Metody Obliczeniowe w Elektrotechnice

Stanisław Pawłowski
Zakład Elektrodynamiki i Systemów Elektromaszynowych

Kontakt:
Budynek B pokój 301
Mail: spawlo@prz.edu.pl
Tel.: 17 865 1305

Równania różniczkowe zwyczajne

Pojęcia podstawowe

1. Równanie różniczkowe
- jest to równanie, w którym niewidomą jest funkcja i które zawiera pochodną tej funkcji dowolnego rzędu. Inaczej – równanie określające zależność funkcji poszukiwanej od jej pochodnej0

2. Równanie różniczkowe zwyczajne
- jest to równanie różniczkowe, w którym funkcja niewiadoma jest funkcją jednej zmiennej (czyli występują w nim tylko pochodne zwyczajne).

3. Równanie różniczkowe cząstkowe
- jest to równanie różniczkowe, w którym funkcja niewiadoma jest funkcją co najmniej dwóch zmiennych i występują w nim pochodne cząstkowe.

4. Rząd równania różniczkowego
- jest to rząd najwyższej pochodnej występującej w równaniu różniczkowym.

5. Równanie różniczkowe zwyczajne, liniowe

- jest to równanie, które daje się zapisać w postaci:

$$a_n(x)f^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)f^{(n-1)}(x)+\ldots+a_1(x)f'(x)+a_0(x)f(x)=b(x) \qquad (1)$$

gdzie $f(x)$ - funkcja poszukiwana, $a_n(x)$ – współczynniki funkcyjne równania (funkcje zadane), $b(x)$ – wyraz wolny równania (funkcja zadana)

6. Równanie różniczkowe liniowe ze stałymi współczynnikami

- jest to równanie, w którym wszystkie współczynniki są stałe ($a_n(x) = \mathrm{const}$).

7. Równanie różniczkowe liniowe ze zmiennymi współczynnikami

- równanie, w którym co najmniej jeden ze współczynników $a_n(x)$ nie jest stały.

8. Równanie różniczkowe liniowe jednorodne

- równanie, w którym nie występuje wyraz wolny ($b(x) = 0$).

9. Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne

- równanie, w którym wyraz wolny jest różny od zera ($b(x) \neq 0$).

Ogólna klasyfikacja równań różniczkowych

Operator równania różniczkowego

Każde równanie różniczkowe możemy zapisać symbolicznie w postaci:

$$\hat{\mathrm{O}}\left[f \right] = g \tag{2}$$

gdzie $\hat{\mathrm{O}}$ nazywamy operatorem równania różniczkowego, f – funkcja poszukiwana, g – funkcja zadana. Operator równania różniczkowego jest wygodnym pojęciem upraszczającym wiele zapisów i dowodów. Dla równania zwyczajnego liniowego (1) ma on postać:

$$\hat{\mathrm{O}} = a_n(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_0(x) \tag{3}$$

Operatorem linowym nazywamy każdy operator, który posiada następujące własności:

$$\hat{\mathrm{L}}\left[f_1 + f_2 \right] = \hat{\mathrm{L}}\left[f_1 \right] + \hat{\mathrm{L}}\left[f_2 \right] \tag{4}$$

$$\hat{\mathrm{L}}\left[\alpha\, f \right] = \alpha\, \hat{\mathrm{L}}\left[f \right] \tag{5}$$

gdzie α jest dowolną stałą. Nietrudno udowodnić, że operator (3) jest operatorem liniowym (dlatego równanie (1) nazywamy równaniem liniowym). Przykładami operatorów liniowych dla funkcji wielu zmiennych (czyli równań różniczkowych cząstkowych) są operatory nabla i laplasjan.

Rozwiązania szczególne i ogólne równań różniczkowych

Najprostszym równaniem spełniającym definicję równania różniczkowego jest

$$f'(x) = 0 \qquad (6)$$

Jest to równanie zwyczajne, liniowe ze stałymi współczynnikami, pierwszego rzędu, jednorodne. Jego rozwiązaniem jest dowolna funkcja stała (bo pochodna z dowolnej stałej jest równa zeru). Oznacza to, że już to najprostsze równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań. Można udowodnić, że cechę tę posiada każde równanie liniowe (co do nieliniowych nie można już tak ogólnie powiedzieć, ale one też mają zwykle więcej niż jedno rozwiązanie). W związku z tym wprowadza się pojęcia rozwiązania szczególnego i ogólnego rozwiązania równania różniczkowego.

Rozwiązaniem szczególnym równania różniczkowego każdą funkcję, która je spełnia. Np. dla równania (2) rozwiązaniami szczególnymi mogą być: $f(x) = 0$, $f(x) = 2$ $f(x) = -7$ itp.

Rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego nazywamy zbiór wszystkich możliwych rozwiązań szczególnych. Dla równania (6) możemy je zapisać wzorem:

$$f(x) = A \qquad (7)$$

gdzie w miejsce symbolu A można podstawić dowolną liczbę.

Rozwiązania szczególne i ogólne równań różniczkowych

Rozpatrzmy nieco ciekawszy przypadek najprostszego równania różniczkowego drugiego rzędu

$$f''(x) = 0 \tag{8}$$

Łatwo sprawdzić, że jego rozwiązaniem jest każda funkcja liniowa, czyli rozwiązanie ogólne zapiszemy jako:

$$f(x) = Ax + B \tag{9}$$

Jak widać , występują tu dwie dowolne stałe. Dla podobnego równania trzeciego rzędu :

$$f'''(x) = 0 \tag{10}$$

rozwiązaniem ogólnym jest funkcja kwadratowa:

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C \tag{11}$$

Te proste przykłady sugerują, że rozwiązania ogólne równania zwyczajnego *n*-tego rzędu mogą składać się z *n* różnych funkcji, z których każda jest przemnożona przez dowolną stałą. Istotnie, okazuje się, że tę własność posiadają wszystkie liniowe równania różniczkowe zwyczajne. Aby ją jednak ściśle sprecyzować, niezbędne jest odróżnienie tzw. rozwiązań zależnych od niezależnych równania różniczkowego.

Rozwiązania liniowo zależne i liniowo niezależne

Niech $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ są dowolnymi funkcjami określonymi na tej samej dziedzinie, i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ dowolnymi stałymi. Kombinacją liniową funkcji $u_k(x)$ nazywamy każdą funkcję $f(x)$ określoną wyrażeniem

$$f(x) = \alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_2(x) + \ldots + \alpha_n u_n(x) \tag{12}$$

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest kombinacją liniową funkcji $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ to nazywamy ją liniowo zależną od tych funkcji. W przeciwnym przypadku funkcję $f(x)$ nazywamy liniowo niezależną od funkcji $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$.

Podczas rozwiązywania równań różniczkowych liniowych szczególnie ważne jest znalezienie zbioru ich wszystkich rozwiązań liniowo niezależnych. Przykładem takiego zbioru rozwiązań dla równania (11) może być następujący zbiór funkcji

$$u_1(x) = 1, \quad u_2(x) = x, \quad u_3(x) = x^2$$

albo taki: $u_1(x) = 5, \quad u_2(x) = 2x + 3, \quad u_3(x) = 3x^2 - 5x + 1$

Natomiast przykładem zbioru rozwiązań zależnych równania (11) może być:

$$u_1(x) = x + 1, \quad u_2(x) = x^2 + 2x \quad u_3(x) = x^2 + 4x + 2$$

ponieważ $u_3(x) = 2u_1(x) + u_2(x)$

Podstawowe twierdzenia dotyczące liniowych równań różniczkowych zwyczajnych

Podczas rozwiązywania liniowych równań różniczkowych zwyczajnych korzysta się z następujących twierdzeń:

1. Liczba rozwiązań niezależnych każdego liniowego równania różniczkowego zwyczajnego jest dokładnie równa rzędowi tego równania.

2. Rozwiązanie ogólne liniowego równania różniczkowego zwyczajnego <u>jednorodnego</u> jest kombinacją liniową wszystkich jego rozwiązań niezależnych

3. Rozwiązanie <u>ogólne</u> liniowego równania różniczkowego <u>niejednorodnego</u> jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i <u>dowolnego rozwiązania szczególnego</u> równania niejednorodnego.

Podstawowe twierdzenia dotyczące liniowych równań różniczkowych zwyczajnych

Uwagi

1. Należy szczególnie podkreślić, że w praktycznych zagadnieniach fizycznych czy technicznych, z reguły nie wystarcza znalezienie jakiegoś dowolnego rozwiązania danego równania różniczkowego (czyli rozwiązania szczególnego) i konieczne jest znalezienie jego wszystkich możliwych rozwiązań (czyli rozwiązania ogólnego). Spowodowane jest to tym, że poszukiwana funkcja fizyczna (np. natężenie prądu w obwodzie w funkcji czasu), poza samym równaniem, musi spełnić pewne dodatkowe warunki, których spełnienie jest na ogół możliwe dopiero wtedy, gdy znana jest postać rozwiązania ogólnego.

2. Twierdzenia podane na poprzednim slajdzie wyznaczają ogólną procedurę rozwiązywania liniowych równań różniczkowych zwyczajnych. Należy zwrócić uwagę, że dotyczy to zarówno równań ze stałymi jak i ze zmiennymi współczynnikami (patrz slajdy 4, 5). Niezależnie od tego czy równanie jest jednorodne czy niejednorodne, w pierwszym etapie należy znaleźć tyle niezależnych rozwiązań szczególnych równania jednorodnego, jaki jest rząd równania. Następnie należy utworzyć z tych rozwiązań kombinację liniową, która stanowi rozwiązanie ogólne równania jednorodnego. Jeśli równanie jest niejednorodne, należy jeszcze znaleźć jakiekolwiek rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego i dodać je do rozwiązania ogólnego równania jednorodnego (tw. 3).

Metoda Eulera rozwiązywania liniowych równań różniczkowych zwyczajnych ze stałymi współczynnikami

Najbardziej ogólną metodą rozwiązywania liniowych równań różniczkowych zwyczajnych ze stałymi współczynnikami jest metoda Eulera. Zostanie ona przedstawiona na konkretnych przykładach

Przykład 1. Znaleźć rozwiązanie ogólne następującego równania różniczkowego:

$$f''(x) - 4f(x) = 2x^2 \tag{13}$$

Zanim zaczniemy rozwiązywać równanie różniczkowe należy je odpowiednio zaklasyfikować (patrz slajd 5), ponieważ sposób jego rozwiązywania oczywiście zależy od tego jakie to jest równanie. Widzimy, że jest to równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu, liniowe, ze stałymi współczynnikami, niejednorodne. Na podstawie twierdzenia 1 wiemy, że takie równanie musi posiadać dwa rozwiązania niezależne.

Rozwiązanie

Etap 1. Poszukiwanie rozwiązania ogólnego równania jednorodnego.

Zapisujemy równanie (13) jako jednorodne , tzn. wpisując po jego prawej stronie zero:

$$f_0''(x) - 4 f_0(x) = 0 \tag{14}$$

Do symbolu funkcji dodano indeks 0 ponieważ funkcja będąca rozwiązaniem równania jednorodnego (14) nie jest rozwiązaniem równania niejednorodnego (13) i funkcje te musimy odróżniać.
Metoda Eulera polega na przewidywaniu rozwiązania tego typu równań w postaci funkcji wykładniczej, tzn.:

$$f_0(x) = \mathrm{e}^{sx} \tag{15}$$

gdzie s jest pewną stałą, której wartość musimy dopiero znaleźć. W tym celu obliczamy pierwszą i drugą pochodną tej funkcji i podstawiamy do równania (14).

$$f_0'(x) = s\,\mathrm{e}^{sx} \qquad f_0''(x) = s^2\,\mathrm{e}^{sx} \tag{16}$$

Podstawiamy (16) do równania (14):

$$s^2 e^{sx} - 4e^{sx} = 0$$

$$\left(s^2 - 4\right)e^{sx} = 0 \qquad (17)$$

Lewa strona ostatniego równania jest iloczynem dwóch wielkości, a prawa zerem. Oznacza to, że co najmniej z czynników tego iloczynu musi się równać zeru. Funkcja wykładnicza nigdy nie przyjmuje wartości zerowej, zatem:

$$s^2 - 4 = 0 \qquad (18)$$

Równanie powyższe nazywa się równaniem charakterystycznym równania (14). Nietrudno zauważyć, że opisana wyżej procedura zawsze prowadzi do równania charakterystycznego, które jest algebraicznym równaniem o stopniu równym rzędowi równania różniczkowego.

Rozwiązaniami równania (18) są oczywiście

$$s_1 = -2 \qquad\qquad s_2 = 2 \qquad (19)$$

Podstawiając rozwiązania (19) do (15) otrzymujemy dwa liniowo niezależne rozwiązania szczególne równania (14):

$$f_{0,1}(x) = \mathrm{e}^{-2x} \qquad\qquad f_{0,2}(x) = \mathrm{e}^{2x} \tag{20}$$

Ponieważ równanie (14) jest rzędu 2, zgodnie z twierdzeniem 1 mamy pewność, że nie istnieją żadne inne rozwiązania liniowo niezależne od tych dwóch, a zgodnie z twierdzeniem 2, rozwiązanie ogólne równania (14) otrzymamy tworząc ich kombinację liniową:

$$f_0(x) = A\mathrm{e}^{-2x} + B\mathrm{e}^{2x} \tag{21}$$

W ten sposób kończy się etap 1, ale bardzo wskazane jest jeszcze sprawdzić, czy na pewno każde takie rozwiązanie (tzn. niezależnie od tego co podstawimy za A i B) spełnia równanie (14). W tym celu należy podstawić (19) do (14), policzyć drugą pochodną w (14) i sprawdzić, czy rzeczywiście lewa strona będzie się zerowała dla każdego A i B. Proszę to przeprowadzić samodzielnie.

Etap 2. Poszukiwanie rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego.

Zgodnie z twierdzeniem 3, musimy jeszcze znaleźć jakiekolwiek rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego (13):

$$f''(x) - 4f(x) = 2x^2$$

Rozwiązanie to będzie zależeć oczywiście od wyrazu wolnego równania, który zapisany jest tu po prawej stronie równania (zwykle tak się zapisuje równania różniczkowe, ale ten wyraz oczywiście też można przenieść na lewą stronę, jak też każdy wyraz z lewej strony można przenieść na prawą, dlatego przy klasyfikacji równania (jednorodne, czy niejednorodne) nie należy się zbytnio sugerować tym, co znajduje się po jego prawej stronie).
Niestety nie ma ogólnej recepty jak znaleźć takie rozwiązanie, tym niemniej dla wielu typów funkcji stanowiących wyraz wolny można bez większego trudu odgadnąć ich postać. Jeżeli wyraz wolny jest wielomianem, to należy przewidywać, że istnieje rozwiązanie szczególne równania, które też jest wielomianem tego samego stopnia. W naszym przypadku wyrazem wolnym jest funkcja kwadratowa (niepełna, ale to nie ma większego znaczenia), więc przewidujemy rozwiązanie również w postaci funkcji kwadratowej:

$$f_1(x) = ax^2 + bx + c \qquad (22)$$

Aby sprawdzić czy nasze przewidywanie jest prawidłowe podstawiamy je do równania (13):

$$\left(ax^2+bx+c\right)'' - 4\left(ax^2+bx+c\right) \stackrel{?}{=} 2x^2$$

$$\left(2ax+b\right)' - 4ax^2 - 4bx - 4c \stackrel{?}{=} 2x^2$$

$$2a - 4ax^2 - 4bx - 4c \stackrel{?}{=} 2x^2$$

$$-4ax^2 - 4bx + 2a - 4c \stackrel{?}{=} 2x^2$$

Lewa strona tej równości musi się równać prawej dla każdego x. Oznacza to, że równość ta może być spełniona tylko wtedy, gdy:

$$-4a = 2, \qquad 4b = 0, \qquad 2a - 4c = 0$$

Stąd: $$a = -\frac{1}{2}, \qquad b = 0, \qquad c = -\frac{1}{4}$$

Podstawiając to do (22) otrzymujemy poszukiwane rozwiązanie szczególne równania (13):

$$f_1(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4} \tag{23}$$

Etap 3. Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego

Zgodnie z twierdzeniem 3, rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego (21) i rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego (23):

$$f(x) = A\mathrm{e}^{-2x} + B\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}$$

Jest to więc ostatecznie rozwiązanie równania (13). Aby się jednak upewnić, że tak jest istotnie, należy podstawić tę funkcję do lewej strony tego równania i sprawdzić, czy po wykonaniu różniczkowania otrzymamy to samo co po prawej stronie, niezależnie od tego, co podstawimy za A i B. Czynność ta nie jest trudna, więc zawsze warto ją wykonać. Proszę ją przeprowadzić samodzielnie.

Przykład 2. Znaleźć rozwiązanie ogólne następującego równania różniczkowego:

$$f''(x) + 16 f(x) = 5\mathrm{e}^{2x}$$

oraz rozwiązanie szczególne spełniające warunki początkowe:

$$f(0) = 2 \qquad\qquad f'(0) = -1$$

Rozwiązanie

1. Poszukiwanie rozwiązania ogólnego równania jednorodnego

Podstawienie Eulera

$$f_0''(x) + 16 f_0(x) = 0$$

$$f_0(x) = \mathrm{e}^{sx} \quad \Rightarrow \quad f_0'(x) = s\,\mathrm{e}^{sx}, \qquad f_0''(x) = s^2\,\mathrm{e}^{sx}$$

$$s^2\,\mathrm{e}^{sx} + 16\mathrm{e}^{sx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(s^2 + 16\right)\mathrm{e}^{sx} = 0$$

Równanie charakterystyczne

$$s^2 + 16 = 0$$

Równanie to nie ma rozwiązań rzeczywistych. Z tego nie należy jednak wyciągać wniosku, że podstawienie Eulera było błędne, ponieważ istnieją rozwiązania zespolone:

$$s_1 = -\mathrm{j}4 \qquad s_2 = \mathrm{j}4$$

Zatem rozwiązaniami szczególnymi równania jednorodnego są funkcje zespolone:

$$f_{0,1}(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}4x} \qquad f_{0,2}(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}4x}$$

a rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego jest ich kombinacja liniowa

$$f_0(x) = A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}4x} + B\mathrm{e}^{\mathrm{j}4x}$$

Pozornie może się wydawać, że to oznacza iż rozwiązaniami tego równania mogą być tylko funkcje zespolone, jednak tak nie jest. Należy pamiętać, że za A, B możemy wstawić dowolne stałe (również zespolone) i w szczególności może to prowadzić do rozwiązań czysto rzeczywistych. Ponieważ bardzo często fizyczna interpelacja poszukiwanej funkcji wymusza, aby miała ona wartości wyłącznie rzeczywiste (np. oznaczają one chwilowe wartości prądu lub napięcia), więc konieczne jest zapisanie tego rozwiązania właśnie w postaci rzeczywistej.

W tym celu przekształcamy tę funkcję korzystając ze wzoru Eulera:

$$f_0(x) = A(\cos 4x - \mathrm{j}\sin 4x) + B(\cos 4x + \mathrm{j}\sin 4x) = (A+B)\cos 4x + \mathrm{j}(B-A)\sin 4x$$

Oznaczając:

$$C = A + B, \qquad D = \mathrm{j}(B-A)$$

otrzymujemy

$$f_0(x) = C\cos 4x + D\sin 4x$$

Jak widać, funkcja ta będzie funkcją rzeczywistą, gdy za C i D wstawimy liczby rzeczywiste. Przez bezpośrednie sprawdzenie można się też przekonać, że funkcje cos3x i sin3x są również rozwiązaniami szczególnymi rozwiązywanego równania jednorodnego. Nie ma w tym nic zaskakującego, ponieważ na mocy wzoru Eulera, funkcje te można przedstawić jako kombinacje liniowe wcześniej znalezionych rozwiązań szczególnych tego równania, tj. funkcji wykładniczych z urojonym wykładnikiem (patrz twierdzenie 2 z wykładu). Należy wyraźnie podkreślić, że tak zapisane rozwiązanie ogólne nie jest jakimś innym, nowym rozwiązaniem równania jednorodnego niż to poprzednie, a jedynie alternatywnym sposobem jego zapisania, dogodniejszym w przypadku gdy poszukujemy tylko rozwiązań rzeczywistych.

2. Poszukiwanie rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego.

Po prawej stronie równania niejednorodnego jest funkcja wykładnicza. W takim przypadku należy przewidywać, że istnieje rozwiązanie szczególne tego równania, które również ma postać funkcji wykładniczej o takim samym wykładniku (ponieważ każda pochodna funkcji wykładniczej jest do niej proporcjonalna):

$$f_1(x) = a\,e^{2x}$$

Sprawdzamy to podstawiając do równania:

$$\left(a\,e^{2x}\right)'' + 16\left(a\,e^{2x}\right) \stackrel{?}{=} 5\,e^{2x}$$

$$4a\,e^{2x} + 16a\,e^{2x} \stackrel{?}{=} 5\,e^{2x}$$

$$20a\,e^{2x} \stackrel{?}{=} 5\,e^{2x}$$

Stąd $$a = \frac{1}{4}$$

zatem $$f_1(x) = \frac{1}{4}e^{2x}$$

3. Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego (twierdzenie 3)

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x)$$

$$f(x) = C\cos 4x + D\sin 4x + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}$$

4. Znajdowanie rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego spełniającego warunki początkowe (wyznaczanie stałych C, D)

$$f(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad C\cos 0 + D\sin 0 + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{0} = 2 \quad \Rightarrow \quad C + \frac{1}{4} = 2 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{7}{4}$$

$$f'(x) = -C\sin 4x + D\cos 4x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$$

$$f'(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad -C\sin 0 + D\cos 0 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{0} = -1 \quad \Rightarrow \quad D + \frac{1}{2} = -1 \quad \Rightarrow \quad D = -\frac{3}{2}$$

Ostateczne rozwiązanie:

$$f(x) = \frac{7}{4}\cos 4x - \frac{3}{2}\sin 4x + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}$$

Przykład 3. Znaleźć rozwiązanie ogólne następującego równania różniczkowego:

$$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = \sin 3x$$

oraz rozwiązanie szczególne spełniające warunki początkowe:

$$f(0) = 1 \qquad\qquad f'(0) = 0$$

Rozwiązanie

1. Poszukiwanie rozwiązania ogólnego równania jednorodnego

$$f_0''(x) - 2f_0'(x) + 2f_0(x) = 0$$

Podstawienie Eulera

$$f_0(x) = \mathrm{e}^{sx} \quad\Rightarrow\quad f_0'(x) = s\,\mathrm{e}^{sx}, \qquad f_0''(x) = s^2\,\mathrm{e}^{sx}$$

$$s^2\,\mathrm{e}^{sx} - 2s\,\mathrm{e}^{sx} + 2\,\mathrm{e}^{sx} = 0 \quad\Rightarrow\quad \left(s^2 - 2s + 2\right)\mathrm{e}^{sx} = 0$$

Równanie charakterystyczne

$$s^2 - 2s + 2 = 0$$

Rozwiązanie równania charakterystycznego

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 2 = -4, \quad \sqrt{\Delta} = \mathrm{j}2$$

$$s_1 = \frac{2 - \mathrm{j}2}{2} = 1 - \mathrm{j} \qquad s_2 = \frac{2 + \mathrm{j}2}{2} = 1 + \mathrm{j}$$

$$f_{0,1}(x) = \mathrm{e}^{(1-\mathrm{j})x} = \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x} \qquad f_{0,2}(x) = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{j})x} = \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}$$

$$f_0(x) = A\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x} + B\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}x} = \mathrm{e}^{x}\left(A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x} + B\mathrm{e}^{\mathrm{j}x}\right)$$

Postępując podobnie jak w poprzednim zadaniu możemy to rozwiązanie doprowadzić do postaci, w której nie występują liczby zespolone:

$$f_0(x) = \mathrm{e}^{x}\left(C\cos x + D\sin x\right)$$

2. Poszukiwanie rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego.

Po prawej stronie równania niejednorodnego występuje funkcja sinus. W takim przypadku należy przewidywać, że istnieje rozwiązanie szczególne tego równania, które ma postać kombinacji liniowej funkcji sinus i kosinus od tego samego argumentu (przewidywanie, że może nim być tylko jedna z tych funkcji na ogół się w takich przypadkach nie udaje, ale zawsze można próbować):

$$f_1(x) = a\sin 3x + b\cos 3x$$

$$f_1'(x) = 3a\cos 3x - 3b\sin 3x \qquad f_1''(x) = -9a\sin 3x - 9b\cos 3x$$

Podstawiamy do równania :

$$-9a\sin 3x - 9b\cos 3x - 2(3a\cos 3x - 3b\sin 3x) + 2(a\sin 3x + b\cos 3x) = \sin 3x$$

Porządkujemy lewą stronę

$$(-7a + 6b)\sin 3x + (-7b - 6a)\cos 3x = \sin 3x$$

Aby równość ta była prawdziwa dla każdego x współczynniki przy sinusach i kosinusach po obu stronach powinny być jednakowe, zatem:

$$\begin{cases} -7a + 6b = 1 \\ -6a - 7b = 0 \end{cases}$$

Z drugiego z tych równań mamy:

$$b = -\frac{6}{7}a$$

a z pierwszego:

$$-7a - 6\frac{6}{7}a = 1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{85}{7}a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{7}{85} \quad \Rightarrow \quad b = \left(-\frac{6}{7}\right)\left(-\frac{7}{85}\right) = \frac{6}{85}$$

czyli:

$$f_1(x) = -\frac{7}{85}\sin 3x + \frac{6}{85}\cos 3x$$

3. Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego

$$f(x) = \mathrm{e}^x\left(C\cos x + D\sin x\right) - \frac{7}{85}\sin 3x + \frac{6}{85}\cos 3x$$

4. Znajdowanie rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego spełniającego warunki początkowe (wyznaczanie stałych C, D)

$$f(0)=1 \;\Rightarrow\; e^{0}\left(C\cos 0+D\sin 0\right)-\frac{7}{85}\sin 0+\frac{6}{85}\cos 0=1 \Rightarrow C+\frac{6}{85}=1 \Rightarrow C=\frac{79}{85}$$

$$f'(x)=e^{x}\left(C\cos x+D\sin x\right)+e^{x}\left(-C\sin x+D\cos x\right)-\frac{21}{85}\cos 3x-\frac{18}{85}\sin 3x=$$

$$=e^{x}\left(\left(C+D\right)\cos x+\left(D-C\right)\sin x\right)-\frac{21}{85}\cos 3x-\frac{18}{85}\sin 3x$$

$$f'(0)=0 \;\Rightarrow\; =e^{0}\left(\left(C+D\right)\cos 0+\left(D-C\right)\sin 0\right)-\frac{21}{85}\cos 30-\frac{18}{85}\sin 0=C+D-\frac{21}{85}=0$$

$$C+D=\frac{21}{85} \;\Rightarrow\; D=\frac{21}{85}-C=\frac{21}{85}-\frac{79}{85}=\frac{100}{85}$$

Ostateczne rozwiązanie:

$$f(x)=\frac{1}{85}\left(e^{x}\left(79\cos x+100\sin x\right)-7\sin 3x+6\cos 3x\right)$$

Przykład 4. Znaleźć rozwiązanie ogólne następującego równania różniczkowego:

$$f''(x) - 6f'(x) + 9f(x) = 3e^{-x}\cos x$$

oraz rozwiązanie szczególne spełniające warunki początkowe:

$$f(0) = -1 \qquad\qquad f'(0) = 1$$

Rozwiązanie

1. Poszukiwanie rozwiązania ogólnego równania jednorodnego

$$f_0''(x) - 6f_0'(x) + 9f_0(x) = 0$$

Jak w poprzednich przykładach stosujemy podstawienie Eulera i w analogiczny sposób dochodzimy do równania charakterystycznego:

$$s^2 - 6s + 9 = 0$$

Łatwo zauważyć, że równanie charakterystyczne dla każdego równania liniowego ze stałymi współczynnikami jest równaniem algebraicznym o stopniu równym rzędowi równania różniczkowego i ma takie same współczynniki. Pamiętając o tym można zawsze skrócić stosowaną dotąd procedurę pomijając poprzednie kroki (tzn. wypisując równanie charakterystyczne bezpośrednio na podstawie równania różniczkowego).

Rozwiązanie równania charakterystycznego

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{-(-6)}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad f_{0,1}(x) = \mathrm{e}^{3x}$$

Jak widać, w tym przypadku, po zastosowaniu podstawienia Eulera znajdujemy tylko jedno rozwiązanie szczególne, ponieważ równanie charakterystyczne ma tylko jeden pierwiastek. Zgodnie z twierdzeniem 1 z wykładu, równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu musi mieć jednak dokładnie dwa rozwiązania niezależne. Oznacza to, że tym drugim rozwiązaniem nie być już zwykła funkcja wykładnicza. Jak się okazuje, należy je przewidywać w postaci funkcji będącej iloczynem wyżej znalezionego pierwszego rozwiązania przez x, tzn.:

$$f_{0,2}(x) = x\,\mathrm{e}^{3x}$$

Sprawdźmy czy rzeczywiście ta funkcja spełnia nasze równanie. W tym celu obliczamy najpierw jej pierwszą i drugą pochodną, a następnie podstawiamy je do równania.

$$\left(f_{0,2}(x)\right)' = \left(x\,\mathrm{e}^{3x}\right)' = \mathrm{e}^{3x} + 3x\,\mathrm{e}^{3x} = (1+3x)\mathrm{e}^{3x}$$

$$\left(f_{0,2}(x)\right)'' = \left((1+3x)\mathrm{e}^{3x}\right)' = 3\,\mathrm{e}^{3x} + 3(1+3x)\mathrm{e}^{3x} = (6+9x)\mathrm{e}^{3x}$$

$$(6+9x)\mathrm{e}^{3x}-6(1+3x)\mathrm{e}^{3x}+9x\,\mathrm{e}^{3x}=(6-6+9x-18x+9x)\mathrm{e}^{3x}=0$$

Czyli rzeczywiście jest to rozwiązanie szczególne naszego równania jednorodnego, niezależne od znalezionego wcześniej z podstawienia Eulera (niezależność tych rozwiązań jest oczywista, bo nie da się jednego z nich przedstawić jako iloczyn drugiego przez stałą). Zatem rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego jest:

$$f_0(x)=f_{0,1}(x)+f_{0,2}(x)=A\mathrm{e}^{3x}+Bx\,\mathrm{e}^{3x}=(A+Bx)\mathrm{e}^{3x}$$

2. Poszukiwanie rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego.

Po prawej stronie równania niejednorodnego występuje iloczyn funkcji wykładniczej i kosinusa. Nauczeni doświadczeniem z poprzednich przykładów spodziewamy się, że jego rozwiązanie szczególne może mieć podobną postać, ale ponieważ podczas różniczkowania cosinus przechodzi w sinus i na odwrót, pewniej jest je przewidywać w postaci ogólniejszej:

$$f_1(x)=\mathrm{e}^{-x}(a\cos x+b\sin x)$$

Jak zwykle sprawdzamy to podstawiając to do naszego równania

$$f_1'(x) = -e^{-x}\left(a\cos x + b\sin x\right) + e^{-x}\left(-a\sin x + b\cos x\right) = e^{-x}\left(\left(b-a\right)\cos x - \left(b+a\right)\sin x\right)$$

$$f_1''(x) = \left(e^{-x}\left(\left(b-a\right)\cos x - \left(b+a\right)\sin x\right)\right)' =$$

$$= -e^{-x}\left(\left(b-a\right)\cos x - \left(b+a\right)\sin x\right) + e^{-x}\left(-\left(b-a\right)\sin x - \left(b+a\right)\cos x\right) =$$

$$= e^{-x}\left(\left(-b+a-b-a\right)\cos x + \left(b+a-b+a\right)\sin x\right) = e^{-x}\left(-2b\cos x + 2a\sin x\right)$$

$$e^{-x}\left(-2b\cos x + 2a\sin x\right) - 6e^{-x}\left(\left(b-a\right)\cos x - \left(b+a\right)\sin x\right) + 9e^{-x}\left(a\cos x + b\sin x\right) \stackrel{?}{=} 3e^{-x}\cos x$$

$$e^{-x}\left(\left(-2b-6b+6a+9a\right)\cos x + \left(2a+6b+6a+9b\right)\sin x\right) \stackrel{?}{=} 3e^{-x}\cos x$$

$$e^{-x}\left(\left(15a-8b\right)\cos x + \left(8a+15b\right)\sin x\right) \stackrel{?}{=} 3e^{-x}\cos x$$

Lewa strona będzie równa prawej dla każdego x tylko wtedy, gdy:

$$\begin{cases} 15a - 8b = 3 \\ 8a + 15b = 0 \end{cases}$$

Rozwiążemy ten układ metodą Cramera

$$W = \begin{vmatrix} 15 & -8 \\ 8 & 15 \end{vmatrix} = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289$$

$$W_a = \begin{vmatrix} 3 & -8 \\ 0 & 15 \end{vmatrix} = 45 \qquad W_b = \begin{vmatrix} 15 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -24$$

$$a = \frac{W_a}{W} = \frac{45}{289} \qquad b = \frac{W_b}{W} = \frac{-24}{289}$$

Czyli ostatecznie:

$$f_1(x) = \frac{e^{-x}}{289}\left(45\cos x - 24\sin x\right)$$

3. Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego

$$f(x) = \left(A + Bx\right)e^{3x} + \frac{e^{-x}}{289}\left(45\cos x - 24\sin x\right)$$

4. Znajdowanie rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego spełniającego warunki początkowe (wyznaczanie stałych C, D)

$$f(0)=-1 \;\Rightarrow\; (A+B\cdot 0)\mathrm{e}^{0}+\frac{\mathrm{e}^{-0}}{289}(45\cos 0-24\sin 0)=-1\Rightarrow\; A+\frac{45}{289}=-1\Rightarrow\; A=-\frac{334}{289}$$

$$f'(x)=\left((A+Bx)\mathrm{e}^{3x}+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{289}(45\cos x-24\sin x)\right)'=$$

$$=B\mathrm{e}^{3x}+3(A+Bx)\mathrm{e}^{3x}-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{289}(45\cos x-24\sin x)+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{289}(-45\sin x-24\cos x)=$$

$$=(3A+B+3Bx)\mathrm{e}^{3x}-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{289}(69\cos x+21\sin x)$$

$$f'(0)=1 \;\Rightarrow\; 3A+B-\frac{69}{289}=1 \quad\Rightarrow\quad B=1-3A+\frac{69}{289}=\frac{289+334+69}{289}=\frac{692}{289}$$

Ostateczne rozwiązanie:

$$f(x)=\frac{1}{289}\left((-334+692x)\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{-x}(45\cos x-24\sin x)\right)$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Znaleźć rozwiązanie ogólne następującego równań różniczkowych:

1. $3f''(x) + 2f'(x) - f(x) = 4x$

2. $f''(x) + 2f'(x) + 5f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$

3. $f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = 2\cos x$

oraz ich rozwiązania szczególne spełniające warunki początkowe:

$f(0) = 3$ $\qquad\qquad$ $f'(0) = -2$