Metody Obliczeniowe w Elektrotechnice

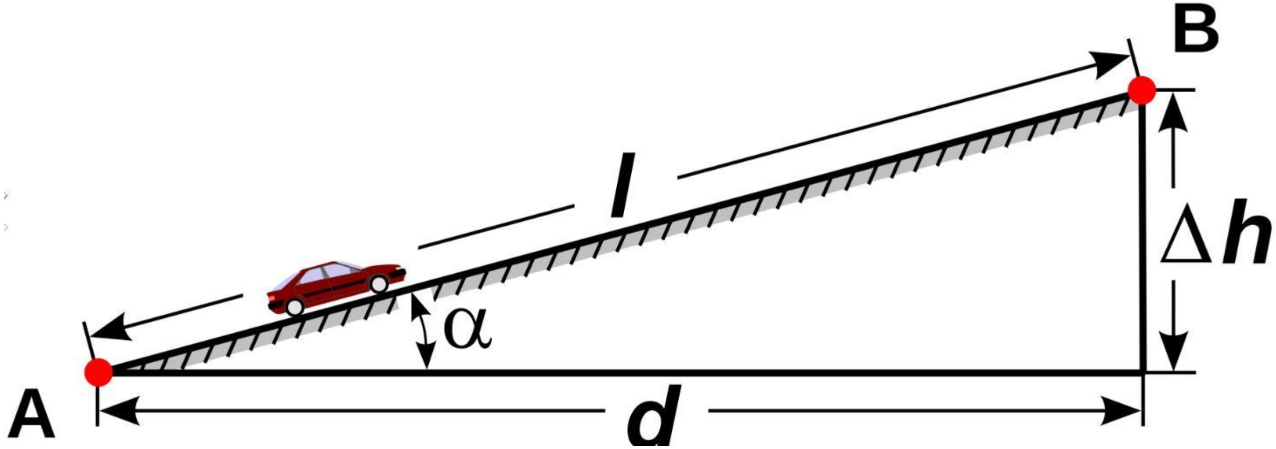
Stanisław Pawłowski
Zakład Elektrodynamiki i Systemów Elektromaszynowych

Kontakt:
Budynek B pokój 301
Mail: spawlo@prz.edu.pl
Tel.: 17 865 1305

Wykład 1

Pochodne

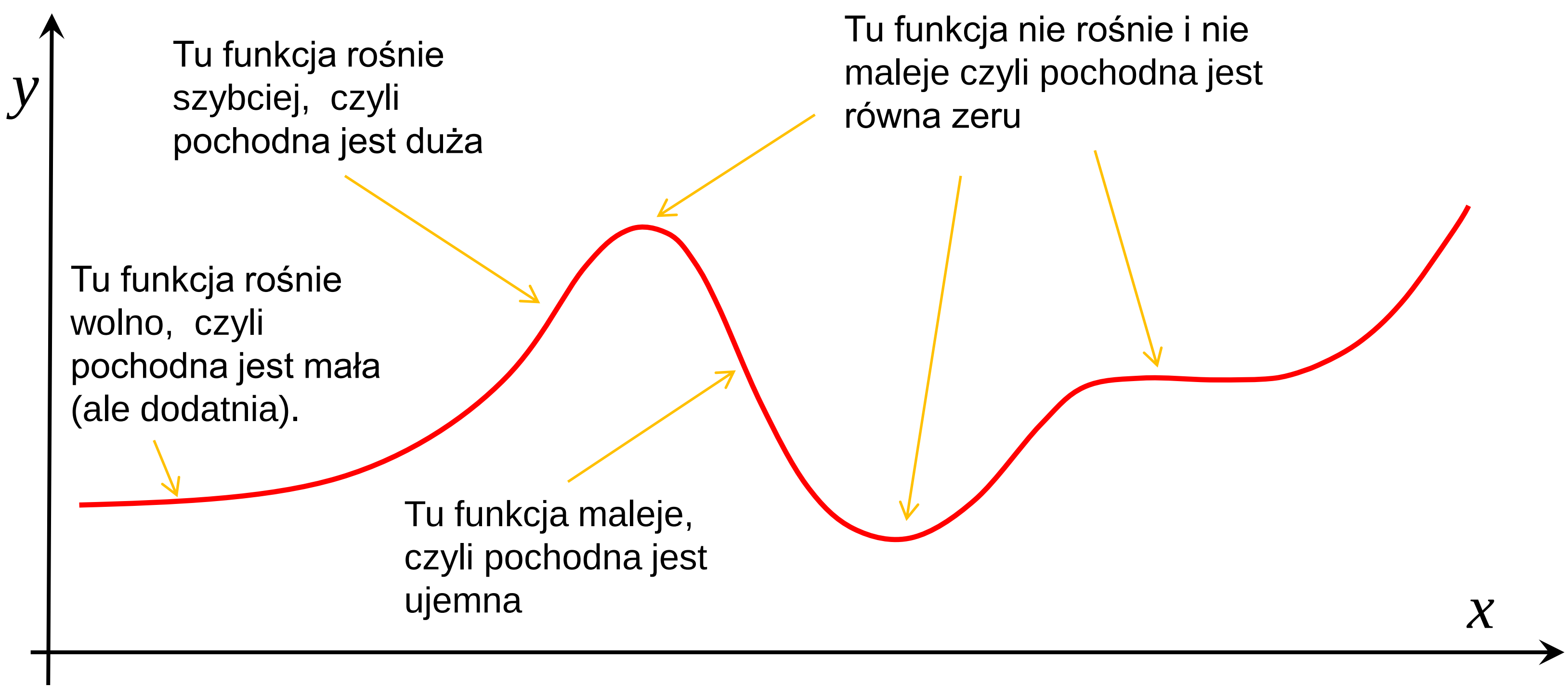
$$a = \frac{h}{d} = \operatorname{tg}\alpha$$



1. Definicja i interpretacja pochodnej

Co to jest pochodna funkcji?

Pochodna funkcji jest miarą szybkości jej narastania. Dla jednych argumentów funkcja może narastać szybciej, dla innych wolniej, dla innych może w ogóle nie narastać (tam pochodna jest równa zeru), a dla jeszcze innych maleć (tam pochodna jest ujemna). Czyli pochodna funkcji też jest funkcją, bo może przyjmować różne wartości dla różnych argumentów funkcji.



Definicja

Pochodną funkcji $y = f(x)$ w punkcie x_0 nazywamy granicę jej ilorazu różnicowego przy zmierzającym do zera przyroście jej argumentu:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1}$$

iloraz różnicowy

gdzie:

$\Delta x = x - x_0$ - przyrost argumentu funkcji

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$ - przyrost wartości funkcji

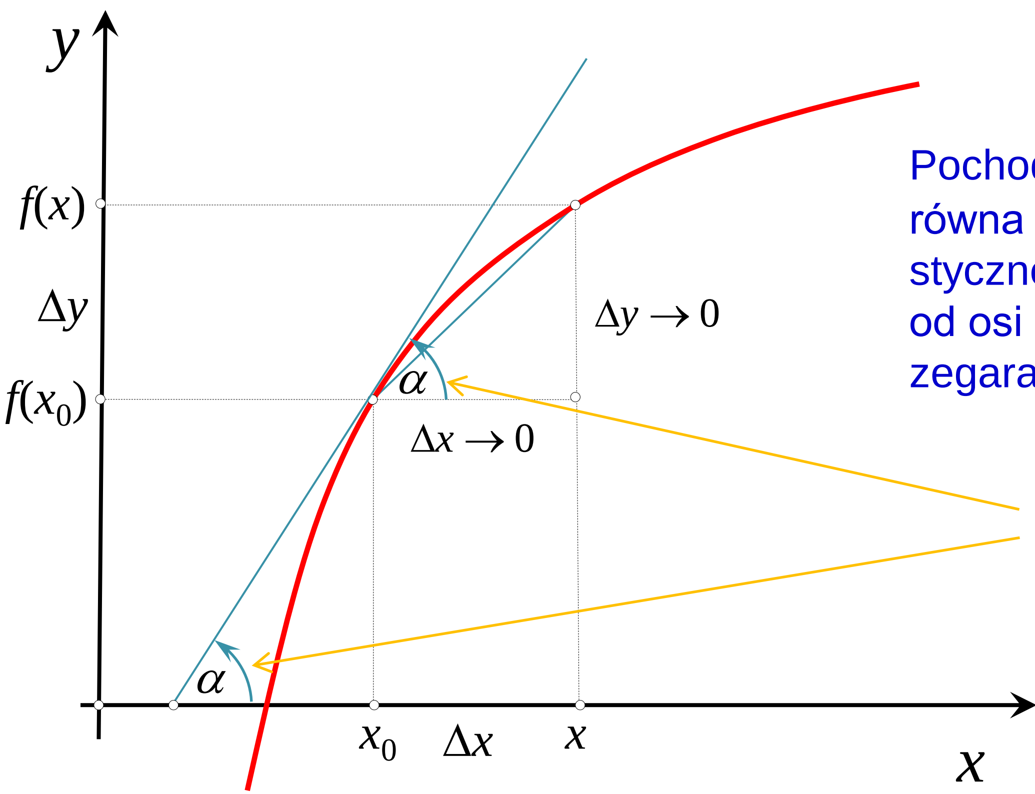
Różne sposoby oznaczania pochodnej:

Symbol stosowany w mechanice dla pochodnych względem czasu

$$f'(x) \qquad \frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, x} \qquad f_x(x) \qquad f'_x(x) \qquad \overset{\circ}{f}(t) \tag{2}$$

Interpretacja geometryczna pochodnej

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

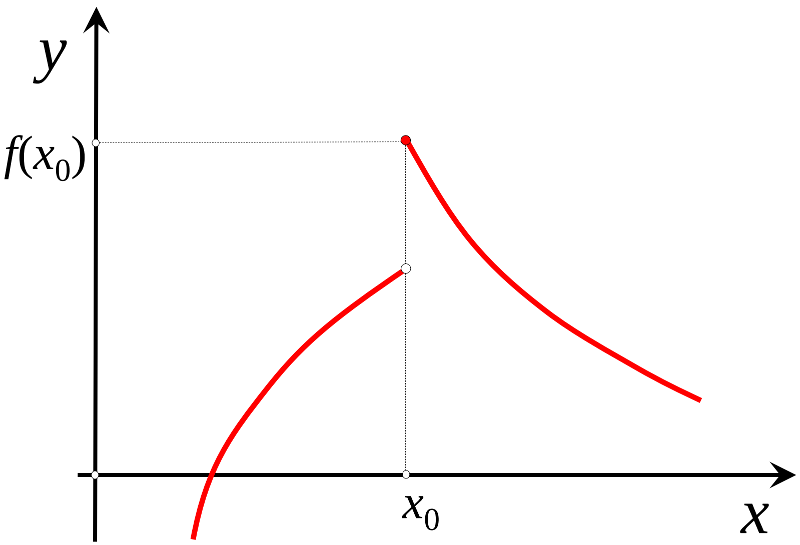


Pochodna funkcji w punkcie x_0 jest równa tangensowi kąta nachylenia stycznej do wykresu funkcji liczonego od osi OX przeciwnie do wskazówek zegara

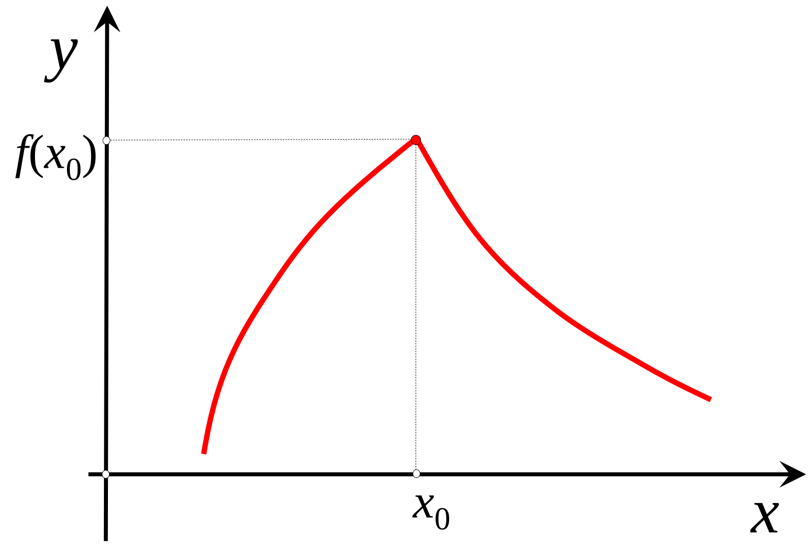
$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

Uwaga

W definicji pochodnej nie zakłada się, że $x > x_0$, a granica w (1) liczona przy takim założeniu (prawostronna) niekoniecznie musi być równa granicy liczonej przy założeniu przeciwnym: $x < x_0$ (lewostronnej). Zgodnie z definicją granicy oznacza to, że granica ilorazu różnicowego w takim punkcie nie istnieje (bo nie da się jej jednoznacznie określić), czyli pochodna w tym punkcie również nie ma żadnej wartości. Mówimy wtedy, że funkcja jest *nieróżniczkowalna* w punkcie x_0 (choć może być w nim ciągła). Punkty takie nazywamy *punktami osobliwymi* lub *osobliwościami* funkcji (są też inne rodzaje osobliwości). Przykłady takich punktów ilustrują poniższe rysunki. Należy zauważyć, że w punkcie x_0 nie da się też jednoznacznie poprowadzić linii stycznej do wykresu funkcji.



Funkcja nieciągła i nieróżniczkowalna w punkcie x_0



Funkcja ciągła, ale nieróżniczkowalna w punkcie x_0

2. Reguły różniczkowania

Na podstawie definicji (1) można udowodnić przedstawione niżej właściwości pochodnej, nazywane regułami różniczkowania.

1. Pochodna sumy funkcji jest sumą pochodnych (addytywność):

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x) \tag{3}$$

2. Pochodna iloczynu stałej przez funkcję jest równa iloczynowi tej stałej przez pochodną funkcji (inaczej mówiąc – stałą można wyciągać przed znak pochodnej).

$$\left(af(x)\right)' = af'(x) \tag{4}$$

3. Pochodna iloczynu funkcji

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x) \tag{5}$$

2. Reguły różniczkowania

4. Pochodna ilorazu funkcji

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2} \qquad (6)$$

5. Pochodna funkcji złożonej

$$\left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'(g)\cdot g'(x) \qquad (7)$$

Ten sam wzór przy zastosowaniu innej notacji (notacja z primem może budzić wątpliwości, czy pochodna po lewej stronie ma być liczona względem zmiennej g, czy względem zmiennej x)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\left(g(x)\right) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \qquad (8)$$

2. Reguły różniczkowania

UWAGI

1. Te wzory są bardzo często używane i trzeba je znać na pamięć!

2. Wszelkie operacje na funkcjach, wektorach, macierzach i jakichkolwiek obiektach posiadające właściwości 1. i 2. nazywa się operacjami *liniowymi*. Obliczanie pochodnej jest więc operacją liniową.

3. Pochodna z funkcji pochodnej funkcji f to *druga pochodna* funkcji f. *Pochodna rzędu* n to pochodna z pochodnej rzędu n-1. Przez pochodną rzędu 0 rozumiemy samą funkcję f. Najczęściej stosowane oznaczenia pochodnej rzędu n to:

$$f^{(n)}(x), \qquad \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$$

4. Często popełniane błędy przy obliczaniu pochodnych polegają na tym, że pochodną iloczynu funkcji próbuje się liczyć jako iloczyn pochodnych, a pochodną ilorazu funkcji jako iloraz pochodnych. Tego nie wolno robić! (patrz wzory (5), (6)).

5. Innym często popełnianym błędem jest nieprawidłowe obliczanie pochodnej funkcji złożonej, np. tylko z funkcji zewnętrznej bez przemnożenia przez pochodną funkcji wewnętrznej, lub różniczkowanie tylko funkcji wewnętrznej.

3. Pochodne funkcji elementarnych

Przedstawione w tym punkcie wzory wyprowadzić można tylko wprost z definicji pochodnej, czyli praktycznie też trzeba je znać na pamięć.

1. Pochodna funkcji stałej ($f(x) = a = \text{const}$)

$$(a)' = 0 \tag{9}$$

2. Pochodna funkcji potęgowej

$$\left(x^p\right)' = px^{p-1} \tag{10}$$

Uwaga: p jest tu całkowicie dowolną liczbą rzeczywistą (a może być nawet zespoloną). Czyli wzór ten umożliwia też obliczanie pochodnych funkcji typu:

$f(x) = 1/x \ (p = -1)$, $f(x) = 1/x^2 \ (p = -2)$, $f(x) = \sqrt{x} \ (p = 1/2)$, $f(x) = 1/\sqrt[3]{x^2} \ (p = -2/3)$

3. Pochodne funkcji wykładniczych

$$\left(\mathrm{e}^x\right)' = \mathrm{e}^x \tag{11}$$

Uwaga: Z tego wzoru nietrudno wyprowadzić wzór ogólniejszy: $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

3. Pochodne funkcji elementarnych

4. Pochodne funkcji logarytmicznych

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (12)$$

Uwaga: Z tego wzoru nietrudno wyprowadzić wzór ogólniejszy: $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

5. Pochodne funkcji trygonometrycznych

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (13),\ (14)$$

Uwaga: na podstawie tych wzorów i wzoru (6) łatwo wyprowadzić wzory na pochodne pozostałych funkcji trygonometrycznych.

6. Pochodne funkcji cyklometrycznych

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (15),\ (16)$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \qquad (17),\ (18)$$

3. Pochodne funkcji elementarnych

UWAGI

1. Poza wymienionymi warto pamiętać wzory na pochodne: $$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \qquad (19)$$

z pierwiastka: $$\left(\sqrt{x}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (20)$$

z funkcji hiperbolicznych: $$(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x \qquad (21),\ (22)$$

Wzory (19) i (20) to szczególne przypadki wzoru (10), a (21) i (22) można łatwo wyprowadzić z (11), ale powyższe wzory nietrudno zapamiętać, a przydają się często.

2. Wzory na pochodne funkcji cyklometrycznych (15) – (18) są rzadziej stosowane, ale też warto o nich pamiętać (przydają się np. do rozwiązywania niektórych całek).

3. Stosując wymienione w tym punkcie wzory łącznie z przedstawionymi w punkcie poprzednim regułami różniczkowania można obliczyć pochodną z dowolnej funkcji elementarnej.

4. Podsumowanie

W poniższych tabelach zestawiono najważniejsze wzory stosowane przy obliczaniu pochodnych (pominięto pochodne funkcji cyklometrycznych (15 – (18)).

Reguły różniczkowania	
Suma funkcji	$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x)$
Iloczyn stałej przez funkcję	$\left(af(x)\right)' = af'(x)$
Iloczyn funkcji	$\left(f(x)\,g(x)\right)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
Iloraz funkcji	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
Złożenie funkcji	$\left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'(g)\cdot g'(x)$

Pochodne funkcji elementarnych $f(x)$	$f'(x)$
a (stała)	0
x^p	px^{p-1}
$1/x$	$-1/x^2$
$\sqrt{x}$	$-1/2\sqrt{x}$
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

5. Przykłady

1. Pochodna z wielomianu (korzystamy z 1. i 2. reguły różniczkowania (wzory(3), (4)) i wzoru na pochodną funkcji potęgowej (10))

$$\left(2x^5+3x^4-5x^3+x^2+7x-4\right)' = 10x^4+12x^3-15x^2+7$$

2. Pochodna z iloczynu funkcji (korzystamy z 3. reguły różniczkowania (wzór (5)) oraz wzorów (12) i (15).

$$(\ln x\cdot\sin x)' = \frac{1}{x}\sin x + \ln x\cdot\cos x$$

3. Pochodne z ilorazu funkcji (korzystamy z 4. reguły różniczkowania (wzór (6)).

3.1. $$\left(\frac{2x+1}{x^2-3}\right)' = \frac{2\left(x^2-3\right)-(2x+1)\cdot 2x}{\left(x^2-3\right)^2} = -\frac{2x^2+2x+6}{\left(x^2-3\right)^2}$$

3.2. $$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

5. Przykłady

4. Pochodne z funkcji złożonych (korzystamy z 5. reguły różniczkowania (wzór (7)).

4.1. $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(3x^2-5x+2\right)^5 = 5\left(3x^2-5x+2\right)^4\cdot(6x-5)$$

4.2. $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\sin\left(x^2-5\right)=2x\cos\left(x^2-5\right)$$

4.3. $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\sqrt{x^2+4}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

4.4. $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\cos(\ln 5x)=-\sin(\ln 5x)\cdot\frac{1}{5x}\cdot 5=-\frac{\sin(\ln 5x)}{x}$$

4.5. $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}4\,\mathrm{e}^{\sqrt{3x}}=4\,\mathrm{e}^{\sqrt{3x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3x}}\cdot 3=\frac{6\,\mathrm{e}^{\sqrt{3x}}}{\sqrt{3x}}$$

6. Przykłady zastosowań pochodnych

1. W mechanice

Niech funkcje $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ opisują współrzędne punktu materialnego w zależności od czasu (równanie toru ruchu).

Składowe wektora prędkości definiuje się jako:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad v_z(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

a składowe wektora przyśpieszenia:

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \quad a_y(t) = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}, \quad a_z(t) = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$$

czyli: $$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}, \quad a_y(t) = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}, \quad a_z(t) = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$$ (drugie pochodne)

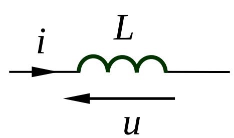
6. Przykłady zastosowań pochodnych

2. W teorii obwodów elektrycznych

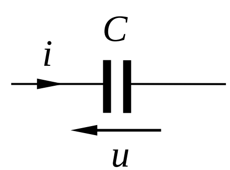
Definicja natężenia prądu (wartość chwilowa):

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

Zależności wiążące chwilowe wartości napięcia i natężenia prądu na cewce i kondensatorze:



$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

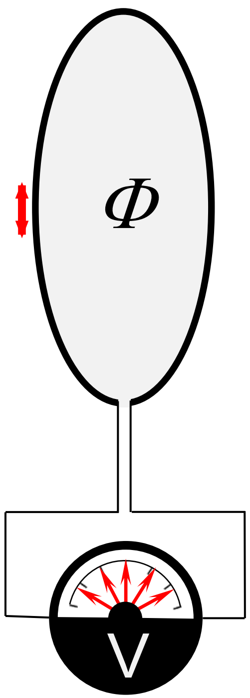


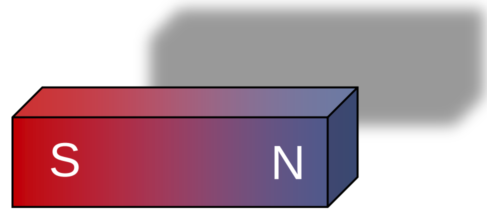
$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

6. Przykłady zastosowań pochodnych

3. W teorii pola elektromagnetycznego

Prawo indukcji elektromagnetycznej Faradaya





$$\mathcal{E}(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

$\mathcal{E}$ – indukowana siła elektromotoryczna

Φ – strumień magnetyczny