak układu prętowego. Rzeczywisty, kontynualny układ byłby bowiem przedstawiony za pomocą dyskretnego schematu obliczeniowego. Innymi słowy, można by znane i proste metody mechaniki budowli stosować do rozwiązywania złożonych problemów teorii sprężystości. Ubiegając dalsze rozważania stwierdzimy, że możliwość taka istnieje i została ona wykorzystana do zbudowania *metody elementów skończonych*.

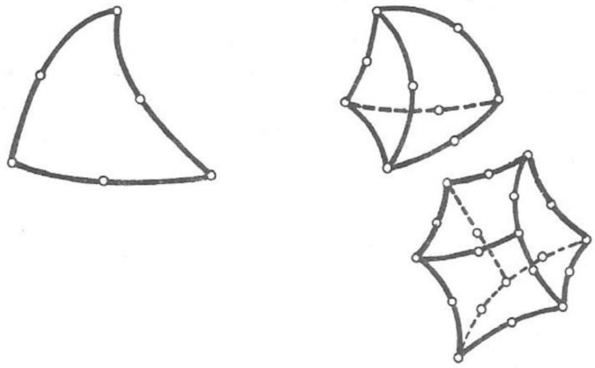
Kolejna trudność, na jaką napotykamy dzieląc konstrukcję powierzchniową na elementy, to ich kształt geometryczny. Sprawa, jaki ma być kształt elementu wydzielanego z kontinuum dwu- lub trójwymiarowego, i jak przyjmować wzajemne oddziaływanie elementów, jest jeszcze ciągle otwarta. Niektóre, dotychczas stosowane elementy podano w tabl. 7.1. W elementach dwu- i trójwymiarowych można przewidywać węzły nie tylko w wierzchołkach ale także w punktach pośrednich na krawędziach (rys. 7.2). Przy analizie obszarów o złożonych kształtach znalazły zastosowanie elementy ograniczone liniami krzywymi, bądź powierzchniami (rys. 7.3). Warto zauważyć, że przy podziale danej konstrukcji mogą występować elementy określonego rodzaju o różnych wymiarach (rys. 7.4a), a także elementy różnego rodzaju (rys. 7.4b). Daje to możliwość zagęszczania podziału w wybranych miejscach – np. w miejscu przyłożenia

Tablica 7.1

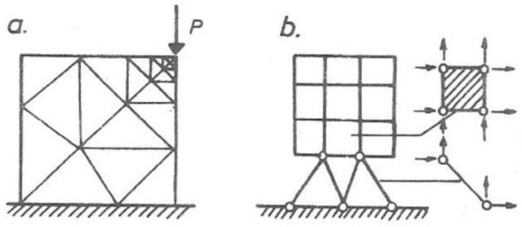
ELEMENT	Zastosowanie
	UKŁADY PRĘTOWE
	TARCZE
	PŁYTY
	POWŁOKI CYLINDRYCZNE
	POWŁOKI DWUKRZYWIZNOWE
	UKŁADY TRÓJWYMIAROWE



Rys. 7.2



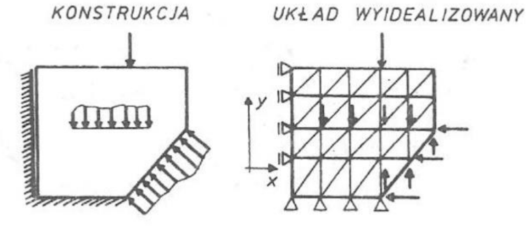
Rys. 7.3



Rys. 7.4

obciążenia skupionego – a także pozwala na analizę układów mieszanych. Stosowanie różnego rodzaju elementów umożliwia zbliżenie schematu obliczeniowego do rzeczywistej konstrukcji.

Podział konstrukcji na elementy nazywa się *procesem idealizacji geometrii układu* (por. także rozdz. 3). Może on być połączony z idealizacją charakterystyk fizycznych (stałe wielkości sprężyste dla danego elementu przy zmiennych wielkościach w całej konstrukcji). Procesowi idealizacji podlegają także warunki podparcia i obciążenie. W szczególności obciążenie ciągłe zastępujemy statycznie ekwiwalentnym układem sił skupionych zaczepionych w węzłach. Na rys. 7.5 pokazano przykładowo układ



Rys. 7.5

rzeczywisty i wyidealizowany. Proces idealizacji stanowi pierwszy etap stosowania metody elementów skończonych. Drugim etapem jest *analiza* poszczególnych *elementów*. Problem ten będzie przedstawiony szczegółowo w dalszych rozważaniach. Tutaj ograniczymy się do stwierdzenia, że w wyniku analizy elementu uzyskujemy związek pomiędzy siłami oddziaływania w węzłach i przemieszczeniami tych węzłów.

Wspomniany związek ma postać:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_l \end{bmatrix}_p = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1l} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2l} \\ \vdots & & & \\ k_{l1} & k_{l2} & \dots & k_{ll} \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_l \end{bmatrix}_p , \tag{7.1}$$

albo krótko:

$$S_p = k_p \ v_p, \tag{7.2}$$

gdzie:

S_p – wektor o wymiarze 1X1, składowymi którego są siły w węzłach elementu p,

v_p – wektor o wymiarze lx1, składowymi którego są przemieszczenia węzłów elementu,

k_p – macierz o wymiarze lxl, zwana – jak wiadomo, macierzą sztywności elementu. Składnik k_{ij} tej macierzy przedstawia siłę w więzie i od przemieszczenia $v_j = 1$.

Warto zauważyć, że wyrażenie (7.2) jest analogiczne do wzorów transformacyjnych metody przemieszczeń (por. także wzór 3.2).

Analiza elementu, a w szczególności uzyskanie macierzy sztywności jest najbardziej złożonym etapem metody elementów skończonych. Natrafiamy tutaj na szereg problemów. Przede wszystkim w wyniku podziału konstrukcji na elementy i założenia, że połączone są one w skończonej liczbie punktów, następuje naruszenie ciągłości odkształceń wzdłuż linii podziału za wyjątkiem punktów węzłowych. Nasuwa się przypuszczenie, że układ wyidealizowany będzie bardziej wiotki niż rzeczywisty i że w otoczeniu węzłów powstaną zakłócenia w rozkładzie naprężeń. Unikamy tych ewentualności przyjmując odpowiednio funkcje opisujące stan odkształcenia elementu w zależności od przemieszczeń węzłów. Staramy się dobrać te funkcje tak, aby w maksymalnym stopniu zapewnić zgodność odkształceń wzdłuż linii podziału na elementy.

Kolejnym, trzecim etapem metody jest *analiza konstrukcji*. Etap ten polega na zszywaniu poszczególnych elementów w całość, z której zostały wydzielone. Wykorzystuje się przy tym warunek zgodności przemieszczeń i warunki równowagi węzłów. Nietrudno dostrzec tutaj znowu analogię z metodą przemieszczeń. Podobnie jak tam, także w metodzie elementów skończonych otrzymujemy układ równań liniowych, których zapis macierzowy przedstawia się następująco:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}\mathbf{r}, \tag{7.3}$$

gdzie:

- **R** – wektor, którego składowymi są siły zewnętrzne skupione w węzłach,
- **r** – wektor, którego składowymi są przemieszczenia węzłów,
- **K** – macierz kwadratowa zwana macierzą sztywności konstrukcji albo układu.

Wymiary **R**, **K**, **r** zależą, jak wiemy, od liczby węzłów w konstrukcji i liczby składowych sił i przemieszczeń przyjętych w węźle.

Sprawa uwzględnienia warunków brzegowych i związane z tym zagadnienie pewnej modyfikacji równań (7.3) będzie przedmiotem dalszych rozważań.

Wielkościami niewiadomymi w równaniach (7.3) są przemieszczenia **r**. Po znalezieniu tych niewiadomych możemy na podstawie zależności (7.2)* obliczyć siły węzłowe **S**, a tym samym określić stan naprężeń w poszczególnych elementach.

Na podobieństwo metody elementów skończonych w jej wersji przemieszczeniowej i metody przemieszczeń zwrócono uwagę już wcześniej. Warto wiedzieć, że istnieje także analogia między metodą elementów i metodą Ritza. W metodzie Ritza zakłada się dla całego badanego obszaru układ funkcji opisujących rozwiązanie. Występujące w tych funkcjach parametry wyznacza się z warunku minimum energii. Coś podobnego ma miejsce w metodzie elementów tylko w odniesieniu nie do całego obszaru a do poszczególnych jego części, którymi są właśnie elementy. W analizie elementu przy znajdowaniu macierzy sztywności także zakłada się funkcje opisujące stan odkształcenia. W funkcjach tych występują parametry, którymi są przemieszczenia węzłów. Rozwiązanie dla całego obszaru uzyskuje się na etapie analizy układu, kiedy to wykorzystuje się warunki zgodności przemieszczeń. Same parametry (przemieszczenia węzłów) wyznacza się z warunków równowagi, które są odpowiednikami warunków minimum energii.

Do opisu stanu odkształcenia elementu przyjmuje się skończoną liczbę parametrów, mimo że w przypadku elementu wyciętego z kontinuum parametrów tych jest nieskończenie wiele. W tym sensie metoda elementów skończonych jest metodą przy-

---

* należy zauważyć, że dla danego węzła mamy $\mathbf{v} = \mathbf{r}$

bliżoną. Powstaje pytanie, czy dokładność metody jest dostateczna, i od czego ona zależy?

Zanim odpowiemy chociażby częściowo na to pytanie, trzeba jeszcze raz wspomnieć o dwóch niesprzyjających okolicznościach występujących w metodzie:

1° – trudność w doborze funkcji opisujących stan odkształceń elementu i spełniających wszystkie warunki ciągłości odkształceń wzdłuż linii podziału,

2° – zastąpienie kontynualnie rozłożonych napięć na konturze elementu przez statycznie równoważny układ sił skupionych w węzłach, co powoduje zakłócenie równowagi w części obszaru elementu, mimo że w odniesieniu do konstrukcji jako całości warunki równowagi są spełnione.

Ogólnie można powiedzieć, że dokładność metody jest tym większa im:

– założone funkcje dokładniej opisują rzeczywisty stan odkształcenia elementu,

– podział na elementy jest bardziej gęsty.

Spełnienie tylko drugiego warunku nie jest wystarczające do uzyskania poprawnych wyników. Należy pamiętać o właściwym doborze funkcji opisującej odkształcenia elementu.

Zakładając te funkcje należy dążyć do spełnienia następujących warunków:

– w elemencie nie mogą powstawać żadne napięcia, kiedy przemieszczenia węzłów wynikają z przemieszczania się całej konstrukcji jako ciała sztywnego,

– funkcje, opisujące pole przemieszczeń powinny gwarantować ich ciągłość wewnątrz elementu oraz zgodność na granicach podziału,

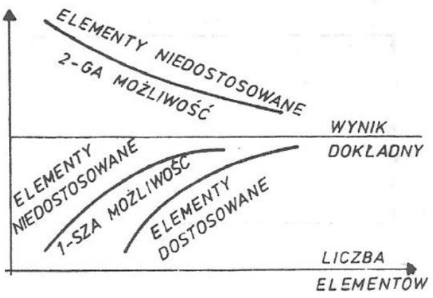
– funkcje muszą zawierać składniki gwarantujące stałość wartości naprężeń w elemencie, przy czym warunek stałości naprężeń należy rozpatrywać łącznie z warunkiem ciągłości odkształceń na konturze. Jeżeli spełnienie warunku ciągłości zakłada warunek stałości naprężeń na konturze, to musi być ten warunek spełniony w całym elemencie.

Warunek trzeci uwzględnia oczywisty fakt, że wraz ze zmniejszaniem się wymiarów elementu, naprężenia w nim panujące zmierzają do pewnej stałej wartości.

Jak wykazały obliczenia, spełnienie pierwszego i trzeciego z wymienionych warunków odnośnie do zakładanych funkcji, nie zawsze zapewnia monotoniczną zbieżność rozwiązania przy zagęszczaniu siatki podziału na elementy. Zbieżność taką uzyskuje się dopiero przy spełnieniu warunków ciągłości odkształceń wzdłuż linii podziału. Warunki te są jednak trudne do osiągnięcia i nie zawsze konieczne. Praktyka wykazała, że nawet przy grubym podziale na elementy i niespełnieniu wszystkich warunków ciągłości odkształceń, uzyskuje się wyniki z dokładnością zupełnie wystarczającą do celów technicznych.

Elementy, w których założone funkcje spełniają warunek drugi nazywają się *elementami dostosowanymi.* Przyjęcie elementów dostosowanych zapewni zbieżność rozwiązania, przy czym wynik dokładny jest w stosunku do otrzymywanych granicą górną.

Jak potwierdziły liczne przykłady, zastosowanie ***elementów niedostosowanych***, ale spełniających pierwszy i trzeci z wcześniej wymienionych warunków, daje także dobre



Rys. 7.6

rezultaty. Nie można jednak naprzód wiedzieć, czy będziemy zbliżali się do wyniku dokładnego od dołu czy od góry.

Na rys. 7.6 pokazano schematycznie krzywe obrazujące zagadnienie zbieżności, zależne od rodzaju przyjętych elementów.

Funkcje, o których mówiliśmy, a które opisują stan odkształcenia elementu w zależności od przemieszczeń węzłów, nazywamy w metodzie elementów skończonych *funkcjami kształtu*.

Właściwy dobór tych funkcji jest zagadnieniem o podstawowym znaczeniu w analizie elementu, a jednocześnie zagadnieniem najtrudniejszym.

Przejdziemy teraz do omawiania analizy poszczególnych rodzajów elementów. Przypomnijmy, że w wyniku tego etapu metody otrzymujemy *macierz sztywności elementu* czyli macierz wyrażającą związek pomiędzy siłami i przemieszczeniami występującymi w jego węzłach.