Metody Obliczeniowe w Elektrotechnice

Stanisław Pawłowski
Zakład Elektrodynamiki i Systemów Elektromaszynowych

Kontakt:
Budynek B pokój 301
Mail: spawlo@prz.edu.pl
Tel.: 17 865 1305

Równania różniczkowe liniowe ze zmiennymi współczynnikami

Ogólna klasyfikacja równań różniczkowych

Równanie różniczkowe zwyczajne, liniowe

$$a_n(x)f^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x)+\ldots+a_1(x)f'(x)+a_0(x)f(x)=b(x)$$

gdzie $f(x)$ - funkcja poszukiwana, $a_n(x)$ – współczynniki funkcyjne równania (funkcje zadane), $b(x)$ – wyraz wolny równania (funkcja zadana)

Równanie różniczkowe liniowe jednorodne

- równanie, w którym nie występuje wyraz wolny ($b(x) = 0$).

Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne

- równanie, w którym wyraz wolny jest różny od zera ($b(x) \neq 0$).

Równanie Eulera

Jest to równanie różniczkowe liniowe, którego współczynniki są funkcjami:

$$a_k(x) = c_k x^k$$

czyli ma ono następującą postać ogólną:

$$c_n x^n f^{(n)}(x) + c_{n-1} x^{n-1} f^{(n-1)}(x) + \ldots + c_1 x f'(x) + c_0 f(x) = b(x)$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego uzyskuje się stosując podstawienie w postaci funkcji potęgowej:

$$f(x) = x^s$$

Przykład 1

$$x^2 f''(x) - 2f(x) = 0$$

Rozwiązanie

$$f(x) = x^s, \qquad f'(x) = sx^{s-1}, \qquad f''(x) = s(s-1)x^{s-2}$$

$$x^2 s(s-1)x^{s-2} - 2x^s = 0$$

$$s(s-1)x^s - 2x^s = 0$$

$$(s^2 - s - 2)x^s = 0$$

$$s^2 - s - 2 = 0$$

$$\Delta = 1^2 + 4 \cdot 2 = 9$$

$$s_1 = \frac{1-3}{2} = -1$$

$$s_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$f_1(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}, \qquad f_2(x) = x^2$$

$$f(x) = A\frac{1}{x} + Bx^2$$

Przykład 2

$$x^2 f''(x) + 5xf'(x) + 3f(x) = 0$$

Rozwiązanie

$$f(x) = x^s, \qquad f'(x) = sx^{s-1}, \qquad f''(x) = s(s-1)x^{s-2}$$

$$x^2 s(s-1)x^{s-2} + 5xsx^{s-1} + 3x^s = 0$$

$$s(s-1)x^s + 5sx^s + 3x^s = 0$$

$$(s^2 - s + 5s + 3)x^s = 0$$

$$s^2 + 4s + 3 = 0$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 = 4$$

$$s_1 = \frac{-4-2}{2} = -3$$

$$s_2 = \frac{-4+2}{2} = -1$$

$$f_1(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}, \qquad f_2(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = A\frac{1}{x^3} + B\frac{1}{x}$$

Równania Bessela

Niezmodyfikowane równanie Bessela

$$f''(x)+\frac{1}{x}f'(x)+\left(\sigma^2-\frac{\nu^2}{x^2}\right)f(x)=b(x)$$

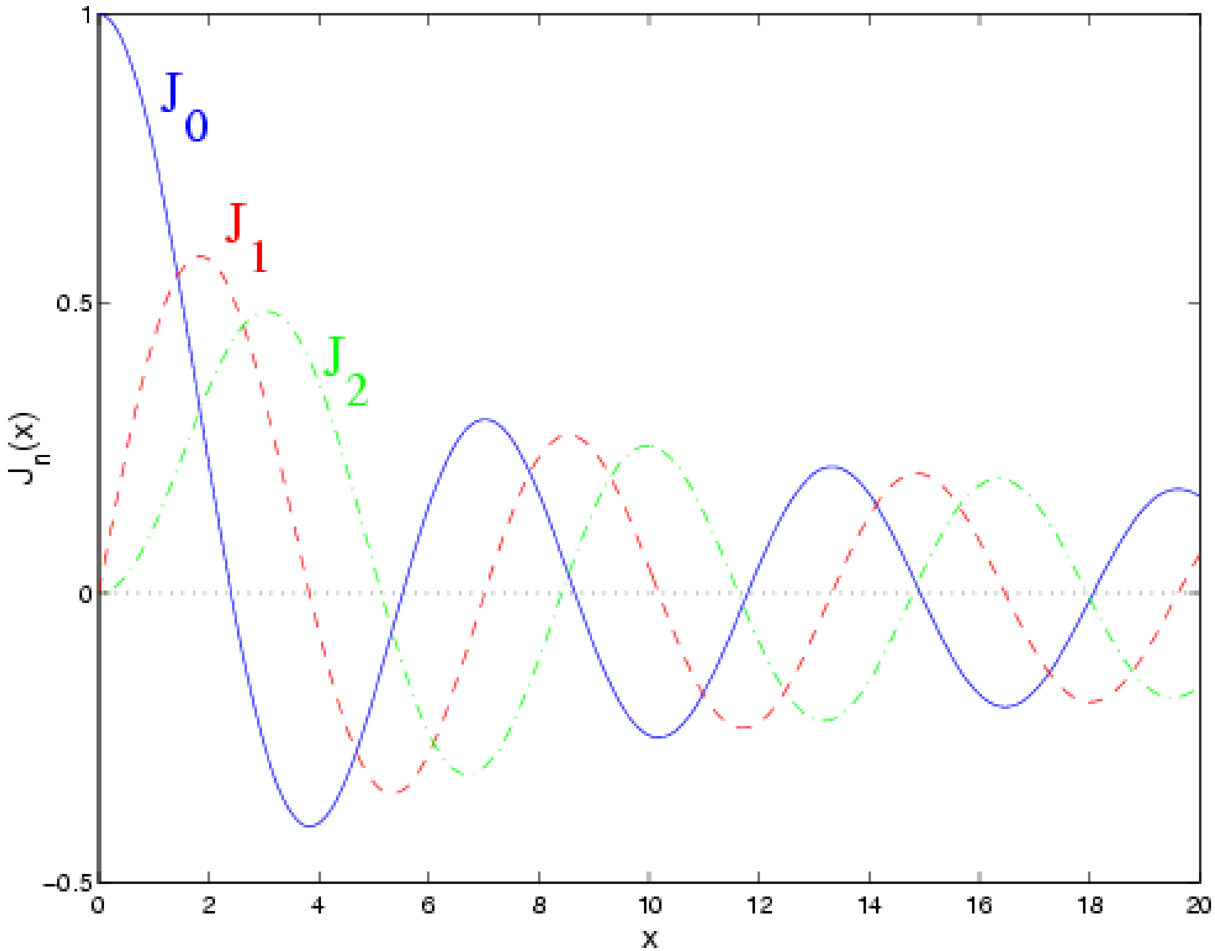
Rozwiązań jednorodnego równania Bessela nie da się przedstawić za pomocą jakiejkolwiek kombinacji funkcji elementarnych. Są nimi nowe funkcje (należące do kategorii tzw. funkcji specjalnych) nazywane funkcjami Bessela. Oznaczane są one jako:

$J_\nu(\sigma x)$ - funkcje Bessela pierwszego rodzaju

$Y_\nu(\sigma x)$ - funkcje Bessela drugiego rodzaju (funkcja Neumanna)

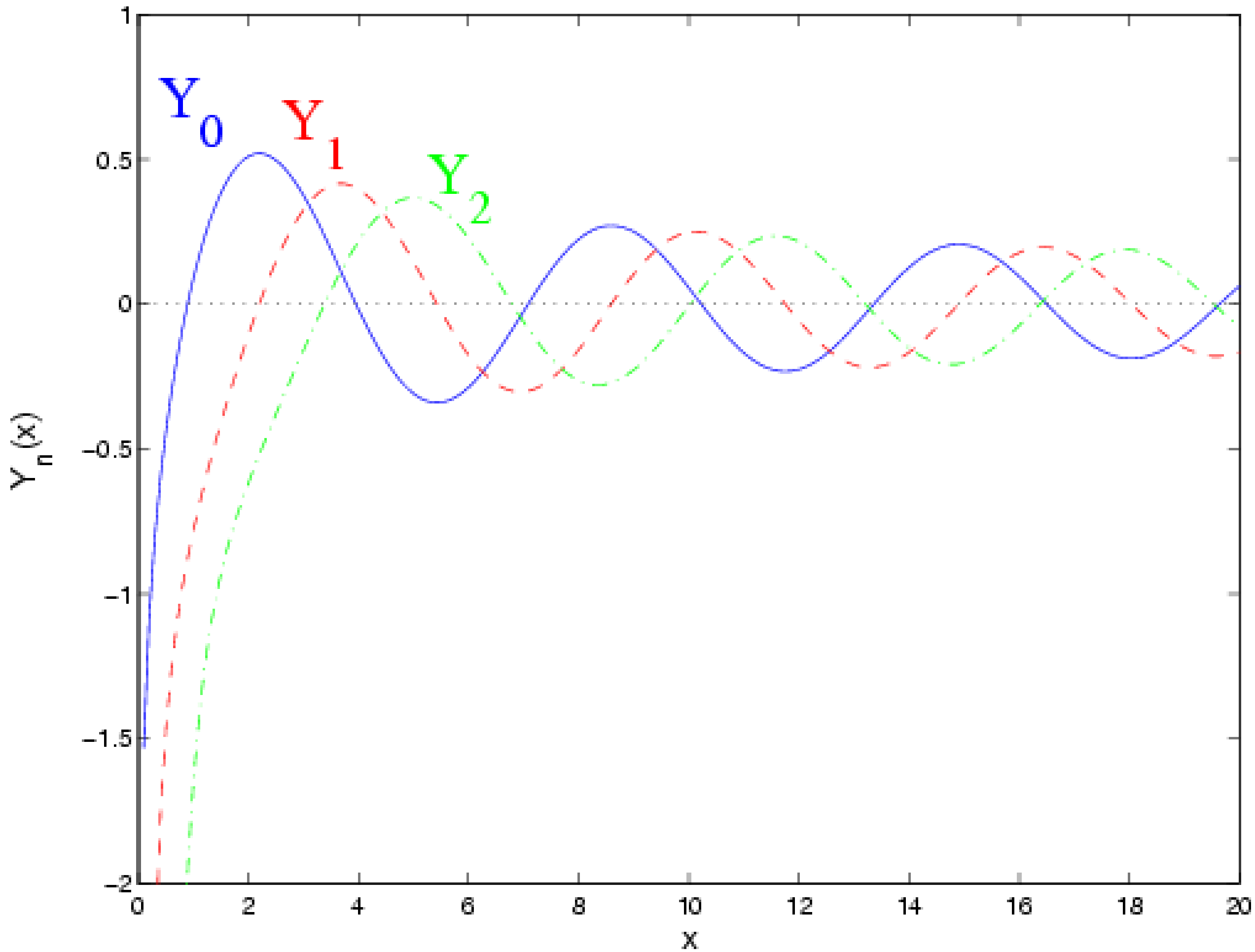
Funkcje Bessela pierwszego rodzaju

$$J_\nu(\sigma x)$$



Funkcje Bessela drugiego rodzaju

$$Y_\nu(\sigma x)$$



Rozwiązanie ogólne jednorodnego równania Bessela

$$f(x) = AJ_\nu(\sigma x) + BY_\nu(\sigma x)$$

Rozwinięcia funkcji Bessela w szeregi potęgowe

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

$$Y_\nu(x) = \lim_{\mu \to \nu} \frac{J_\mu(x)\cos(\pi\mu) - J_\mu(x)}{\sin(\pi\mu)}$$

Zmodyfikowane równanie Bessela

$$f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) - \left(\sigma^2 + \frac{\nu^2}{x^2} \right) f(x) = b(x)$$

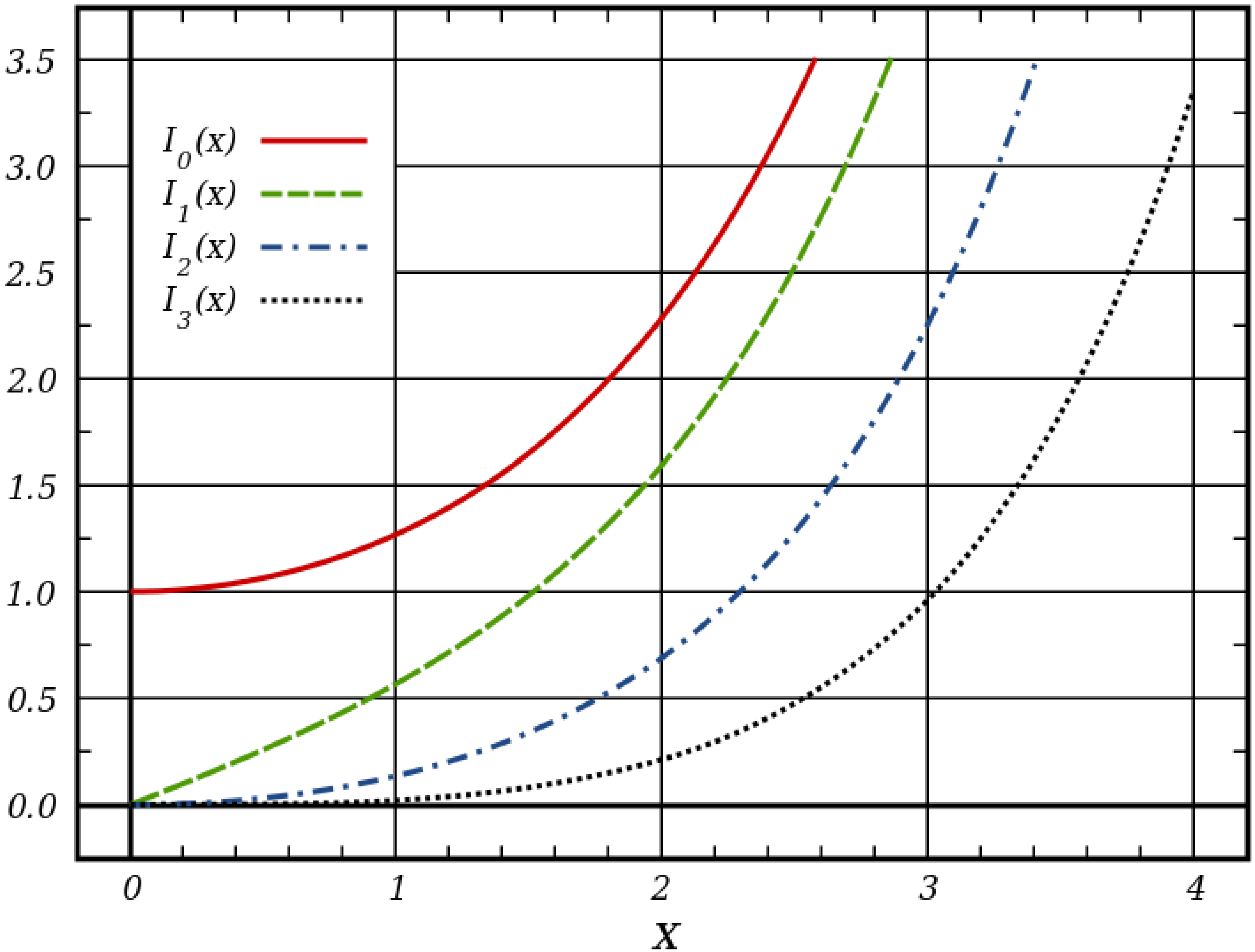
Rozwiązania szczególne jednorodnego, zmodyfikowanego równania Bessela:

$I_\nu(\sigma x)$ - zmodyfikowane funkcje Bessela pierwszego rodzaju

$K_\nu(\sigma x)$ - zmodyfikowane funkcje Bessela drugiego rodzaju

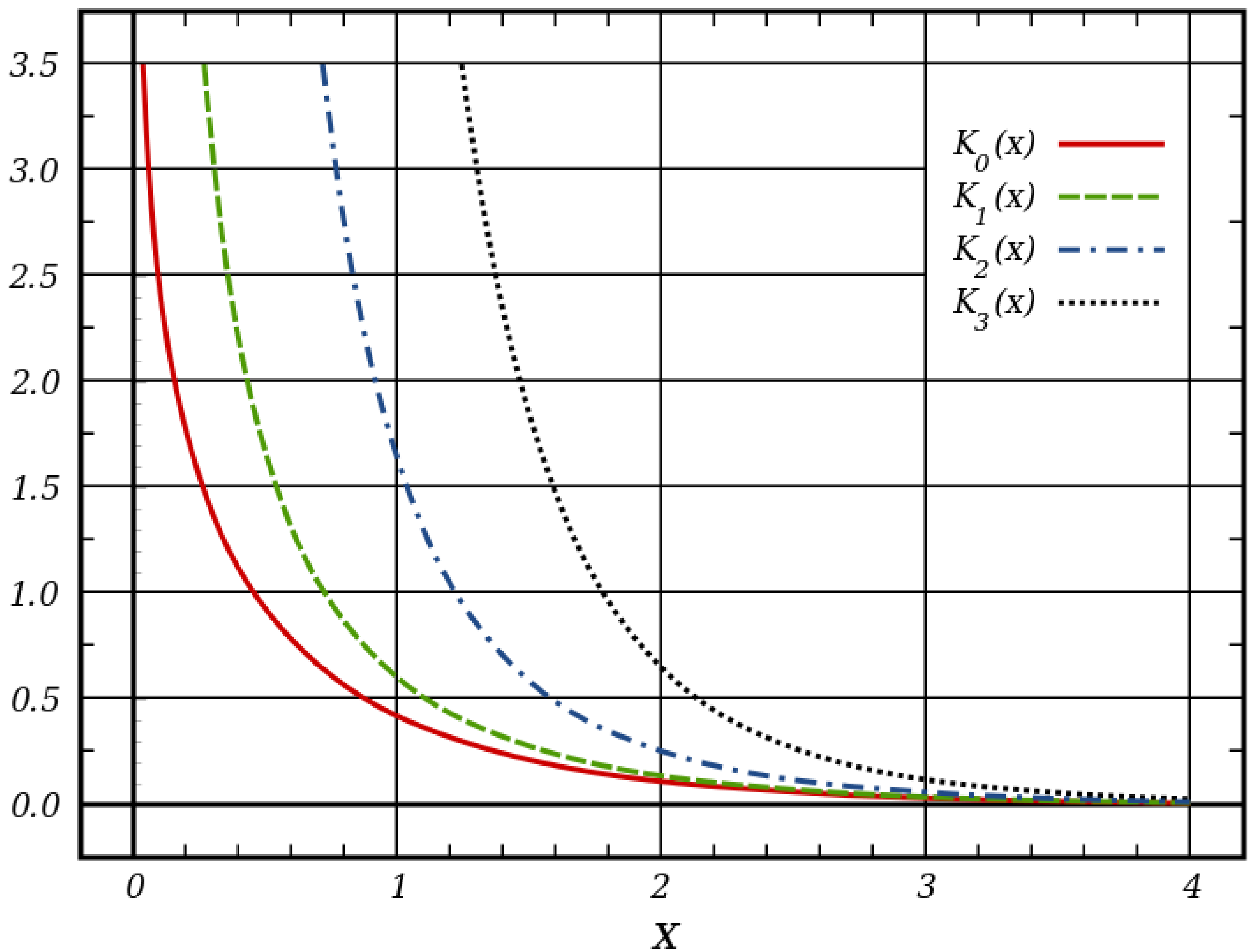
Zmodyfikowana funkcja Bessela pierwszego rodzaju

$$I_\nu(\sigma x)$$



Zmodyfikowana funkcja Bessela drugiego rodzaju

$$K_\nu(\sigma x)$$



Rozwiązanie ogólne zmodyfikowanego równania Bessela

$$f(x) = AI_\nu(\sigma x) + BK_\nu(\sigma x)$$

Rozwinięcia zmodyfikowanych funkcji Bessela w szeregi potęgowe

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+n}$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\pi\nu)}$$