POLITECHNIKA RZESZOWSKA
im. IGNACEGO ŁUKASIEWICZA

WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI I INFORMATYKI
POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ

Metody Obliczeniowe w Elektrotechnice

Stanisław Pawłowski
Zakład Elektrodynamiki i Systemów Elektromaszynowych

Kontakt:
Budynek B pokój 301
Mail: spawlo@prz.edu.pl
Tel.: 17 865 1305

Transformaty całkowe

Transformaty Fouriera

Transformaty (przekształcenia) całkowe są to pewnego rodzaju operatory, tzn. odwzorowania, którego argumentami są funkcje. Transformata całkowa z funkcji $f(x)$ w wyniku daje również funkcję, która najogólniej jest określona wzorem:

$$\boxed{F(s) = \int_a^b f(x) K(x,s) \, \mathrm{d}\, x}$$

gdzie:

$f(x)$ – funkcja transformowana nazywana *oryginałem*

$K(x,s)$ – funkcja określająca rodzaj transformaty, nazywana *jądrem*

$F(s)$ – funkcja będąca rezultatem transformaty, nazywana *obrazem* lub po prostu *transformatą* (niezbyt poprawnie, ale tak jest powszechnie przyjęte i nie prowadzi to do nieporozumień)

Transformatom, podobnie jak funkcjom, nadaje się pewne symbole litrowe. Np. przyjmując dla powyższej transformaty symbol $\mathscr{T}$ możemy zapisać:

$$\boxed{F(s) = \mathscr{T}\left[f(x)\right]}$$

Transformata odwrotna

Transformaty całkowe znajdują różnego rodzaju zastosowania, ale praktycznie tylko takie, dla których znana jest postać tzw. transformaty odwrotnej, czyli wzoru pozwalającego obliczyć oryginał $f(x)$ na podstawie jego obrazu $F(s)$. Jak się okazuje, wzory takie mają postać podobną do samej transformaty:

$$f(x) = \int_c^d F(s) K'(x,s) \, \mathrm{d}\, s$$

gdzie: $K'(x,s)$ jest jądrem transformaty odwrotnej.

Transformatę odwrotną do transformaty $\mathscr{T}$ zapisujemy symbolicznie jako $\mathscr{T}^{-1}$, czyli, jeżeli funkcja F jest obrazem transformaty $\mathscr{T}$ dla funkcji f, to:

$$f(x) = \mathscr{T}^{-1}\left[F(s)\right]$$

Transformata sinusowa Fouriera

Najszersze zastosowanie w fizyce i technice znajdują trzy transformaty Fouriera. Jako pierwszą podajemy transformatę sinusową Fouriera. Definiujemy ją następująco:

$$\mathscr{F}_{\mathrm{s}}\left[f(x)\right] = F(\omega) = \int_{0}^{\infty} f(x) \sin\omega x \,\mathrm{d}x$$

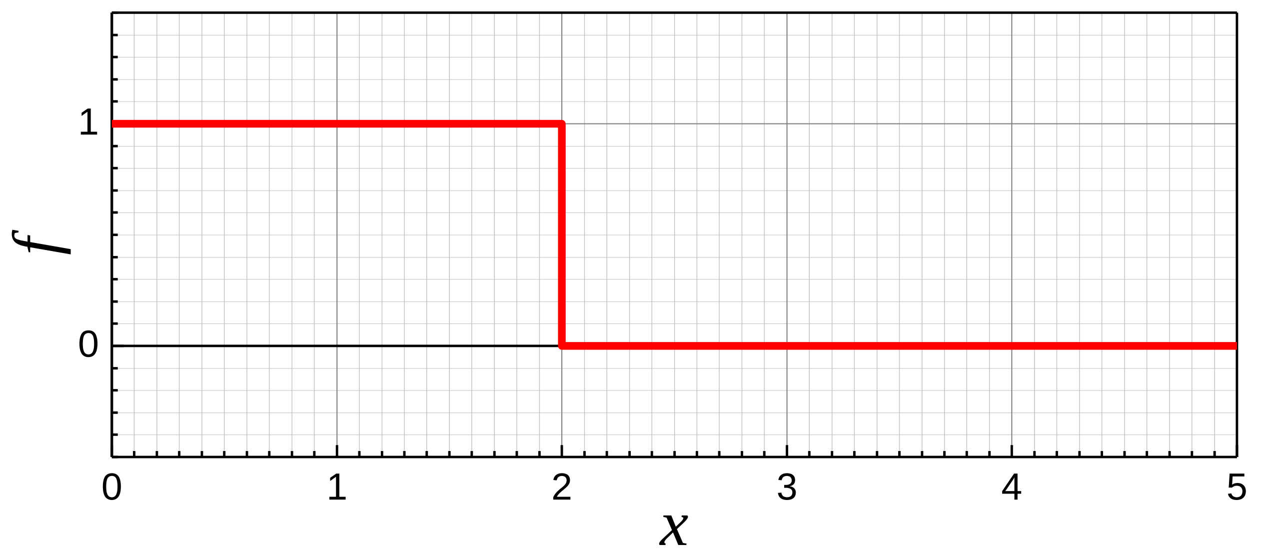
Wzór na transformatę do niej odwrotną przyjmuje postać:

$$\mathscr{F}_{\mathrm{s}}^{-1}\left[F(\omega)\right] = f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} F(\omega) \sin\omega x \,\mathrm{d}\omega$$

Transformata sinusowa Fouriera - przykład

Obliczymy transformatę sinusową Fouriera z funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

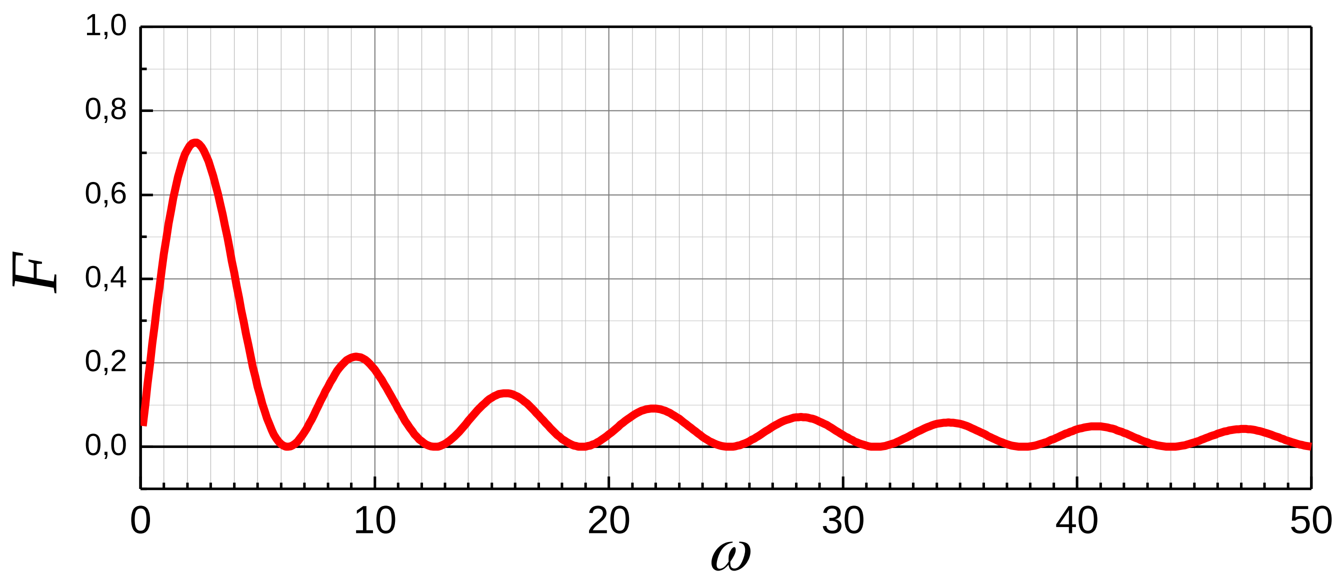


Transformata sinusowa Fouriera - przykład

$$\mathscr{F}_s\left[f\left(x\right)\right]=\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,\mathrm{d}\,x=\int_0^2 1\sin\omega x\,\mathrm{d}\,x+\int_2^\infty 0\sin\omega x\,\mathrm{d}\,x=-\frac{1}{\omega}\cos\omega x\Big|_0^2+0=$$

$$=\frac{1-\cos 2\omega}{\omega}$$

$$F(\omega)=\frac{1-\cos 2\omega}{\omega}$$

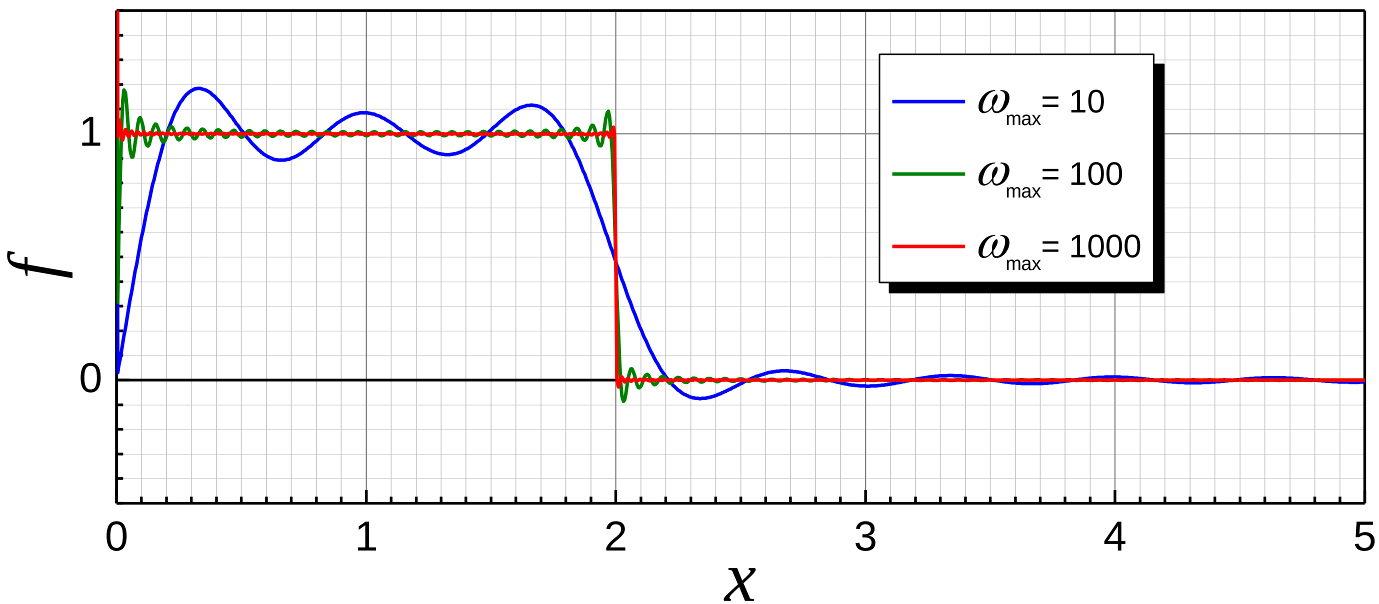


Transformata sinusowa Fouriera - przykład

Transformata odwrotna:

$$\mathscr{F}_s^{-1}\left[F(\omega)\right]=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos 2\omega}{\omega}\sin\omega x\,\mathrm{d}\omega \overset{?}{=} f(x)$$

Obliczenie numeryczne całki $\displaystyle \frac{2}{\pi}\int_0^{\omega_{\max}}\frac{1-\cos 2\omega}{\omega}\sin\omega x\,\mathrm{d}\omega$



Transformata kosinusowa Fouriera

Transformatę kosinusową Fouriera definiujemy podobnie:

$$\mathscr{F}_{\mathrm{c}}\left[f(x)\right] = F(\omega) = \int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\,\mathrm{d}x$$

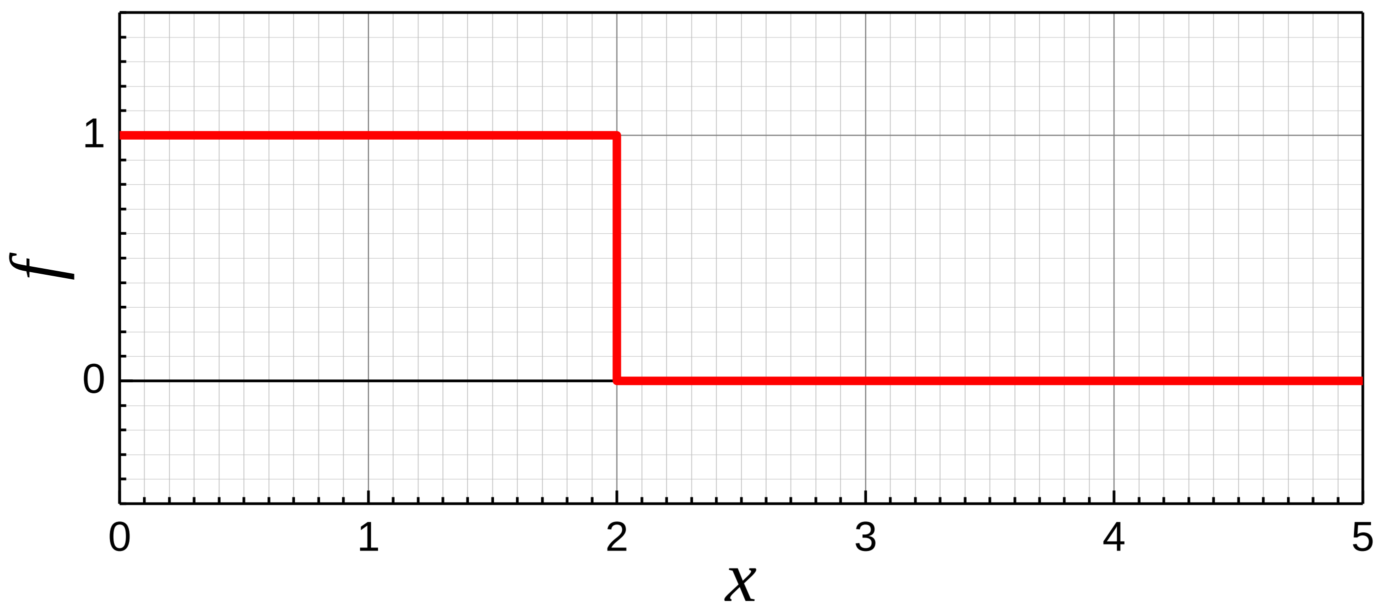
Podobnie też wygląda wzór na transformatę do niej odwrotną

$$\mathscr{F}_{\mathrm{c}}^{-1}\left[F(\omega)\right] = f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F(\omega)\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega$$

Transformata kosinusowa Fouriera - przykład

Obliczmy transformatę kosinusową Fouriera dla tej samej funkcji, dla której liczyliśmy transformatę sinusową:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

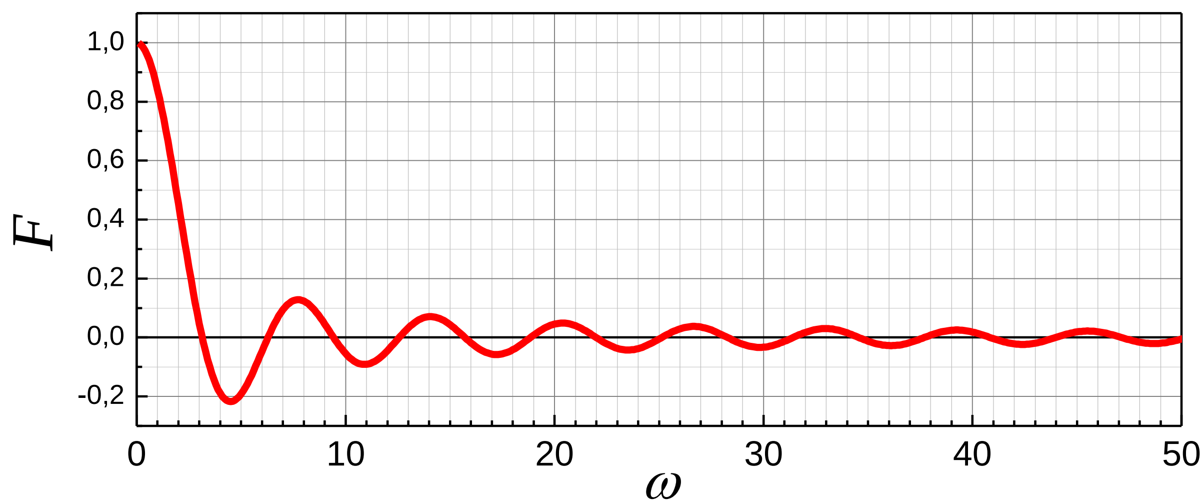


Transformata kosinusowa Fouriera - przykład

$$\mathscr{F}_s\left[f(x)\right]=\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x\,\mathrm{d}\,x=\int_0^{2}1\cos\omega x\,\mathrm{d}\,x+\int_1^{\infty}0\cos\omega x\,\mathrm{d}\,x=\frac{1}{\omega}\sin\omega x\Big|_0^2+0=$$

$$=\frac{\sin 2\omega}{\omega}$$

$$F(\omega)=\frac{\sin 2\omega}{\omega}$$

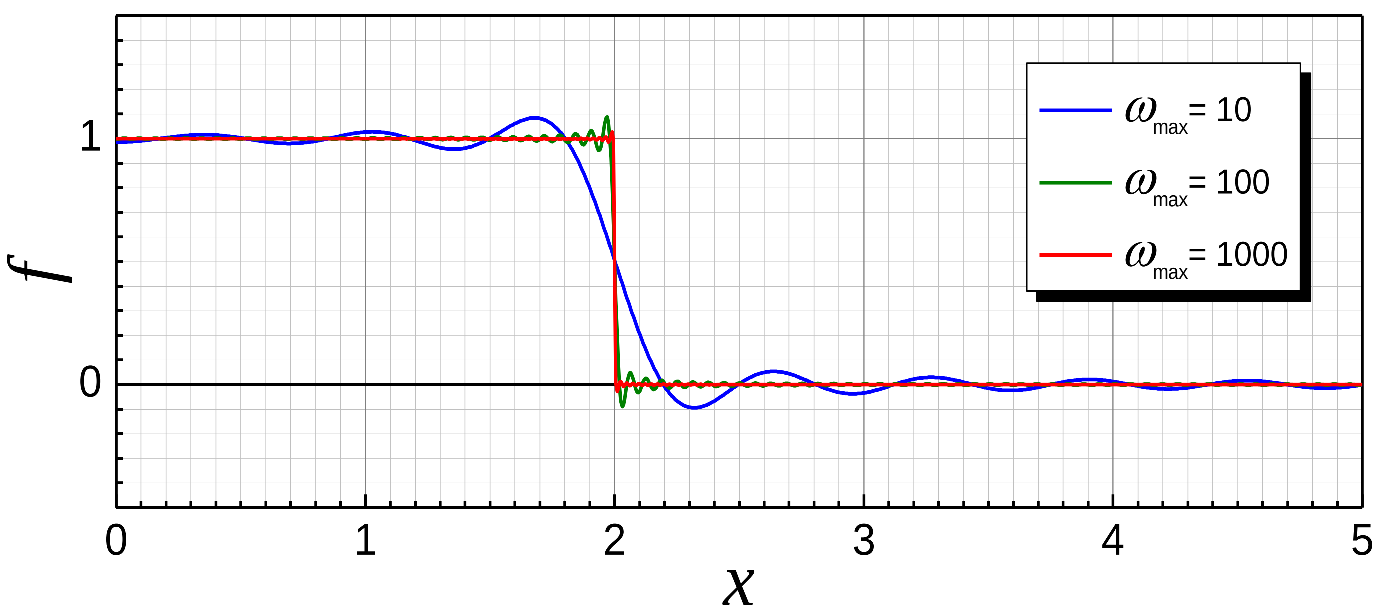


Transformata kosinusowa Fouriera - przykład

Transformata odwrotna:

$$\mathscr{F}_c^{-1}[F] = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin 2\omega}{\omega}\cos\omega x \, \mathrm{d}\omega$$

Obliczenie numeryczne całki $\displaystyle \frac{2}{\pi}\int_0^{\omega_{\max}} \frac{\sin 2\omega}{\omega}\cos\omega x \, \mathrm{d}\omega$



Transformata zespolona Fouriera

Zespoloną transformatę Fouriera definiujemy następująco:

$$\mathscr{F}\left[f\right] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x}\,\mathrm{d}x$$

I wzór na transformatę odwrotną:

$$\mathscr{F}^{-1}\left[F\right] = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega x}\,\mathrm{d}\omega$$

Interpretacja widmowa zespolonej transformaty Fouriera

Niech $$F(\omega) = \mathscr{F}\left[f(x)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x} \,\mathrm{d}\, x$$

Funkcja $F(\omega)$ ma wartości zespolone (na ogół), możemy ją zatem przedstawić w postaci wykładniczej, tzn.:

$$F(\omega) = \left|F(\omega)\right| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

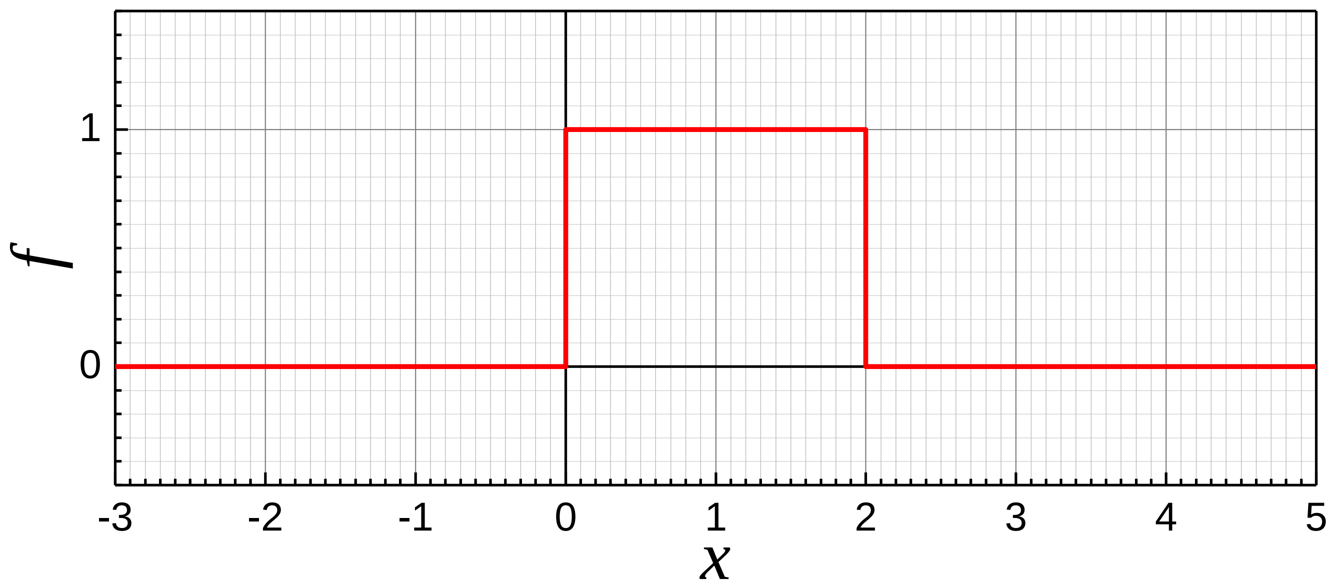
$|F(\omega)|$ - *widmo amplitudowe* funkcji $f(x)$

$\varphi(\omega) = \mathrm{Arg}(F(\omega))$ - *widmo fazowe* funkcji $f(x)$

Analiza harmoniczna funkcji nieokresowej przykład

Obliczymy widmo amplitudowe i fazowe dla funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \; x < 0 \\ 1 & \text{dla } \; 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{dla } \; x > 2 \end{cases}$$



Analiza harmoniczna funkcji nieokresowej przykład

Obliczamy transformatę zespoloną Fouriera

$$F(\omega) = \mathscr{F}\left[f(x)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} 1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x}\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{\infty} 0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 0 + \frac{1}{-\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega x}\Big|_{0}^{2} + 0 = \frac{\mathrm{j}}{\omega}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega} - 1\right) = \frac{\mathrm{j}}{\omega}\left(\cos 2\omega - \mathrm{j}\sin 2\omega - 1\right) = \frac{\sin 2\omega}{\omega} + \mathrm{j}\frac{\cos 2\omega - 1}{\omega}$$

Obliczamy widmo amplitudowe, czyli moduł $F(\omega)$:

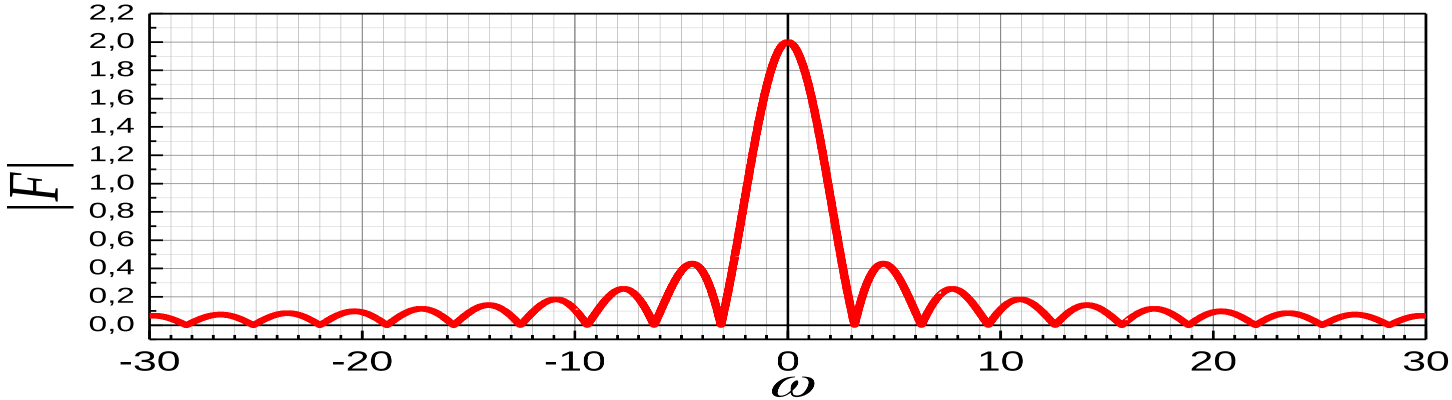
$$\left|F(\omega)\right| = \sqrt{\left(\frac{\sin 2\omega}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{\cos 2\omega - 1}{\omega}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sin^2 2\omega + \cos^2 2\omega - 2\cos 2\omega + 1}{\omega^2}} = \frac{\sqrt{2 - 2\cos 2\omega}}{\omega}$$

Obliczamy widmo fazowe:

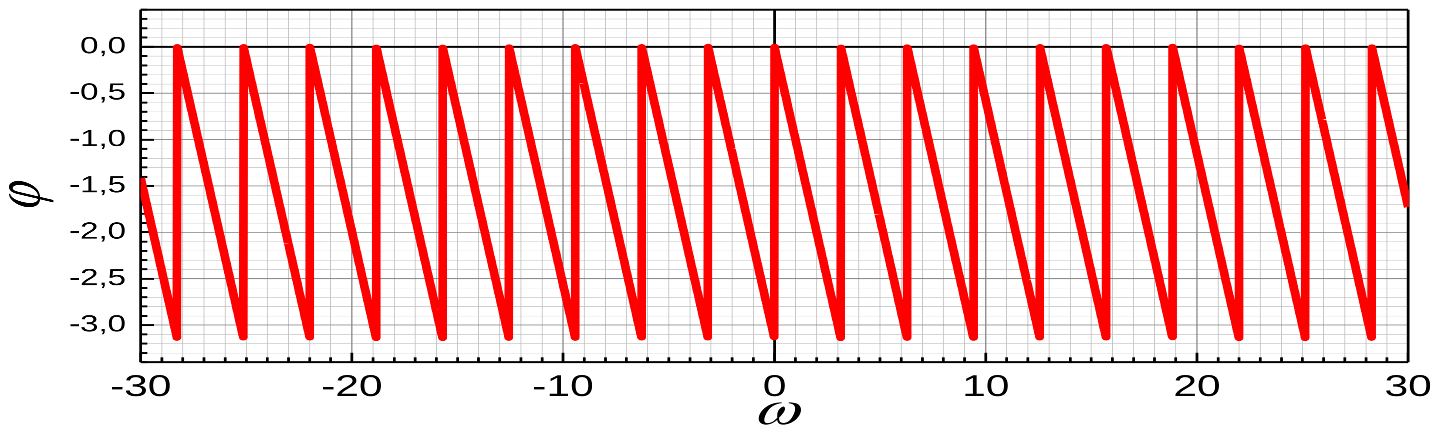
$$\operatorname{tg}\varphi(\omega) = \frac{\operatorname{Im} F(\omega)}{\operatorname{Re} F(\omega)} = \frac{\dfrac{\cos 2\omega - 1}{\omega}}{\dfrac{\sin 2\omega}{\omega}} = \frac{\cos 2\omega - 1}{\sin 2\omega} \quad \Rightarrow \quad \varphi(\omega) = \operatorname{atan2}\left(\cos 2\omega - 1,\ \sin 2\omega\right)$$

Analiza harmoniczna funkcji nieokresowej przykład

Widmo amplitudowe $\quad |F(\omega)| == \dfrac{\sqrt{2-2\cos 2\omega}}{|\omega|}$



Widmo fazowe $\quad \varphi(\omega) = \operatorname{atan} 2(\cos 2\omega - 1,\ \sin 2\omega)$



Własności zespolonej transformaty Fouriera

Jeżeli $F(\omega) = \mathscr{F}\left[f(x)\right]$ to:

1. Równość Parsevala (twierdzenie energetyczne Rayleigha)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) \right|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| F(\omega) \right|^2 \mathrm{d}\omega$$

Podstawiając $\omega = 2\pi\nu$ (w przypadku analizy przebiegów czasowych ν oznacza częstotliwość) możemy też tę równość zapisać nieco prościej:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) \right|^2 \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left| F(\nu) \right|^2 \mathrm{d}\nu$$

2. Transformata *n*-tej pochodnej $\mathscr{F}\left[f^{(n)}(x)\right] = (\mathrm{j}\omega)^n F(\omega)$

3. Transformata całki $\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{\mathrm{j}\omega} F(\omega)$

Własności zespolonej transformaty Fouriera

4. Przesunięcie argumentu oryginału

$$\mathscr{F}\left[f\left(x-x_0\right)\right]=e^{-\mathrm{j}\omega x_0}F\left(\omega\right)$$

5. Przesunięcie argumentu transformaty

$$\mathscr{F}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 x}f\left(x\right)\right]=F\left(\omega-\omega_0\right)$$

6. Przeskalowanie argumentu oryginału

$$\mathscr{F}\left[f\left(\frac{x}{a}\right)\right]=\left|a\right|F\left(a\omega\right)$$

7. Transformata splotu funkcji

$$f\left(x\right)\otimes g\left(x\right)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(t\right)g\left(x-t\right)\mathrm{d}t$$

$$\mathscr{F}\left[f\left(x\right)\otimes g\left(x\right)\right]=\mathscr{F}\left[f\left(x\right)\right]\cdot\mathscr{F}\left[g\left(x\right)\right]$$