POLITECHNIKA RZESZOWSKA im. IGNACEGO ŁUKASIEWICZA

WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI I INFORMATYKI POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ

Metody Obliczeniowe w Elektrotechnice

Stanisław Pawłowski
Zakład Elektrodynamiki i Systemów Elektromaszynowych

Kontakt:
Budynek B pokój 301
Mail: spawlo@prz.edu.pl
Tel.: 17 865 1305

Równania różniczkowe cząstkowe

Ogólna klasyfikacja równań różniczkowych

Najczęściej spotykane równania różniczkowe cząstkowe w zagadnieniach fizycznych (równania fizyki matematycznej)

Nazwa	jednorodne	niejednorodne
Laplace'a (Poissone'a)	$\Delta\varphi = 0$	$\Delta\varphi = f(x,y,z)$
Helmholtza	$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0$	$\Delta\varphi + k^2\varphi = f(x,y,z)$
Przewodnictwa (Dyfuzji)	$a^2\Delta\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$	$a^2\Delta\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial t} = f(x,y,z,t)$
Falowe	$c^2\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$	$c^2\Delta\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = f(x,y,z,t)$

Oznaczenia:

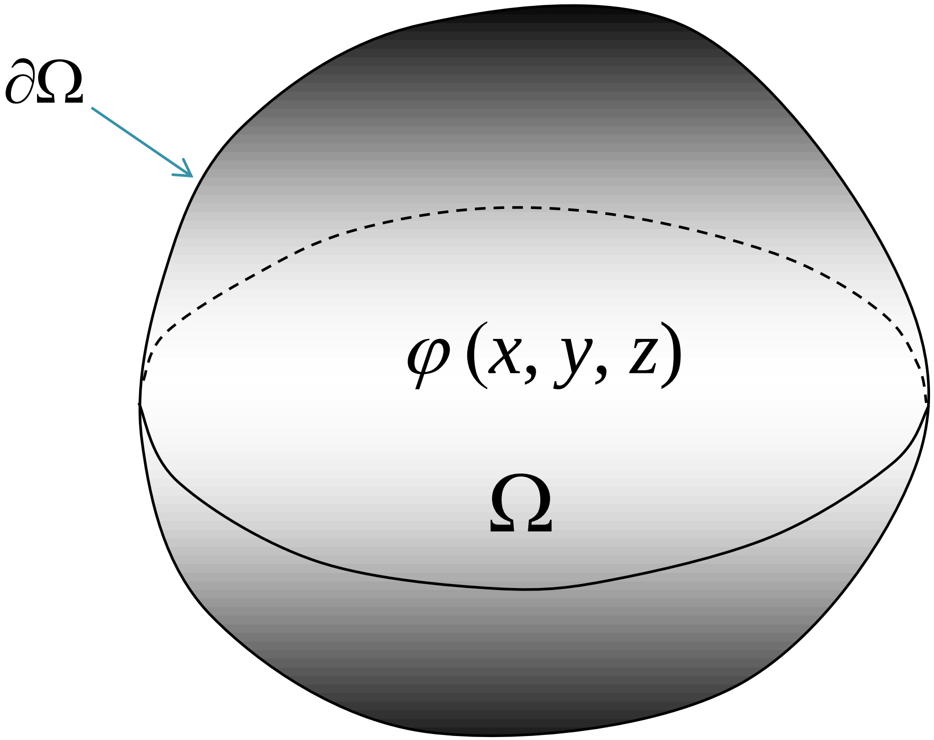
$\varphi(x, y, z)$ lub $\varphi(x, y, z, t)$ - poszukiwana funkcja

$f(x, y, z)$ lub $f(x, y, z, t)$ – funkcja zadana (funkcja źródeł)

k, a, c – stałe

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

Warunki brzegowe i początkowe dla równań cząstkowych



Warunki brzegowe

Dirichleta

$$\varphi\big|_{\partial\Omega} = g(x, y, z)$$

Neumanna

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = g(x, y, z)$$

Mieszane

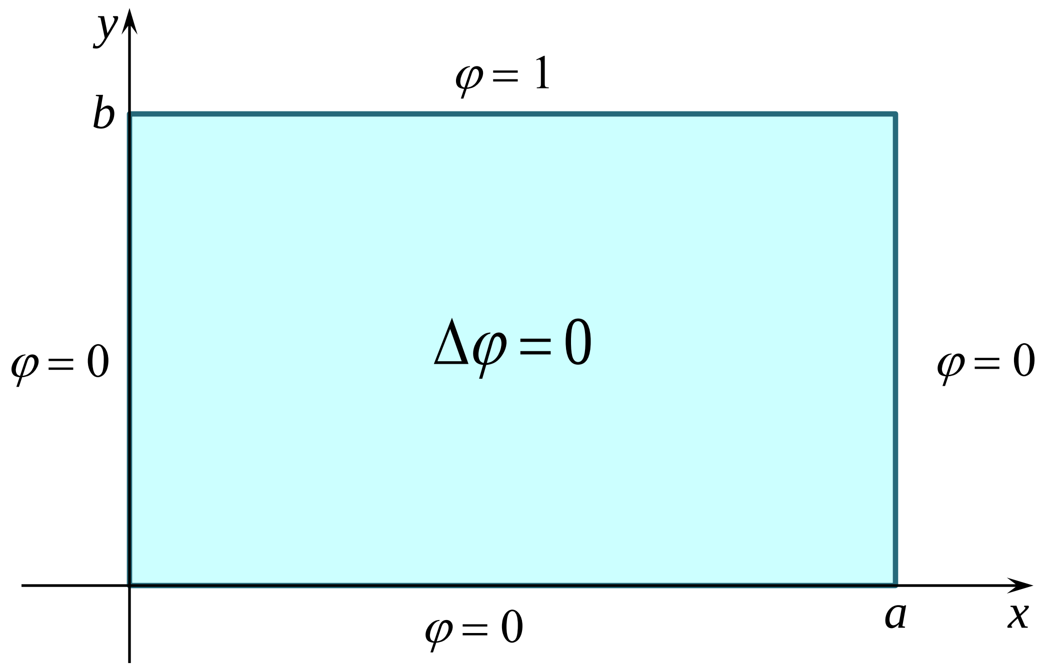
$$\left.\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \alpha\varphi\right)\right|_{\partial\Omega} = g(x, y, z)$$

Warunki początkowe

$$\varphi\big|_{t=0} = h(x, y, z)$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{t=0} = f(x, y, z)$$

Przykład 1. Rozwiązywanie zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a na obszarze prostokątnym



Funkcja poszukiwana

$$\varphi = \varphi(x, y)$$

Równanie

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Warunki brzegowe

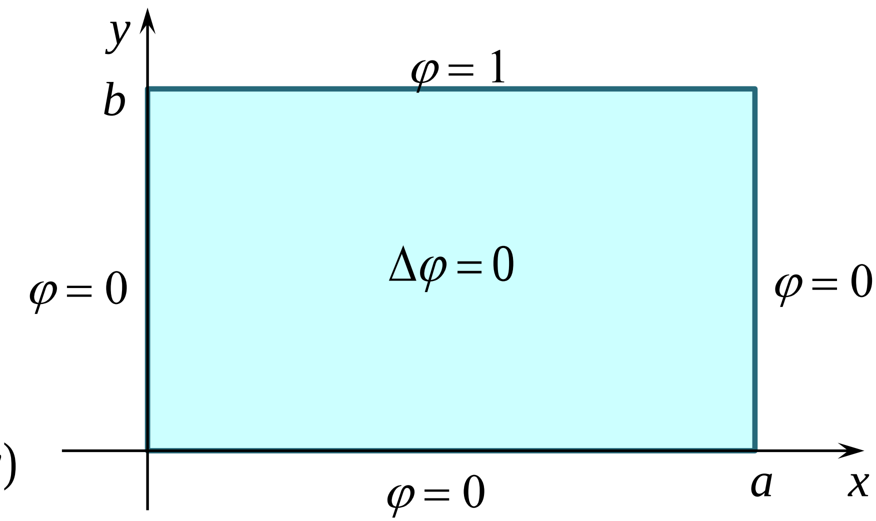
$$\varphi(0, y) = 0$$

$$\varphi(a, y) = 0$$

$$\varphi(x,0) = 0$$

$$\varphi(x, b) = 1$$

Rozwiązanie – metoda separacji zmiennych (Fouriera)



Rozwiązanie przewidujemy w postaci:

$$\varphi(x, y) = X(x)Y(y)$$

Obliczamy pochodne

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = X'(x)Y(y) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = X(x)Y'(y)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = X''(x)Y(y) \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = X(x)Y''(y)$$

Podstawiamy do równania (dla większej przejrzystości opuszczamy argumenty x, y)

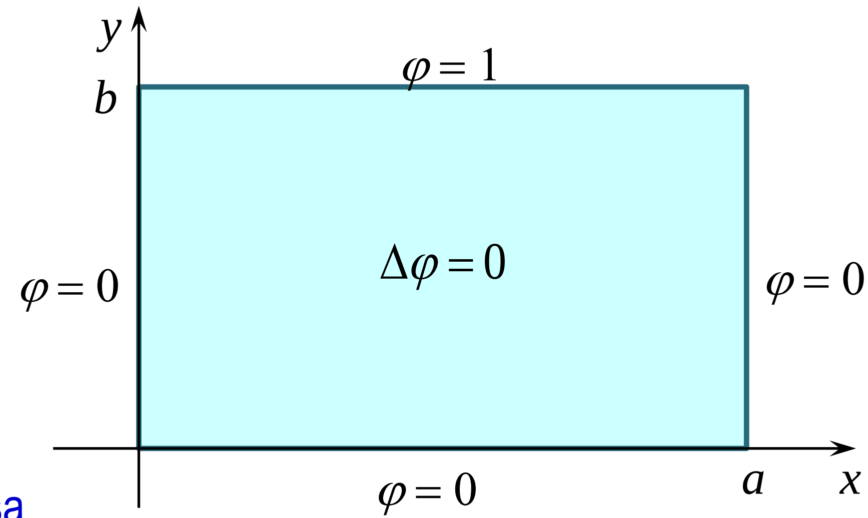
$$X''Y + XY'' = 0$$

Dzielimy obustronnie przez XY

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$$

Przenosimy drugi wyraz na prawą stronę

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$$



Ponieważ lewa strona tego równania może zależeć tylko od zmiennej x, a prawa tylko od zmiennej y, a zmienne te są od siebie niezależne, oznacza to, że w rzeczywistości obie jego strony muszą być wielkością stałą. W tym przypadku stała ta musi być ujemna, co zostanie wyjaśnione w dalszej części. Czyli:

$$\frac{X''}{X} = -\sigma^2 \qquad\qquad \frac{Y''}{Y} = \sigma^2$$

Po prostych przekształceniach mamy:

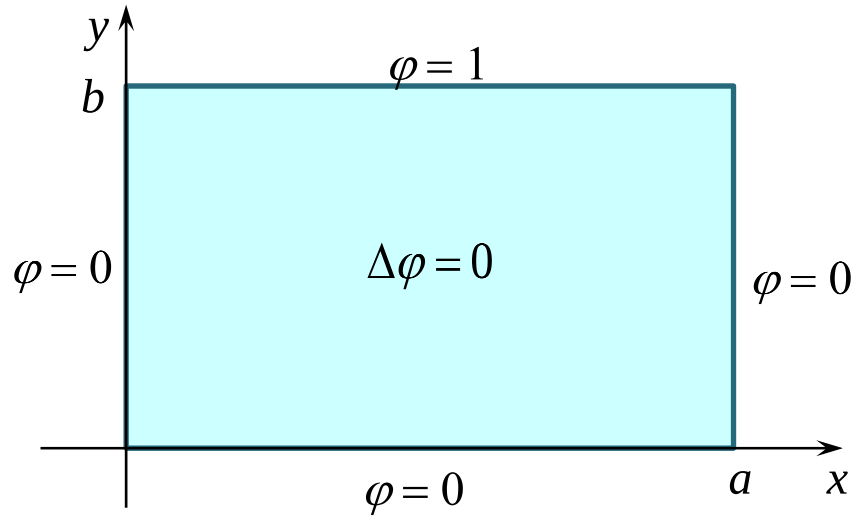
$$X'' + \sigma^2 X = 0 \qquad\qquad Y'' - \sigma^2 Y = 0$$

Jak widać, są to liniowe równania różniczkowe jednorodne o stałych współczynnikach.

Rozwiązując je (np. przez podstawienie Eulera) otrzymujemy ogólne rozwiązania:

$$X(x) = A\sin\sigma x + B\cos\sigma x$$

$$Y(y) = C\,\mathrm{e}^{\sigma y} + D\,\mathrm{e}^{-\sigma y}$$



Zgodnie z pierwszym z warunków brzegowych mamy:

$$\varphi(0,y) = 0 \quad\Rightarrow\quad X(0)Y(y) = 0 \quad\Rightarrow\quad X(0) = 0$$

Stąd: $X(0) = A\sin(\sigma\cdot 0) + B\cos(\sigma\cdot 0) = A\cdot 0 + B\cdot 1 = B = 0$

Zatem: $X(x) = A\sin\sigma x$

Zgodnie z drugim z warunków brzegowych mamy:

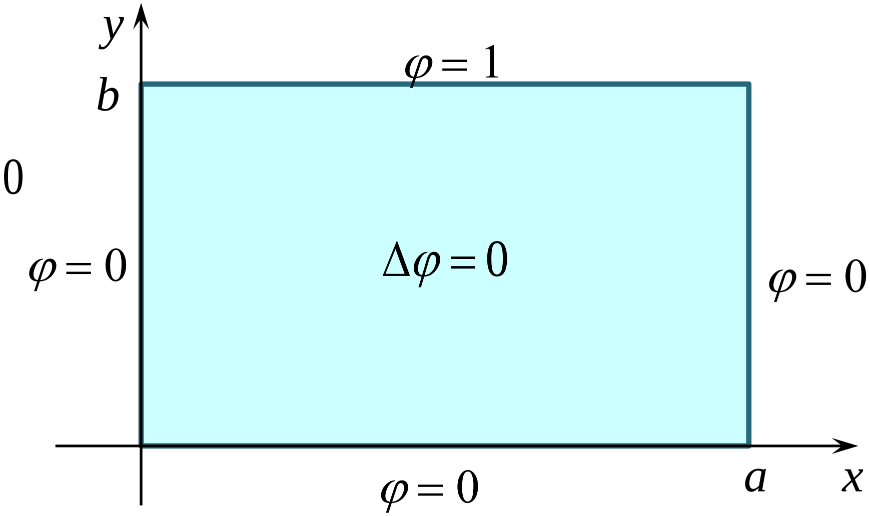
$$\varphi(a,y) = 0 \quad\Rightarrow\quad X(a)Y(y) = 0 \quad\Rightarrow\quad X(a) = 0$$

Zatem: $A\sin\sigma a = 0$

Stąd: $\sigma a = k\pi \quad\Rightarrow\quad \sigma = \dfrac{k\pi}{a}$ więc $X(x) = A\sin\dfrac{k\pi}{a}x$

Zgodnie z trzecim z warunków brzegowych mamy:

$$\varphi(x,0)=0 \quad \Rightarrow \quad X(x)Y(0)=0 \quad \Rightarrow \quad Y(0)=0$$



Stąd:

$$Y(0)=C\,\mathrm{e}^{\sigma\cdot 0}+D\,\mathrm{e}^{-\sigma\cdot 0}=C+D=0$$

$$\Rightarrow \quad D=-C$$

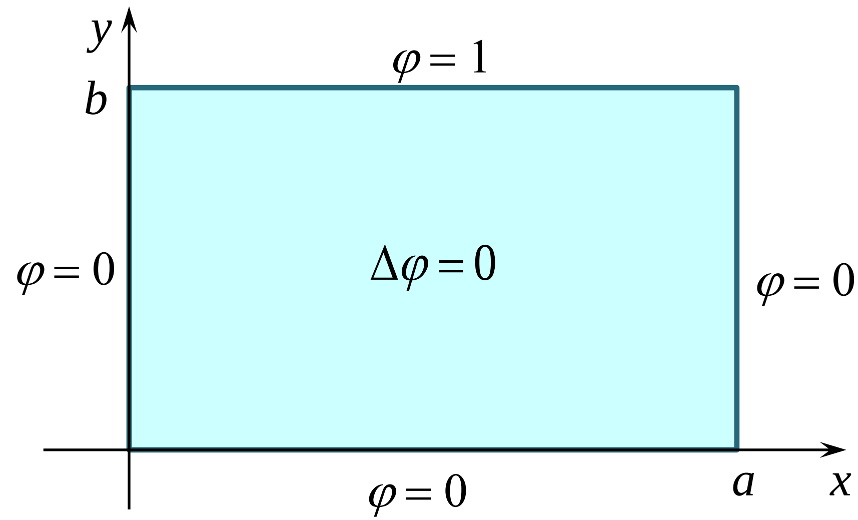
$$Y(y)=C\left(\mathrm{e}^{\frac{k\pi}{a}y}-\mathrm{e}^{-\frac{k\pi}{a}y}\right)=2C\,\mathrm{sh}\,\frac{k\pi}{a}y$$

Zatem: $\varphi(x,y)=F\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\mathrm{sh}\left(\frac{k\pi}{a}y\right)$ gdzie $F=2AC$

Funkcje te stanowią nieskończony zbiór (indeksowanych przez k) niezależnych rozwiązań szczególnych równania Laplace'a, spełniających wszystkie warunki zagadnienia, z wyjątkiem ostatniego warunku brzegowego. Aby go spełnić tworzymy z nich rozwiązanie ogólne (kombinację liniową rozwiązań szczególnych):

$$\varphi(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}F_k\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\mathrm{sh}\left(\frac{k\pi}{a}y\right)$$

Spełnianie ostatniego warunku brzegowego (wyznaczanie stałych F_k)



$$\varphi(x,b)=1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_k \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\mathrm{sh}\left(\frac{k\pi}{a}b\right)=1$$

$$G_k \equiv F_k \,\mathrm{sh}\left(\frac{k\pi b}{a}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_k \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)=1$$

Lewa strona tego równania to sinusowy szereg Fouriera, zatem

$$G_k = \frac{2}{a}\int_0^a 1\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\mathrm{d}\,x = -\frac{2}{a}\frac{a}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\Bigg|_0^a = -\frac{2}{k\pi}\left(\cos k\pi - 1\right) = \frac{2\left(1-(-1)^k\right)}{k\pi}$$

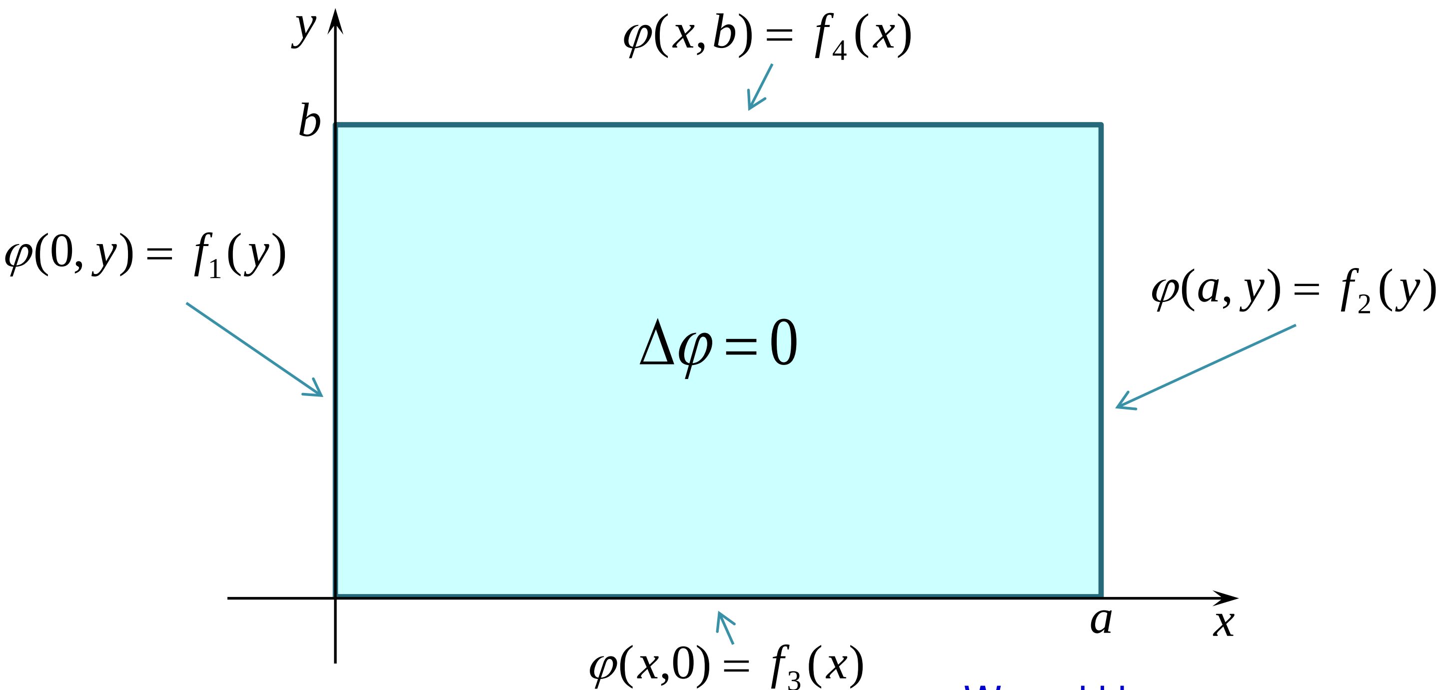
I stąd

$$F_k = \frac{2\left(1-(-1)^k\right)}{k\pi\,\mathrm{sh}\left(\frac{k\pi \mathrm{b}}{a}\right)}$$

Ostateczne rozwiązanie

$$\varphi(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\left(1-(-1)^k\right)}{k\pi\,\mathrm{sh}\left(\frac{k\pi \mathrm{b}}{a}\right)}\sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right)\mathrm{sh}\left(\frac{k\pi}{a}y\right)$$

Zagadnienie Dirichleta dla równania Laplace’a na obszarze prostokątnym z dowolnie zadanymi warunkami brzegowymi



Funkcja poszukiwana

$$\varphi = \varphi(x,y)$$

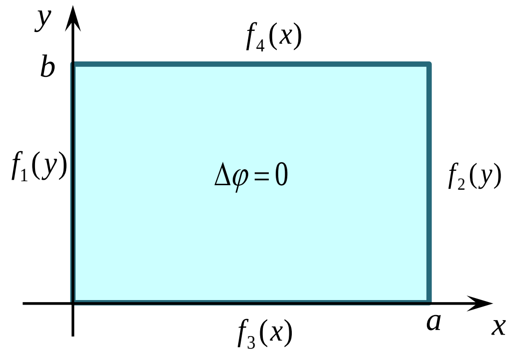
Równanie

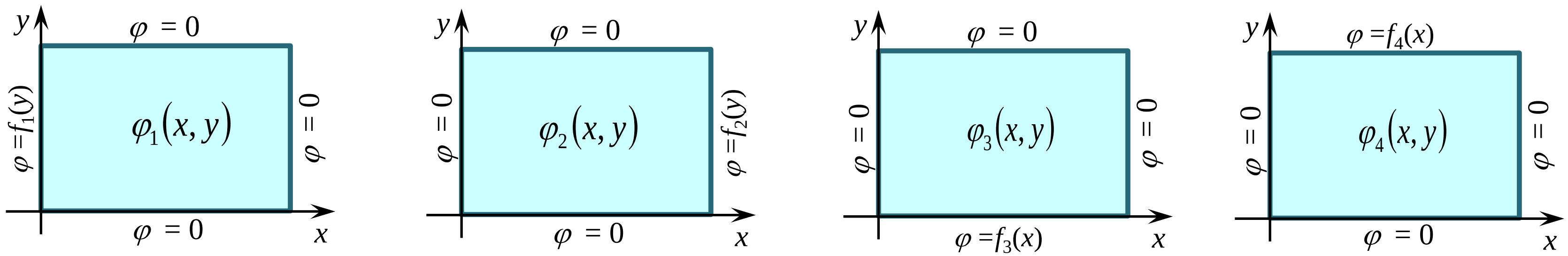
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

Warunki brzegowe

$$\varphi(0,y) = f_1(y)$$
$$\varphi(a,y) = f_2(y)$$
$$\varphi(x,0) = f_3(x)$$
$$\varphi(x,b) = f_4(x)$$

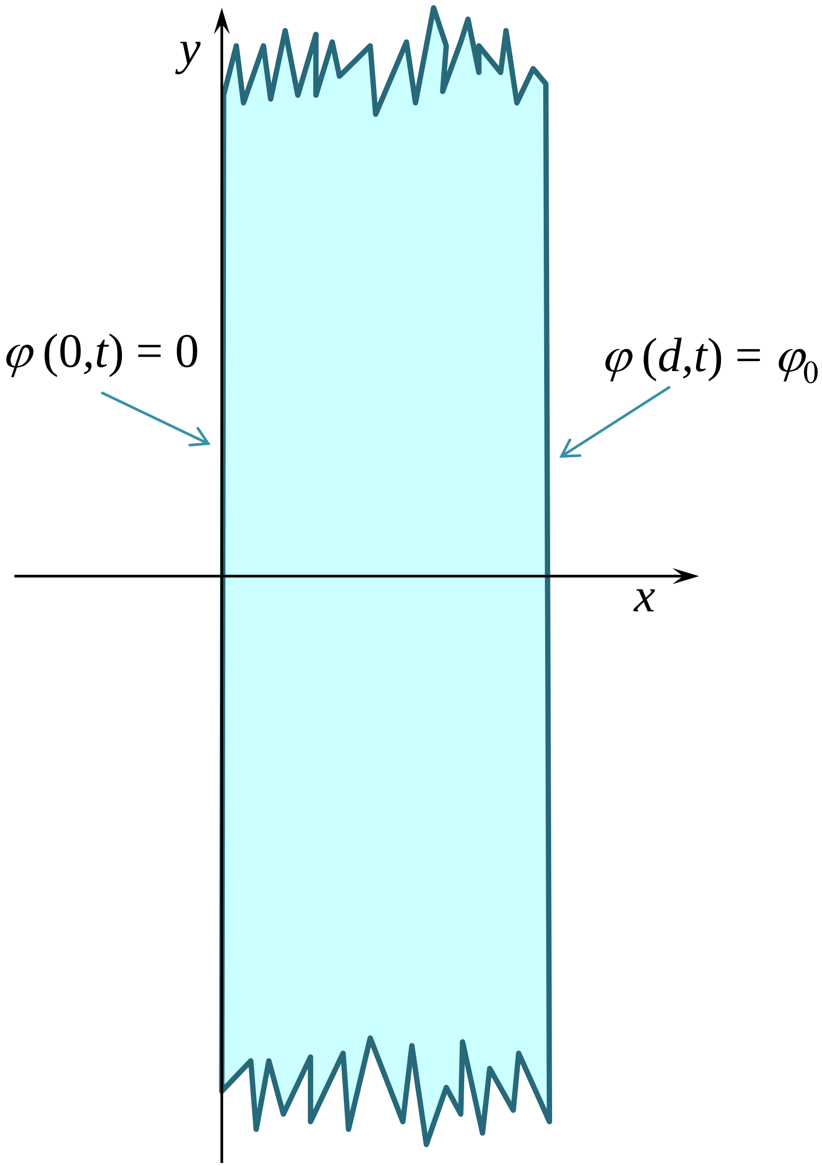
Schemat rozwiązywania





$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) + \varphi_4(x, y)$$

Przykład 2. Rozwiązywanie równania przewodzenia ciepła (dyfuzji)



Funkcja poszukiwana

$$\varphi = \varphi(x,t)$$

Równanie

$$a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Warunki brzegowe

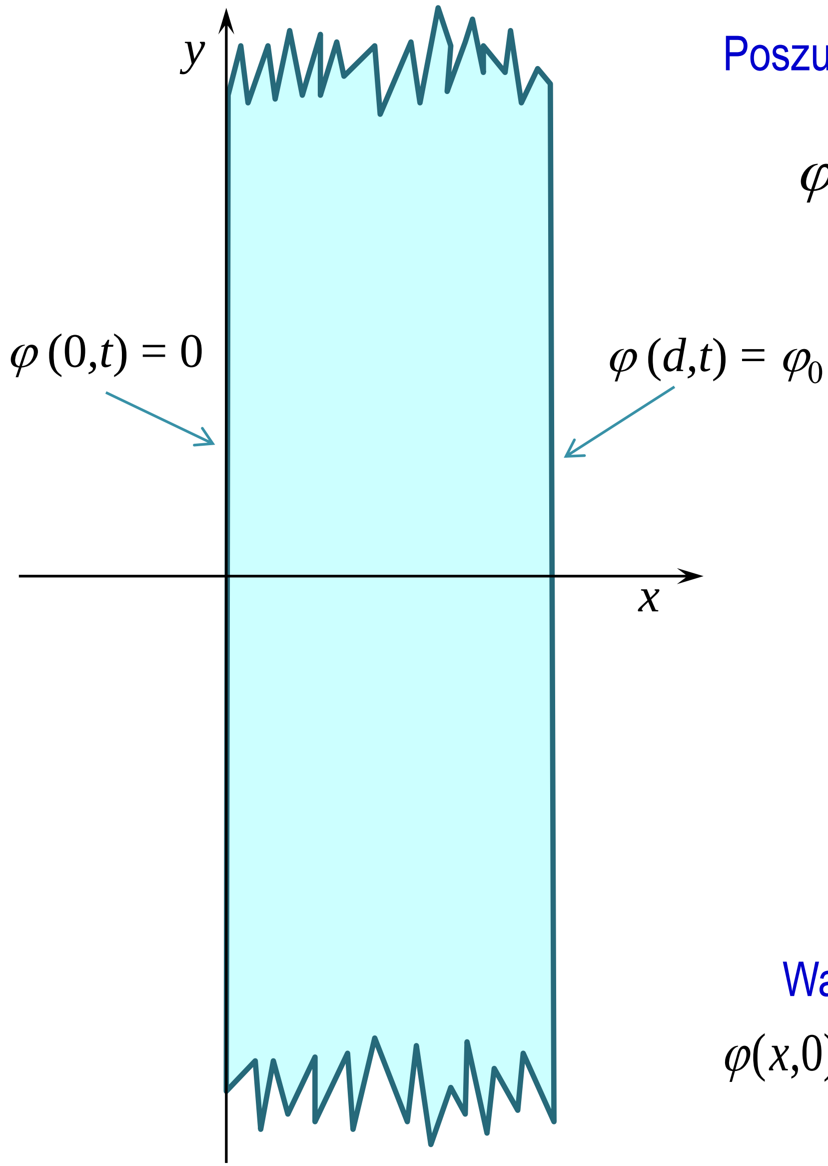
$$\varphi(0,t) = 0$$

$$\varphi(d,t) = \varphi_0$$

Warunek początkowy

$$\varphi(x,0) = 0$$

Rozwiązanie



Poszukiwaną funkcję przedstawiamy w postaci:

$$\varphi(x,t) = \underbrace{\varphi_{\mathrm{p}}(x,t)}_{\text{stan przejściowy}} + \underbrace{\varphi_{\mathrm{u}}(x)}_{\text{stan ustalony}}$$

Warunki brzegowe dla stanu ustalonego

$$\varphi_{\mathrm{u}}(0) = 0$$

$$\varphi_{\mathrm{u}}(d) = \varphi_0$$

Warunki brzegowe dla stanu przejściowego

$$\varphi_{\mathrm{p}}(0,t) = 0$$

$$\varphi_p(d,t) = 0$$

Warunek początkowy dla stanu przejściowego

$$\varphi(x,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_{\mathrm{p}}(x,0) = -\varphi_{\mathrm{u}}(x)$$

Obliczanie stanu ustalonego

Ponieważ stan ustalony nie zależy od czasu, więc $\frac{\partial \varphi_u}{\partial t} = 0$, zatem równanie przewodnictwa sprowadza się do:

$$\frac{\partial^2 \varphi_u}{\partial x^2} = 0$$

Rozwiązanie ogólne: $\varphi_u(x) = Ax + B$

Na podstawie warunków brzegowych mamy:

$$\varphi_\mathrm{u}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A \cdot 0 + B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$\varphi_\mathrm{u}(d) = \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad Ad = \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\varphi_0}{d}$$

Stąd:

$$\varphi_\mathrm{u}(x) = \frac{\varphi_0}{d} x$$

Obliczanie stanu przejściowego

Sformułowanie zagadnienia

$$a^2 \frac{\partial^2 \varphi_\mathrm{p}}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi_\mathrm{p}}{\partial t}$$

$$\varphi_\mathrm{p}(0,t) = 0$$

$$\varphi_p(d,t) = 0$$

$$\varphi_\mathrm{p}(x,0) = -\frac{\varphi_0}{d} x$$

Stosujemy metodę separacji zmiennych

$$\varphi_\mathrm{p}(x,t) = X(x)T(t)$$

Obliczamy pochodne

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = X'(x)T(t), \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = X''(x)T(t), \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = X(x)T'(t)$$

Podstawiamy do równania

$$a^2 X'' T = X\, T'$$

Dzielimy obustronnie przez XT

$$a^2 \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T}$$

Ponieważ lewa strona tego równania może zależeć tylko od zmiennej x, a prawa tylko od zmiennej t, a zmienne te są od siebie niezależne, oznacza to, że w rzeczywistości obie jego strony muszą być wielkością stałą. W tym przypadku stała ta musi być ujemna, co zostanie wyjaśnione nieco dalej. Czyli:

$$\frac{T'}{T} = -\sigma^2 \qquad\qquad a^2 \frac{X''}{X} = -\sigma^2$$

Po prostych przekształceniach mamy:

$$T' + \sigma^2 T = 0 \qquad\qquad a^2 X'' + \sigma^2 X = 0$$

Jak widać, są to równania różniczkowe liniowe, jednorodne o stałych współczynnikach. Rozwiązując je (np. przez podstawienie Eulera) otrzymujemy ogólne rozwiązania:

$$T(t) = C\,\mathrm{e}^{-\sigma^2 t} \qquad\qquad X(x) = D \sin\left(\frac{\sigma}{a} x\right) + E \cos\left(\frac{\sigma}{a} x\right)$$

Zauważmy, że gdyby przyjąć stałą rozdzielania zmiennych jako dodatnią, to przy t dążącym do nieskończoności funkcja $T(t)$ zmierzałaby do nieskończoności (rozwiązanie fizycznie niepoprawne)

Na podstawie warunków brzegowych mamy:

$$\varphi_{\mathrm{p}}(0,t)=0 \quad \Rightarrow \quad X(0)T(t)=0 \quad \Rightarrow \quad X(0)=0$$

Stąd: $$X(0)=D\sin\left(\frac{\sigma}{a}\cdot 0\right)+E\cos\left(\frac{\sigma}{a}\cdot 0\right)=D\cdot 0+E\cdot 1=E=0$$

Zatem: $$X(x)=D\sin\left(\frac{\sigma}{a}x\right)$$

Drugi warunek brzegowy:

$$\varphi_{\mathrm{p}}(d,t)=0 \quad \Rightarrow \quad X(d)T(t)=0 \quad \Rightarrow \quad X(d)=0$$

Zatem: $$D\sin\left(\frac{\sigma}{a}d\right)=0$$

Stąd: $$\frac{\sigma}{a}d=k\pi \quad \Rightarrow \quad \sigma=\frac{k\pi a}{d}$$ więc $$X(x)=D\sin\left(\frac{k\pi}{d}x\right)$$

Zgodnie z pierwotnym założeniem łączymy rozwiązania T(t) i X(x):

$$\varphi_{\mathrm{p}}(x,t) = F\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{k\pi a}{d}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{d}x\right)$$

gdzie $F = CD$

Funkcje te stanowią nieskończony zbiór (indeksowanych przez k) niezależnych rozwiązań szczególnych równania Laplace'a, spełniających wszystkie warunki zagadnienia, z wyjątkiem warunku początkowego. Aby go spełnić tworzymy z nich rozwiązanie ogólne (kombinację liniową rozwiązań szczególnych):

$$\varphi_{\mathrm{p}}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{k\pi a}{d}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{d}x\right)$$

Spełnianie warunku początkowego

$$\varphi_p(x,0) = -\frac{\varphi_0}{d}x \qquad \text{zatem} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} F_k \sin\left(\frac{k\pi}{d}x\right) = -\frac{\varphi_0}{d}x$$

Lewa strona tego równania to sinusowy szereg Fouriera, więc

$$F_k = \frac{2}{d}\int_0^a \left(-\frac{\varphi_0}{d}x\right)\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{d}x\right)\mathrm{d}\,x = -\frac{2\varphi_0}{d^2}\int_0^a x\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{d}x\right)\mathrm{d}\,x = \begin{vmatrix} u = x & v' = \sin\left(\frac{k\pi}{d}x\right) \\ u' = 1 & v = \frac{d}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi}{d}x\right) \end{vmatrix} =$$

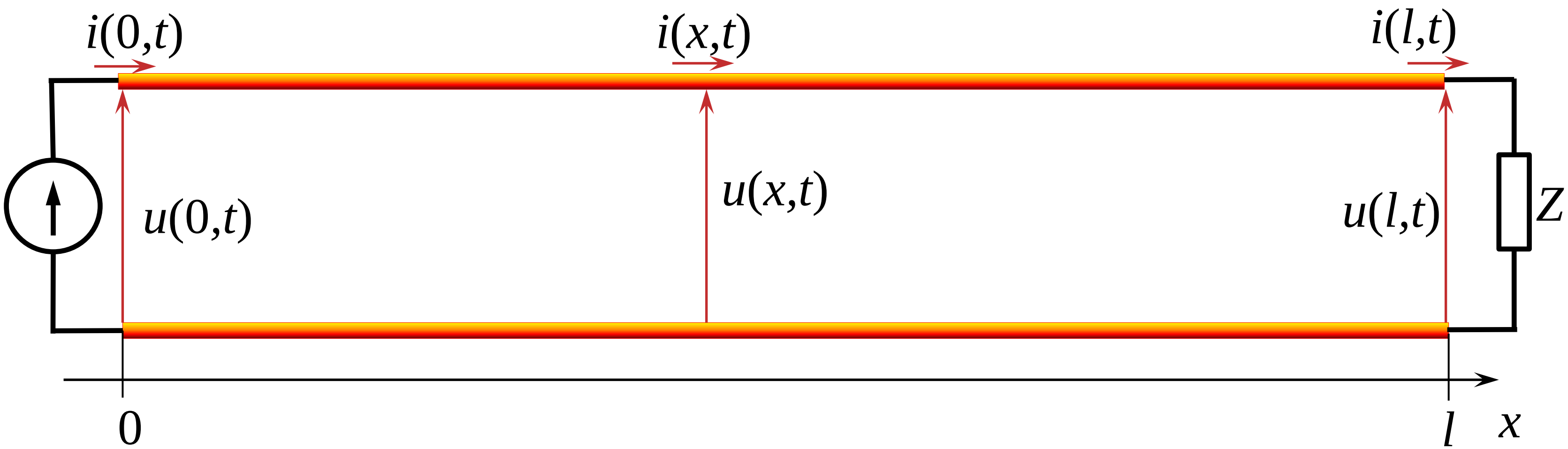
$$= -\frac{2\varphi_0}{d^2}\left(\frac{d}{k\pi}x\cos\left(\frac{k\pi}{d}x\right)\Bigg|_0^a - \frac{d}{k\pi}\int_0^a \cos\left(\frac{k\pi}{d}x\right)\mathrm{d}\,x\right) = -\frac{2\varphi_0}{k\pi d}\left(a\cos\left(\frac{k\pi a}{d}\right) - a + \frac{d}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{d}x\right)\Bigg|_0^a\right) =$$

$$= -\frac{2\varphi_0}{k\pi d}\left(a\cos\left(\frac{k\pi a}{d}\right) - a + \frac{d}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi a}{d}\right)\right) = \frac{2\varphi_0}{k\pi d}\left(a - a\cos\left(\frac{k\pi a}{d}\right) - \frac{d}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi a}{d}\right)\right)$$

Ostateczne rozwiązanie

$$\varphi_p(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\varphi_0}{k\pi d}\left(a - a\cos\left(\frac{k\pi a}{d}\right) - \frac{d}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi a}{d}\right)\right)e^{-\left(\frac{k\pi a}{d}\right)^2 t}\sin\left(\frac{k\pi}{d}x\right)$$

Równania linii długiej (telegrafistów)



$$\frac{\partial u}{\partial x} = -L\frac{\partial i}{\partial t} - Ri$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C\frac{\partial u}{\partial t} - Gu$$

Przekształcenie do równań osobnych dla napięcia i natężenia prądu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -L\frac{\partial i}{\partial t} - Ri \quad / \frac{\partial}{\partial x} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -L\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} - R\frac{\partial i}{\partial x}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C\frac{\partial u}{\partial t} - Gu \quad / \frac{\partial}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - G\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -L\left(-C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - G\frac{\partial u}{\partial t}\right) - R\left(-C\frac{\partial u}{\partial t} - Gu\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (LG + RC)\frac{\partial u}{\partial t} + RGu$$

Analogicznie otrzymujemy równanie dla natężenia prądu:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (LG + RC)\frac{\partial i}{\partial t} + RGi$$

Przypadki szczególne (wyidealizowane)

$$L = 0,\ C = 0: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = RGu, \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = RGi$$

- równania różniczkowe zwyczajne

$$R = 0,\ G = 0: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

- równania falowe

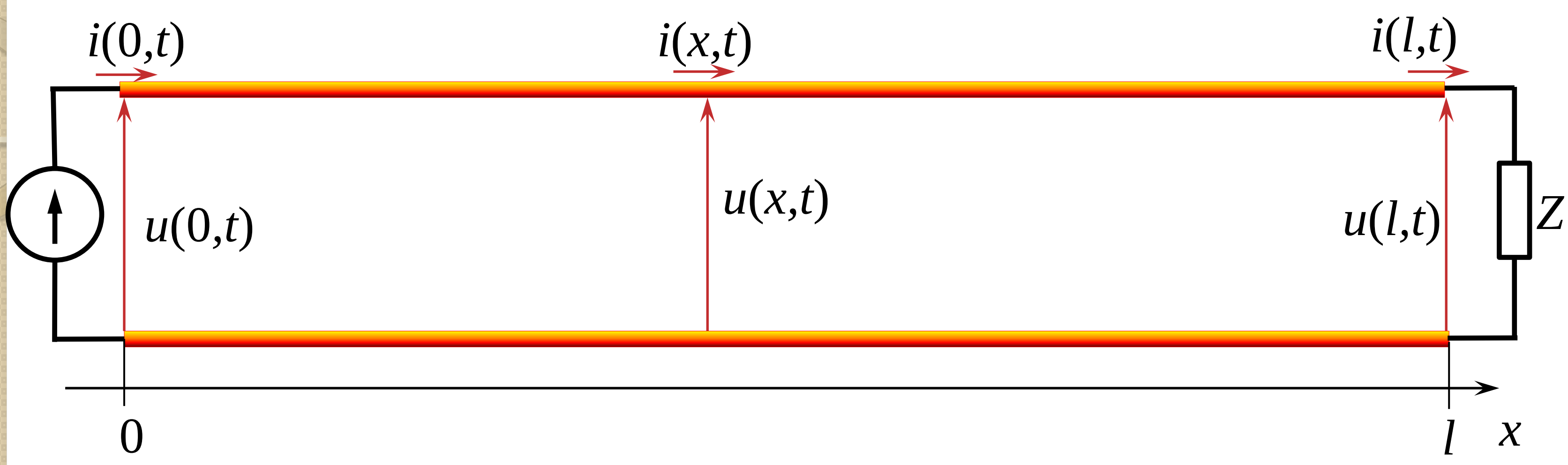
$$L = 0,\ G = 0: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = RC\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = RC\frac{\partial i}{\partial t}$$

- równania przewodnictwa

$$C = 0,\ R = 0: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LG\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LG\frac{\partial i}{\partial t}$$

- równania przewodnictwa

Przykład 3. Rozwiązywanie równania falowego dla linii długiej



Założenia:

$R = 0,\ G = 0$ (linia bezstratna) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -L\frac{\partial i}{\partial t}$$
$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C\frac{\partial u}{\partial t}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

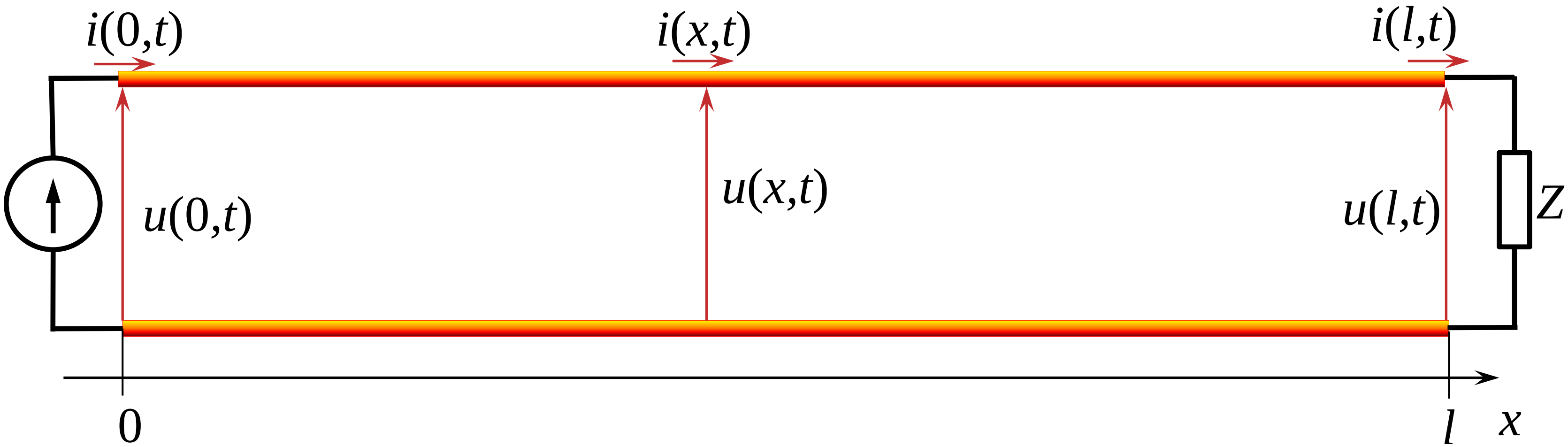
$u(0,t) = U\sin\omega t$

$u(l,t) = 0$ (linia zwarta na końcu)

$u(x,0) = 0$

$i(x,0) = 0$

Rozwiązanie



$$u(x,t) = u_{\mathrm{u}}(x,t) + u_{\mathrm{p}}(x,t)$$

stan ustalony — stan przejściowy

Warunki brzegowe dla stanu ustalonego

$$u_{\mathrm{u}}(0,t) = U \sin \omega t$$

$$u_{\mathrm{u}}(l,t) = 0$$

Warunki brzegowe dla stanu przejściowego

$$u_{\mathrm{p}}(0,t) = 0$$

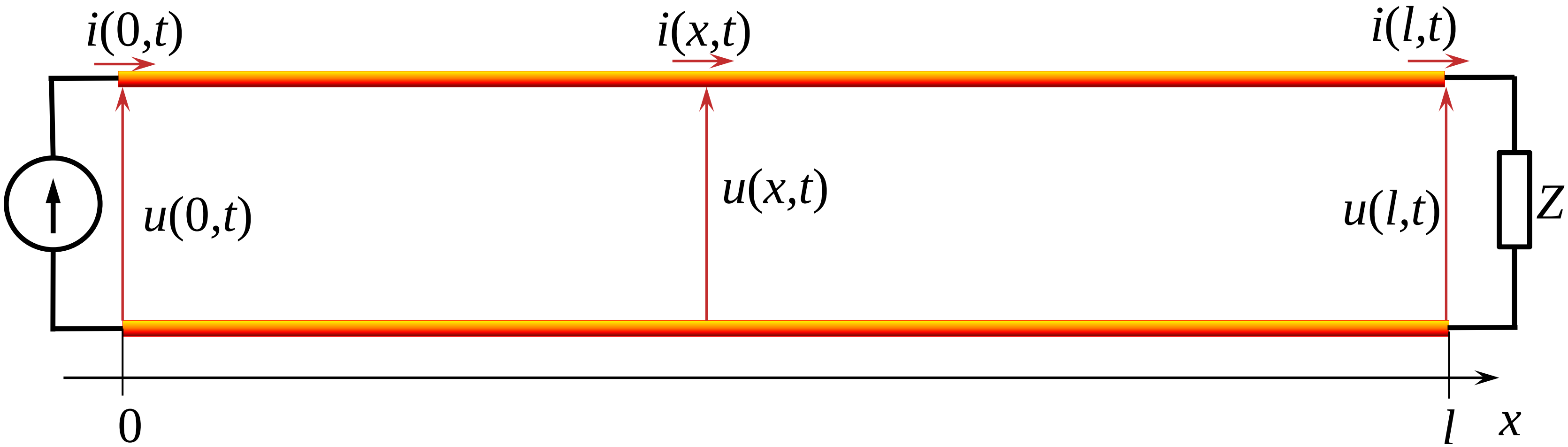
$$u_{p}(l,t) = 0$$

Warunki początkowe dla stanu przejściowego

$$u_{\mathrm{p}}(x,0) = -u_{\mathrm{u}}(x,0)$$

$$i_{\mathrm{p}}(x,0) = -i_{\mathrm{u}}(x,0)$$

Obliczanie stanu ustalonego



Przewidujemy rozwiązanie w postaci:

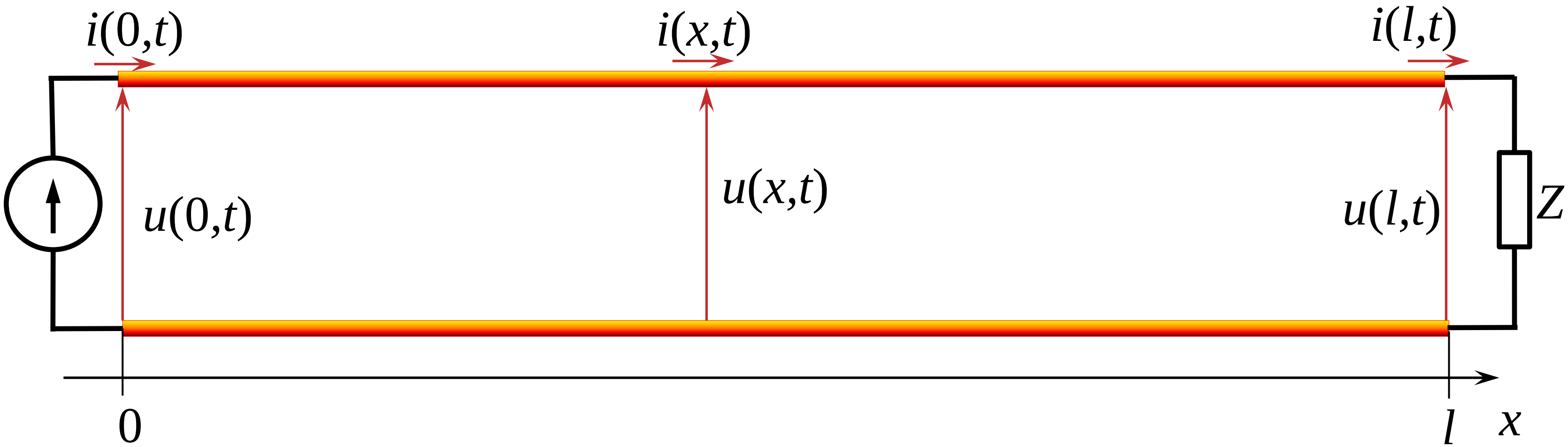
$$u_u(x,t) = f(x)\sin\omega t + g(x)\cos\omega t$$

Obliczamy pochodne:

$$\frac{\partial u_u}{\partial x} = f'(x)\sin\omega t + g'(x)\cos\omega t \qquad \frac{\partial u_u}{\partial t} = \omega f(x)\cos\omega t - \omega g(x)\sin\omega t$$

$$\frac{\partial^2 u_u}{\partial x^2} = f''(x)\sin\omega t + g''(x)\cos\omega t \qquad \frac{\partial^2 u_u}{\partial t^2} = -\omega^2 f(x)\sin\omega t - \omega^2 g(x)\cos\omega t$$

Obliczanie stanu ustalonego



Podstawiamy do równania falowego: $$\frac{\partial^2 u_u}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 u_u}{\partial t^2}$$

$$f''(x)\sin\omega t + g''(x)\cos\omega t = -\omega^2 LC\big(f(x)\sin\omega t + g(x)\cos\omega t\big)$$

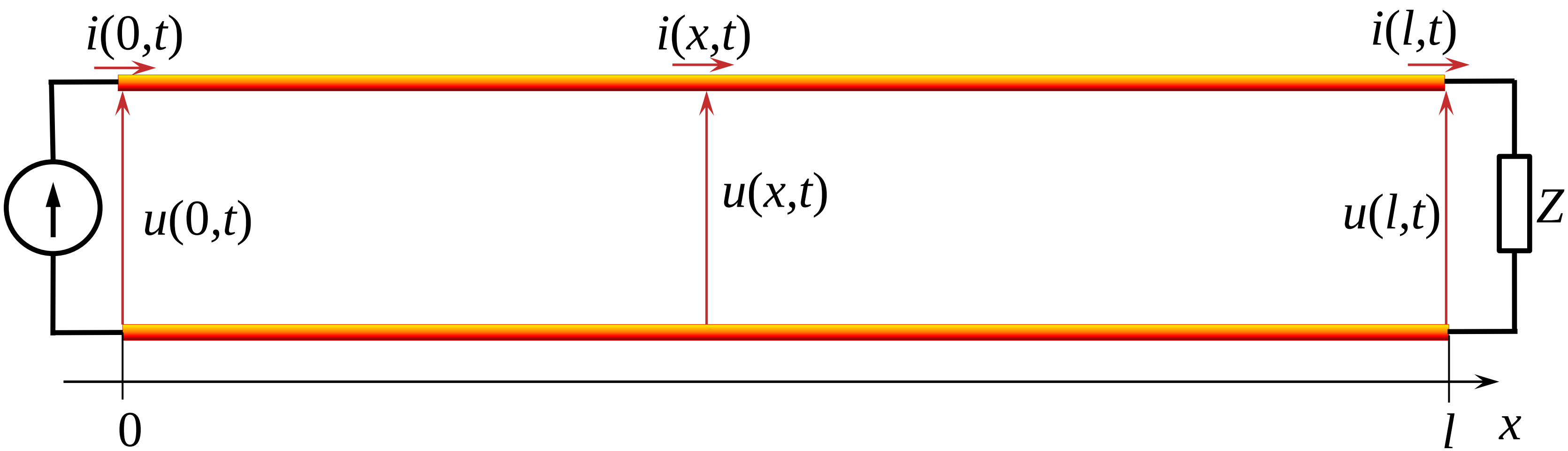
Stąd: $f''(x) = -k^2 f(x)$ $\qquad$ $g''(x) = -k^2 g(x)$

gdzie: $k = \omega\sqrt{LC}$

Rozwiązania:

$f(x) = A\sin kx + B\cos kx$ $\qquad$ $g(x) = C\sin kx + D\cos kx$

Obliczanie stanu ustalonego



Korzystamy z warunków brzegowych:

$$u_u(0,t) = U\sin\omega t \quad \Rightarrow \quad f(0)\sin\omega t + g(0)\cos\omega t = U\sin\omega t \quad \Rightarrow \quad f(0) = U, \quad g(0) = 0$$

$$u_u(l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(l)\sin\omega t + g(l)\cos\omega t = 0 \quad \Rightarrow \quad f(l) = 0, \quad g(l) = 0$$

Stąd mamy:

$$f(0) = A\sin k0 + B\cos k0 = B = U$$

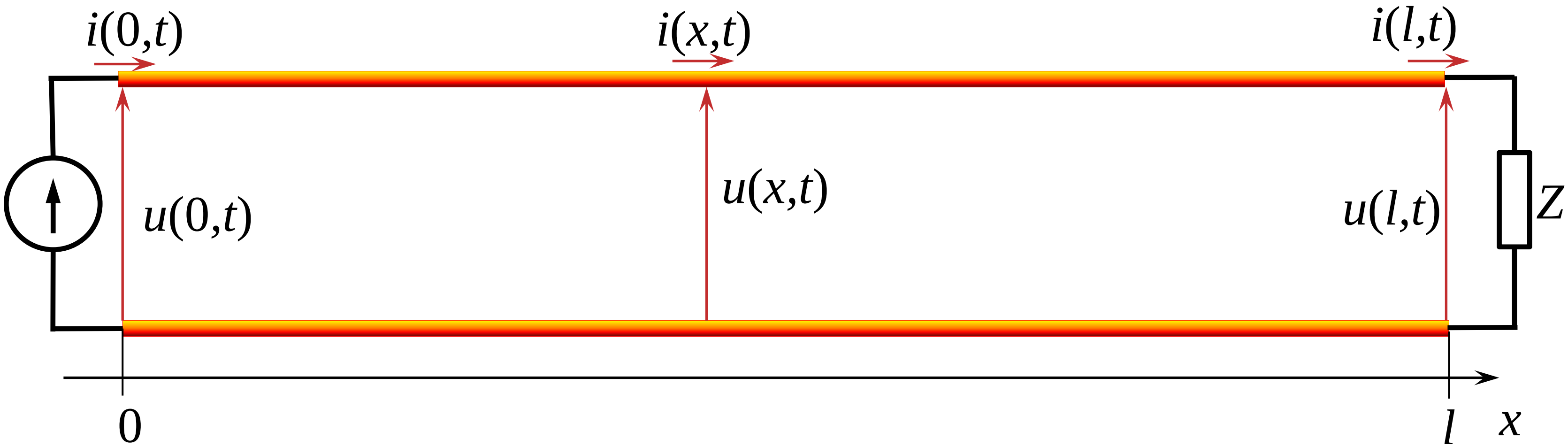
$$f(l) = A\sin kl + B\cos kl = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -U\operatorname{ctg} kl$$

oraz:

$$g(0) = C\sin k0 + D\cos k0 = D = 0$$

$$g(l) = C\sin kl = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

Obliczanie stanu ustalonego



Po podstawieniach otrzymujemy ostatecznie (stan ustalony):

$$u_{\mathrm{u}}(x,t) = U\left(\cos kx - \operatorname{ctg} kl \sin kx\right)\sin \omega t$$