Metody Obliczeniowe w Elektrotechnice

Stanisław Pawłowski
Zakład Elektrodynamiki i Systemów Elektromaszynowych

Kontakt:
Budynek B pokój 301
Mail: spawlo@prz.edu.pl
Tel.: 17 865 1305

Wykład 2.

Liczby zespolone i ich zastosowanie w elektrotechnice

Liczby zespolone

Liczba zespolona:

$$\underline{z} = x + \mathrm{j}y$$

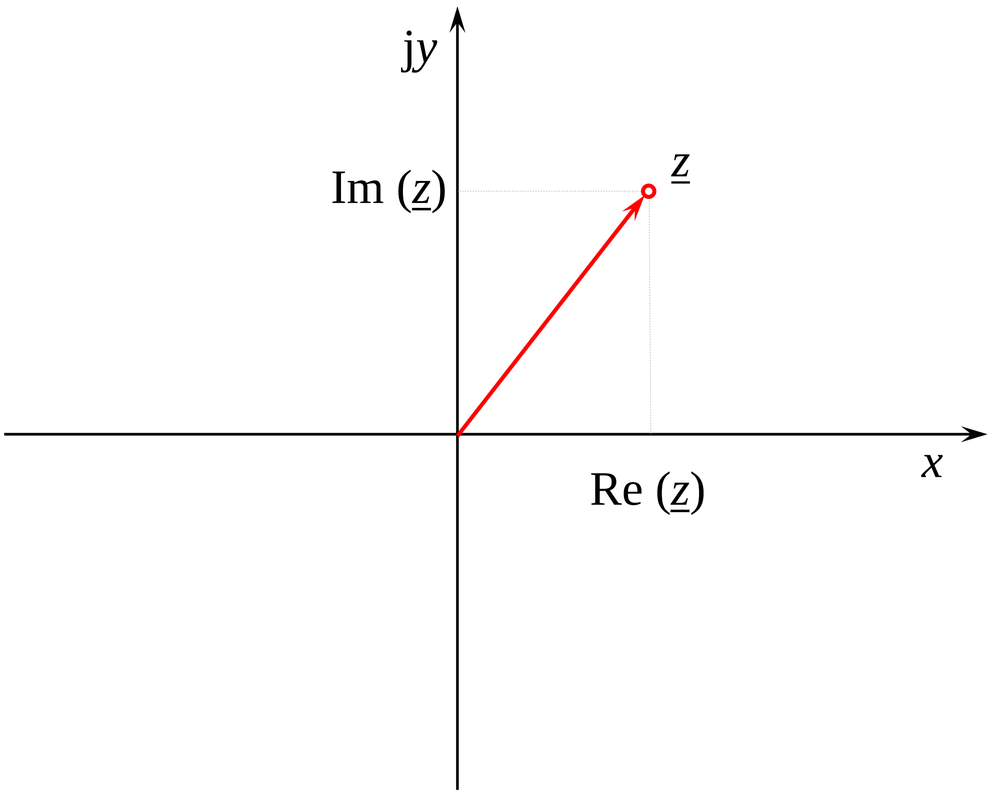
gdzie $x,\ y \in \boldsymbol{R},\quad \mathrm{j} = \sqrt{-1}$ - jednostka urojona

x – *część rzeczywista* liczby $\underline{z}$ $\qquad x = \mathrm{Re}(\underline{z})$

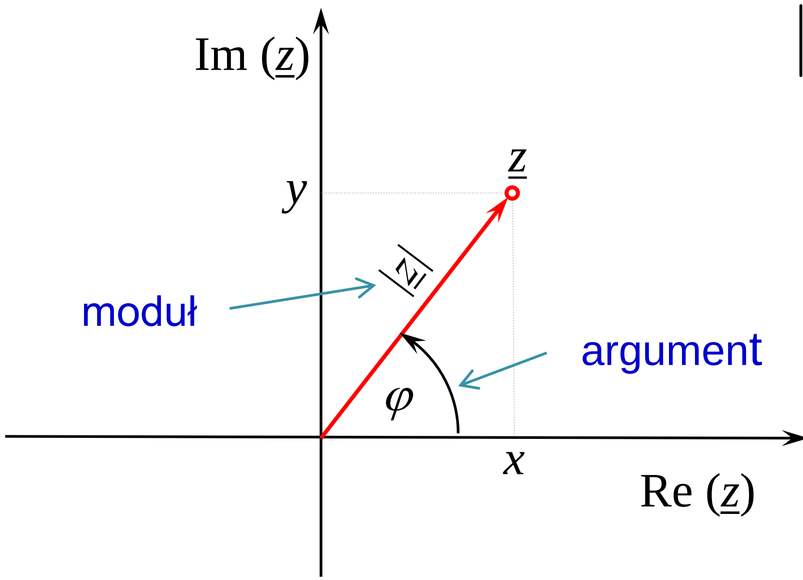
y – *część urojona* liczby $\underline{z}$ $\qquad y = \mathrm{Im}(\underline{z})$

Geometryczna interpretacja liczby zespolonej

Płaszczyzna zespolona (Arganda, Gaussa):



Moduł i argument liczby zespolonej



$$|\underline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \arg \underline{z} = \varphi$$

$$x = |\underline{z}|\cos\varphi, \quad y = |\underline{z}|\sin\varphi$$

Trygonometryczna postać liczby zespolonej

$$\underline{z} = |\underline{z}|(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$$

Wykładnicza postać liczby zespolonej

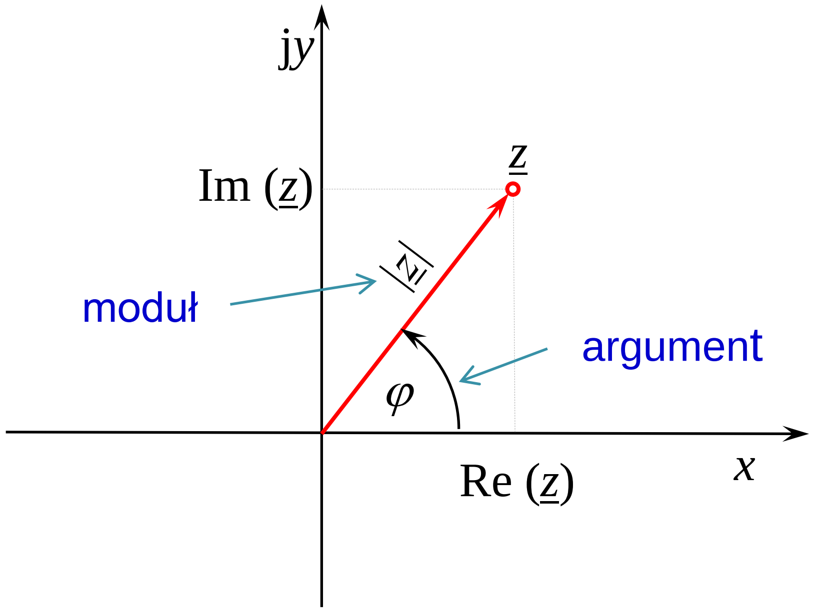
$$\underline{z} = |\underline{z}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

Jeżeli φ jest argumentem liczby $\underline{z}$ to jest nim również liczba $\varphi + 2k\pi$.

Argument zawierający się w przedziale $(-\pi,\ \pi]$ nazywamy *argumentem głównym* liczby $\underline{z}$ i oznaczamy $\mathrm{Arg}\,\underline{z}$. Czyli:

$$\arg \underline{z} = \mathrm{Arg}\,\underline{z} + 2k\pi, \qquad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots$$

Obliczanie argumentu liczby zespolonej



$$\arg \underline{z} = \varphi$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

tylko dla $x > 0$!

Ogólnie:

$$\varphi = \operatorname{atan} 2(y, x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x) & \text{dla } x > 0 \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi & \text{dla } x < 0 \text{ i } y \geq 0 \\ \operatorname{arctg}(y/x) - \pi & \text{dla } x < 0 \text{ i } y < 0 \\ \pi/2 & \text{dla } x = 0 \text{ i } y > 0 \\ -\pi/2 & \text{dla } x = 0 \text{ i } y < 0 \\ \text{nieokreslone} & \text{dla } x = 0 \text{ i } y = 0 \end{cases}$$

Działania na liczbach zespolonych

Dodawanie i odejmowanie

$$\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (x_1 + \mathrm{j}y_1) + (x_2 + \mathrm{j}y_2) = (x_1 + x_2) + \mathrm{j}(y_1 + y_2)$$

$$\underline{z}_1 - \underline{z}_2 = (x_1 + \mathrm{j}y_1) - (x_2 + \mathrm{j}y_2) = (x_1 - x_2) + \mathrm{j}(y_1 - y_2)$$

Mnożenie

$$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = (x_1 + \mathrm{j}y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{j}y_2) = x_1 x_2 + \mathrm{j}x_1 y_2 + \mathrm{j}y_1 x_2 + \mathrm{j}^2 y_1 y_2 =$$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{j}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = |\underline{z}_1| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1} |\underline{z}_2| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2} = |\underline{z}_1||\underline{z}_2| \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Działania na liczbach zespolonych

Dzielenie

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}=\frac{x_1+\mathrm{j}y_1}{x_2+\mathrm{j}y_2}=\frac{(x_1+\mathrm{j}y_1)\cdot(x_2-\mathrm{j}y_2)}{(x_2+\mathrm{j}y_2)\cdot(x_2-\mathrm{j}y_2)}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{j}(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{j}\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}=\frac{|\underline{z}_1|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}}{|\underline{z}_2|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}}=\frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Sprzężenie liczby zespolonej

Jeśli $\underline{z}=x+\mathrm{j}y$ to $\underline{z}^*=x-\mathrm{j}y$ nazywamy liczbą sprzężoną do $\underline{z}$.

Własności sprzężenia:

$$\underline{z}^*\underline{z}=\underline{z}\underline{z}^*=|\underline{z}|^2$$

$$(\underline{z}_1+\underline{z}_2)^*=\underline{z}_1^*+\underline{z}_2^* \qquad\qquad (\underline{z}_1\underline{z}_2)^*=\underline{z}_1^*\underline{z}_2^*$$

Działania na liczbach zespolonych

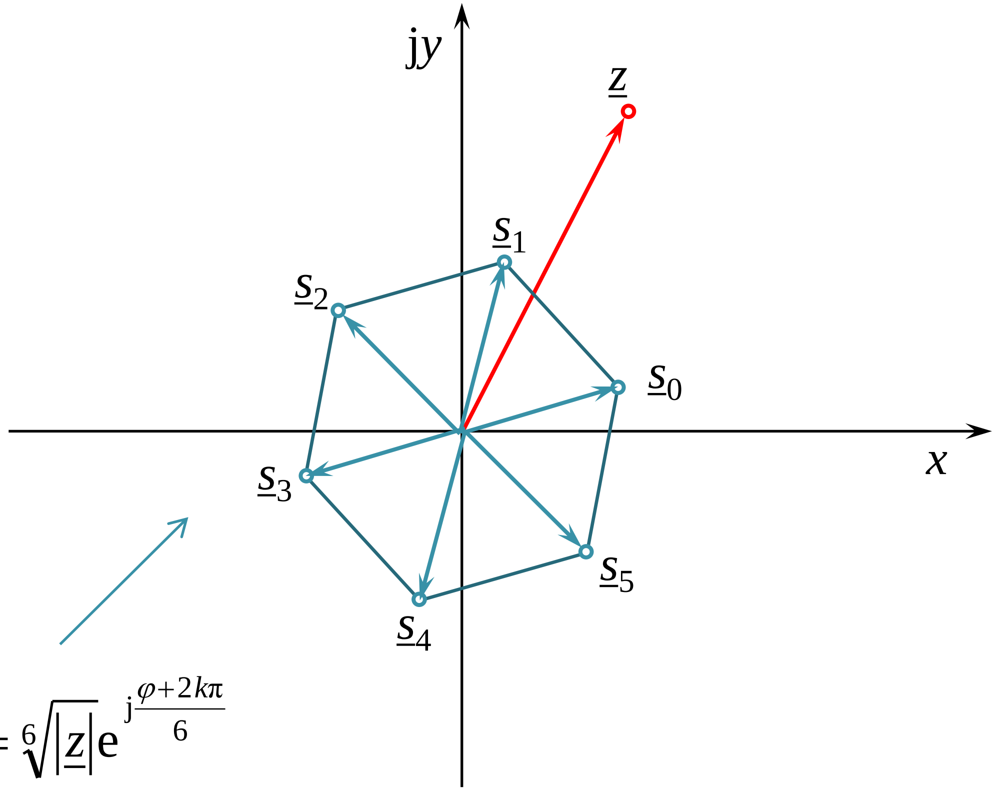
Potęgowanie

$$\underline{z}^n = \left(|\underline{z}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\right)^n = |\underline{z}|^n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}$$

Pierwiastkowanie

$$\sqrt[n]{\underline{z}} = \sqrt[n]{|\underline{z}|}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$



$$s_k = \sqrt[6]{\underline{z}} = \sqrt[6]{|\underline{z}|}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\varphi+2k\pi}{6}}$$

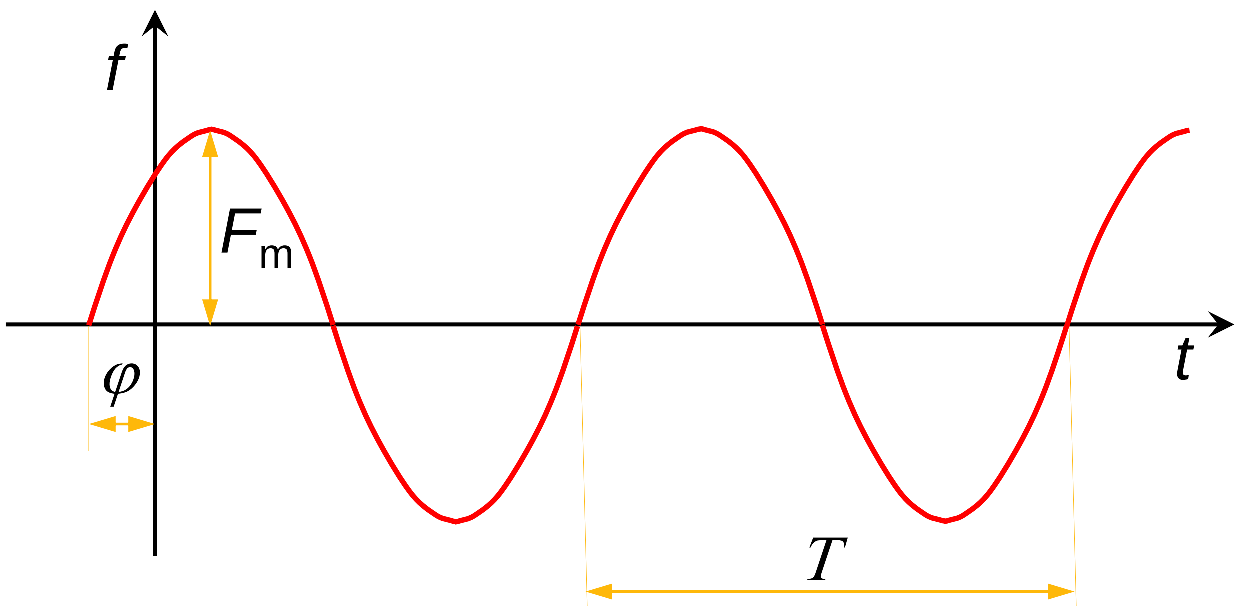
2. Przebiegi sinusoidalnie zmienne (harmoniczne)

Wiele wielkości fizycznych ma charakter funkcji sinusoidalnych (zwykle względem czasu, ale nie tylko). Typowe przykłady to ruch wahadła (przy małych wychyleniach), drgania ciał sprężystych (np. struny instrumentów muzycznych), napięcie generowane w prądnicach synchronicznych i transmitowane w sieciach energetycznych, oscylacje elektrycznych obwodów rezonansowych, wszelkiego rodzaju fale (np. akustyczne, elektromagnetyczne, grawitacyjne, kwantowe fale materii). Okazuje się, że do opisu takich przebiegów bardzo pomocne są liczby zespolone.

Przez przebieg (sygnał) sinusoidalnie zmienny rozumiemy wielkość fizyczną opisaną funkcją:

$$f(t) = \underbrace{F_{\mathrm{m}}}_{\text{amplituda}} \sin(\overbrace{\underbrace{\omega}_{\text{pulsacja}} t + \underbrace{\varphi}_{\text{faza początkowa}}}^{\text{faza}}) \qquad (1)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{\underbrace{T}_{\text{okres}}} \qquad (2)$$



Z funkcją (1) możemy jednoznacznie powiązać funkcję zespoloną:

$$\underline{f}(t) = \underline{F_{\mathrm{m}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{3}$$

amplituda zespolona

gdzie:

$$\underline{F_{\mathrm{m}}} = F_{\mathrm{m}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \tag{4}$$

Podstawiając (4) do (3) otrzymujemy:

Tu korzystamy ze wzoru Eulera

$$\begin{aligned}\underline{f}(t) &= F_{\mathrm{m}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = F_{\mathrm{m}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)} = F_{\mathrm{m}}\left(\cos(\omega t+\varphi) + \mathrm{j}\sin(\omega t+\varphi)\right) \\ &= F_{\mathrm{m}} \cos(\omega t+\varphi) + \mathrm{j}\underline{F_{\mathrm{m}} \sin(\omega t+\varphi)}\end{aligned} \tag{5}$$

A to jest dokładnie równe funkcji (1)

Wnioski:

1. $$f(t) = \mathrm{Im}\left(\underline{f}(t)\right) \qquad (6)$$

Funkcja przebiegu sinusoidalnego jest równa części urojonej funkcji zespolonej.

2. $$F_{\mathrm{m}} = \left|\underline{F_{\mathrm{m}}}\right| \qquad (7)$$

Amplituda przebiegu sinusoidalnego jest równa modułowi amplitudy zespolonej.

3. $$\varphi = \mathrm{Arg}\left(\underline{F_{\mathrm{m}}}\right) \qquad (8)$$

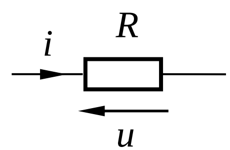
Faza początkowa przebiegu sinusoidalnego jest równa argumentowi amplitudy zespolonej.

4. Z 2. i 3. wynika, że amplituda zespolona zawiera pełną informację o przebiegu sinusoidalnym. Czyli, jeżeli znamy amplitudę zespoloną, to nie ma potrzeby korzystać z 1.

3. Zastosowanie w teorii obwodów liniowych prądów sinusoidalnie zmiennych

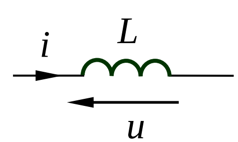
Liniowe elementy pasywne obwodów

Rezystor



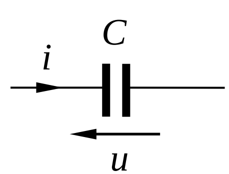
$$u(t) = Ri(t) \tag{9}$$

Cewka



$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{10}$$

Kondensator



$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \tag{11}$$

Założenie

Na każdym elemencie obwodu napięcie i natężenie prądu są przebiegami sinusoidalnymi o zadanej, stałej częstotliwości.

$$u(t) = U_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \varphi_u) \qquad (12)$$

$$i(t) = I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \varphi_i) \qquad (13)$$

Założenie to jest spełnione, gdy wszystkie źródła napięciowe i prądowe w obwodzie mają również charakter przebiegów sinusoidalnych o tej samej częstotliwości, wszystkie elementy obwodu są liniowe (tzn. spełnione są zależności (8) - (10)) i obwód znajduje się w stanie pracy ustalonej (tzn. minęło trochę czasu od jego załączenia, zwykle dzieje się to w czasie nieprzekraczającym kilka okresów T przebiegu).

Zespolone funkcje napięcia i prądu

W celu ułatwienia rozwiązywania takich obwodów (tzn. obliczenia amplitud i przesunięć fazowych wszystkich napięć i natężeń prądów w obwodzie) wprowadzamy zespolone funkcje napięcia i prądu:

$$\underline{u}(t) = \underline{U_{\mathrm{m}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad (14)$$

$$\underline{i}(t) = \underline{I_{\mathrm{m}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad (15)$$

gdzie:

$$\underline{U_{\mathrm{m}}} = U_{\mathrm{m}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u} \qquad (16)$$

$$\underline{I_{\mathrm{m}}} = I_{\mathrm{m}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i} \qquad (17)$$

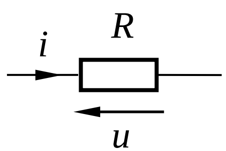
Zespolona amplituda napięcia

Zespolona amplituda prądu

Zależności między zespolonymi amplitudami napięcia i prądu

Postulujemy, aby zespolone funkcje napięcia i prądu spełniały takie same zależności jak rzeczywiste, tzn.:

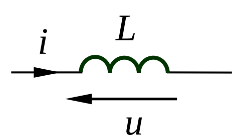
Rezystor



$$\underline{u}(t) = R\underline{i}(t) \Rightarrow \underline{U}_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = R\underline{I}_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{U}_\mathrm{m} = R\underline{I}_\mathrm{m}} \tag{18}$$

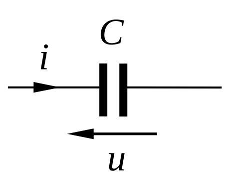
Cewka



$$\underline{u}(t) = L\frac{\mathrm{d}\,\underline{i}}{\mathrm{d}\,t} \Rightarrow \underline{U}_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\underline{I}_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{U}_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{j}\omega L\underline{I}_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \Rightarrow \boxed{\underline{U}_\mathrm{m} = \mathrm{j}\omega L\underline{I}_\mathrm{m}} \tag{19}$$

Kondensator



$$\underline{i}(t) = C\frac{\mathrm{d}\,\underline{u}}{\mathrm{d}\,t} \Rightarrow \underline{I}_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\underline{U}_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{I}_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{j}\omega C\underline{U}_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \Rightarrow \boxed{\underline{I}_\mathrm{m} = \mathrm{j}\omega C\underline{U}_\mathrm{m}} \tag{20}$$

Zależności między zespolonymi amplitudami napięcia i prądu

Należy zauważyć, że spełnienie postulowanych zależności dla zespolonych funkcji napięcia i prądu gwarantuje spełnienie takich samych zależności dla zwykłych funkcji przebiegów sinusoidalnych (patrz (9), (10), (11)), ponieważ równość dwóch wielkości zespolonych oznacza, że w szczególności równe muszą być też ich części urojone:

$$\begin{aligned} \underline{u}(t) = R\underline{i}(t) \quad &\Rightarrow \operatorname{Re}(\underline{u}) + \mathrm{j}\operatorname{Im}(\underline{u}) = R\left(\operatorname{Re}(\underline{i}) + \mathrm{j}\operatorname{Im}(\underline{i})\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{Re}(\underline{u}) = R\operatorname{Re}(\underline{i}) \;\text{ i }\; \operatorname{Im}(\underline{u}) = R\operatorname{Im}(\underline{i}) \Rightarrow \; u(t) = Ri(t) \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \underline{u}(t) = L\frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t} \quad &\Rightarrow \operatorname{Re}(\underline{u}) + \mathrm{j}\operatorname{Im}(\underline{u}) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\operatorname{Re}(\underline{i}) + \mathrm{j}\operatorname{Im}(\underline{i})\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{Re}(\underline{u}) + \mathrm{j}\operatorname{Im}(\underline{u}) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\operatorname{Re}(\underline{i})\right) + \mathrm{j}L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\operatorname{Im}(\underline{i})\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{Re}(\underline{u}) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\operatorname{Re}(\underline{i})\right) \;\text{ i }\; \operatorname{Im}(\underline{u}) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\operatorname{Im}(\underline{i})\right) \Rightarrow u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{22}$$

Analogicznie można wykazać równoważność (11) i (20). Oznacza to, że spełnienie zależności (18), (19), (20) wiążących amplitudy zespolone napięcia i prądu jest równoważne spełnieniu zależności (9), (10), (11).

Należy też zwrócić uwagę, że w zależnościach (18), (19), (20) nie występuje czas, oraz mają one postać matematyczną analogiczną do zwykłego prawa Ohma, w którym w miejsce rezystancji należy wstawić:

- dla rezystora – zwykłą rezystancję R
- dla cewki – wielkość $\mathrm{j}\omega L$
- dla kondensatora – wielkość $1/\mathrm{j}\omega C = -\mathrm{j}/\omega C$

Pozwala to traktować wszystkie elementy obwodu liniowego w sposób formalnie analogiczny jak rezystory w obwodach prądu stałego. W tym celu wprowadza się następujące wielkości:

$$\underbrace{X_L}_{\text{reaktancja indukcyjna}} = \omega L \qquad (23)$$

$$\underbrace{X_C}_{\text{reaktancja pojemnościowa}} = \frac{1}{\omega C} \qquad (24)$$

Prawa Kirchhoffa dla amplitud zespolonych

Podobne rozumowanie jak dla zależności obowiązujących na pasywnych elementach obwodu można przeprowadzić dla pierwszego i drugiego prawa Kirchhoffa:

$$\sum_k i_k(t) = 0 \qquad (25) \qquad\qquad \sum_k u_k(t) = 0 \qquad (26)$$

Postulujemy, że zespolone napięcia i natężenia prądu spełniają takie same prawa:

$$\sum_k \underline{i_k}(t) = 0 \qquad (26) \qquad\qquad \sum_k \underline{u_k}(t) = 0 \qquad (27)$$

Korzystając z (14) i (15) mamy:

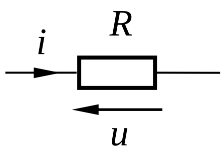
$$\sum_k \underline{U_{\mathrm{m}k}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_k \underline{U_{\mathrm{m}k}} = 0} \qquad (28)$$

$$\sum_k \underline{I_{\mathrm{m}k}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_k \underline{I_{\mathrm{m}k}} = 0} \qquad (29)$$

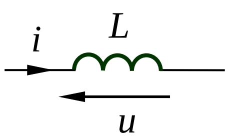
czyli amplitudy zespolone napięć i natężeń prądów spełniają prawa Kirchhoffa.

Wniosek

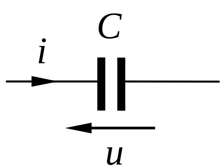
Dzięki zastosowaniu algebry liczb zespolonych rozwiązywanie obwodów prądu sinusoidalnie zmiennego można wykonywać w sposób analogiczny jak dla obwodów prądu stałego. W tym celu, wszystkie napięcia i prądy w obwodzie, należy zastąpić ich amplitudami zespolonymi, a elementom pasywnym obwodu przypisać odpowiednie wielkości zespolone:



$$\underline{Z} = R \quad \text{– rezystancja} \tag{30}$$



$$\underline{Z} = \mathrm{j}X_L = \mathrm{j}\omega L \quad \text{– impedancja indukcyjna} \tag{31}$$

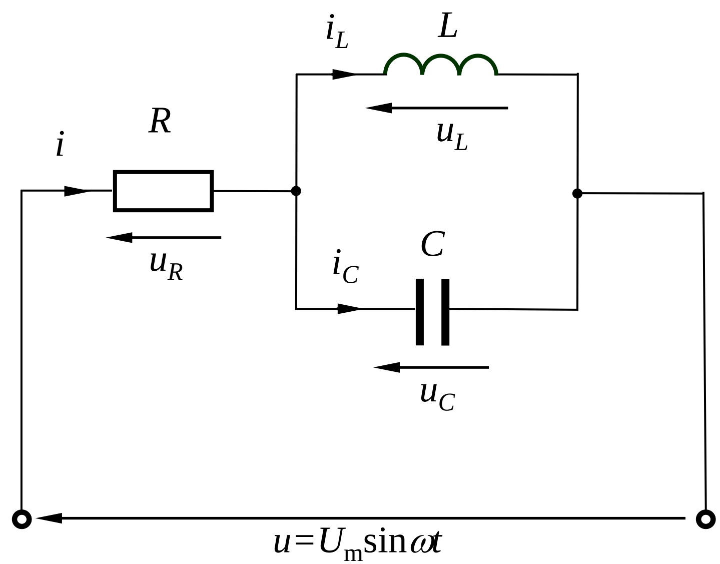


$$\underline{Z} = -\mathrm{j}X_C = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C} \quad \text{– impedancja pojemnościowa} \tag{32}$$

Oznacza to również, że dla obwodu prądu sinusoidalnie zmiennego lub jego części można wyznaczać impedancję zastępczą według tych samych reguł jakie obowiązują w przypadku obwodów prądu stałego.

Przykład

Obliczyć natężenia prądów i napięcia na elementach przedstawionego obwodu (stan ustalony). Zapisać jawnie postać czasową obliczanych wielkości.



Dane:

$U_m = 100$ V

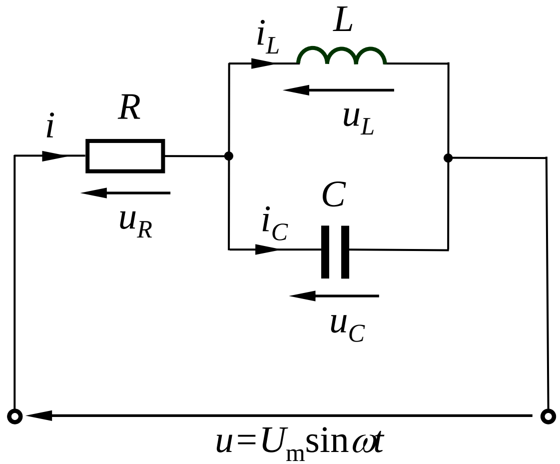
$f = 50$ Hz

$R = 60\ \Omega$

$L = 0{,}1$ H

$C = 40\ \mu$F

Rozwiązanie



Dane:

$U_m = 100$ V

$f = 50$ Hz

$R = 60\ \Omega$

$L = 0,1$ H

$C = 40\ \mu$F

Pulsacja:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 \approx 314\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Amplituda zespolona napięcia zasilającego:

$$\underline{U}_{\text{m}} = U_{\text{m}}\,\text{e}^{\text{j}\varphi_0} = 100\,\text{e}^{\text{j}0} = 100\ \text{V}$$

Impedancje elementów obwodu: $\underline{Z}_{\text{R}} = R = 60\,\Omega$

$$\underline{Z}_{\text{L}} = \text{j}\omega\text{L} = \text{j}\cdot 314\cdot 0,1 = \text{j}31,4\,\Omega \qquad \underline{Z}_{\text{C}} = -\text{j}\frac{1}{\omega\text{C}} = -\text{j}\cdot\frac{1}{314\cdot 40\cdot 10^{-6}} \approx -\text{j}79,6\,\Omega$$

Impedancja zastępcza obwodu:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{\text{R}} + \frac{\underline{Z}_{\text{L}}\cdot\underline{Z}_{\text{C}}}{\underline{Z}_{\text{L}}+\underline{Z}_{\text{C}}} = 60 + \frac{\text{j}31,4\cdot(-\,\text{j}79,6)}{\text{j}31,4\,-\,\text{j}79,6} = 60 + \text{j}51,9 = 79,3\text{e}^{\text{j}41^\circ}\ \Omega$$

Amplituda zespolona prądu i:

$$\underline{I}_{\text{m}} = \frac{\underline{U}_{\text{m}}}{\underline{Z}} = \frac{100}{79,3\text{e}^{\text{j}41^\circ}} = 1,26\text{e}^{-\text{j}41^\circ}\ \text{A}$$

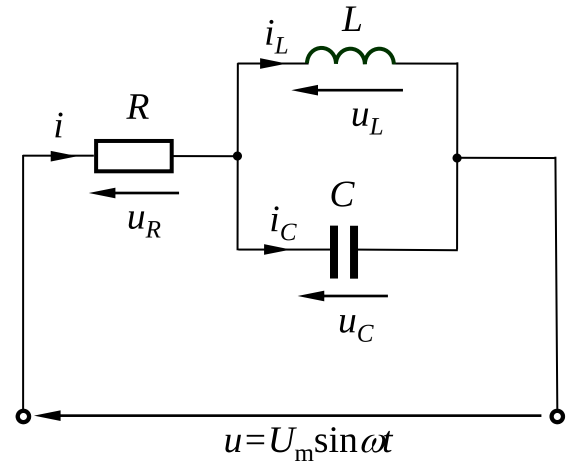
Amplituda zespolona napięcia u_R:

$$\underline{U}_{Rm} = R\underline{I} = 60\cdot 1,26\text{e}^{-\text{j}41^\circ} = 75,7\text{e}^{-\text{j}41^\circ}\ \text{V}$$

Amplitudy zespolona napięć u_L, u_C:

$$\underline{U}_{Lm} = \underline{U}_{Cm} = \underline{U}_{\text{m}} - \underline{U}_{Rm} = 100 - 75,7\text{e}^{-\text{j}41^\circ} = 100 - 75,7\left(\cos 41^\circ - \text{j}\sin 41^\circ\right) = 42,9 + \text{j}49,7 = 65,5\text{e}^{\text{j}49^\circ}\ \text{V}$$

Rozwiązanie



Dane:

$U_m = 100$ V

$f = 50$ Hz

$R = 60\ \Omega$

$L = 0{,}1$ H

$C = 40\ \mu$F

Amplituda zespolona prądu i_L :

$$\underline{I}_{Lm} = \frac{\underline{\underline{U}}_{Lm}}{\underline{Z}_{Lm}} = \frac{65{,}5e^{j49^\circ}}{j31{,}4} = \frac{65{,}5e^{j49^\circ}}{31{,}4e^{j90^\circ}} = 2{,}09e^{-j41^\circ}\ \mathrm{A}$$

Amplituda zespolona prądu i_C :

$$\underline{I}_{Cm} = \frac{\underline{\underline{U}}_{Cm}}{\underline{Z}_{Cm}} = \frac{65{,}5e^{j49^\circ}}{-j79{,}6} = \frac{65{,}5e^{j49^\circ}}{79{,}6e^{-j90^\circ}} = 0{,}823e^{j139^\circ}\ \mathrm{A}$$

Postać czasowa prądów i napięć (stopnie przeliczmy na radiany):

$$i(t) = 1{,}26\sin\left(314t - 0{,}716\right)\mathrm{A}$$

$$u(t) = 100\sin\left(314t\right)\mathrm{V}$$

$$i_L(t) = 2{,}09\sin\left(314t - 0{,}716\right)\mathrm{A}$$

$$u_R(t) = 75{,}7\sin\left(314t - 0{,}716\right)\mathrm{V}$$

$$i_C(t) = 0{,}823\sin\left(314t + 2{,}43\right)\mathrm{A}$$

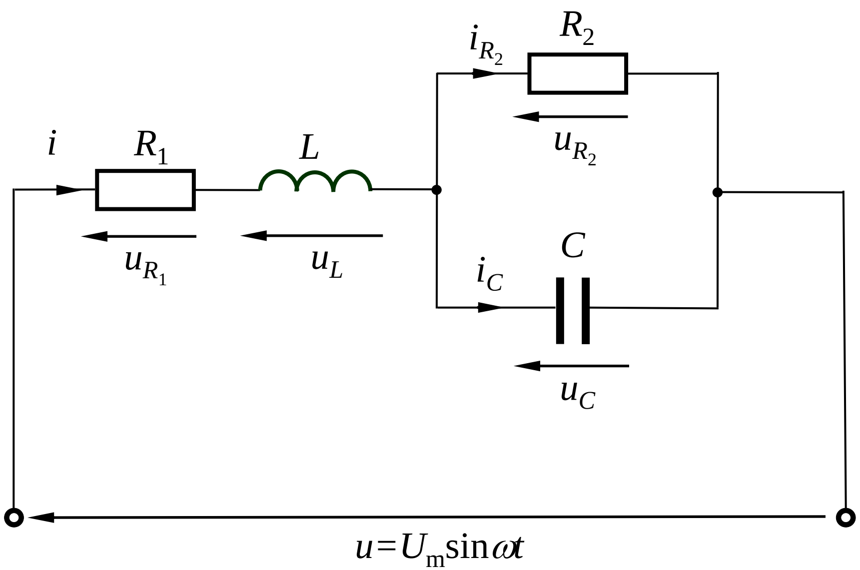
$$u_L(t) = u_C(t) = 65{,}5\sin\left(314t + 0{,}855\right)\mathrm{V}$$

Uwagi

1. Stopnie są przeliczone na radiany, bo jednostki argumentów sinusów muszą się zgadzać, a pulsacja jest w radianach na sekundę (ważne!).
2. W obliczeniach inżynierskich zamiast amplitud (zwykłych i zespolonych) napięć i prądów stosuje się zwykle ich wartości skuteczne, tzn. pomniejszone $\sqrt{2}$ razy.

Zadanie do samodzielnego rozwiązania

Obliczyć natężenia prądów i napięcia na elementach przedstawionego obwodu (stan ustalony). Zapisać jawnie postać czasową obliczanych wielkości.



Dane:

$U_m = 300$ V

$f = 100$ Hz

$R = 200\ \Omega$

$R = 50\ \Omega$

$L = 0{,}2$ H

$C = 10\ \mu$F