Estymacja mocna

Edward Preweda

Metoda najmniejszych kwadratów

W metodzie najmniejszych kwadratów, raz ustalone wagi pozostają nie zmienione do końca rozwiązania układu równań.

Oznacza to, że odchyleniom standardowym, na podstawie których wagi są wyznaczane, przypisywane jest 100 procentowe prawdopodobieństwo.

Wynik rozwiązania układu jest bardzo mocno związany z doborem wag, stąd na etapie ustalania ich wartości nie można popełnić błędów.

Zasady estymacji mocnej

W praktyce, odchylenia standardowe są szacowane, stąd uzasadnione jest dopuszczenie do zmiany ich wartości, na przykład w zakresie odpowiadającym przedziałowi ufności na określonym poziomie istotności.

Tego typu rozwiązanie stosowane jest w estymacji mocnej.

Zasady estymacji mocnej

Podstawą estymacji mocnej jest funkcja, która zmienia wagi obserwacji (odchylenia standardowe).

W literaturze, podanej na końcu prezentacji, można spotkać wiele funkcji stosowanych w estymacji mocnej.

Jaka funkcja?

Dobra funkcja powinna spełniać kryteria:

- Przyjmować wartości dodatnie (bo waga nie może być ujemna)
- Być parzystą (symetryczna względem osi wartości funkcji)
- Osiągać jedno i tylko jedno maximum dla parametru równego 0 (dla odchyłki równej 0 waga będzie największa)
- Pochodna funkcji musi mieć charakter skokowy (stworzy to „próg” dla błędów grubych)
- Wypukła w otoczeniu maximum (druga pochodna jest mniejsza od 0).

Jaka funkcja?

Funkcja gęstości rozkładu normalnego spełnia oczywiście te warunki.

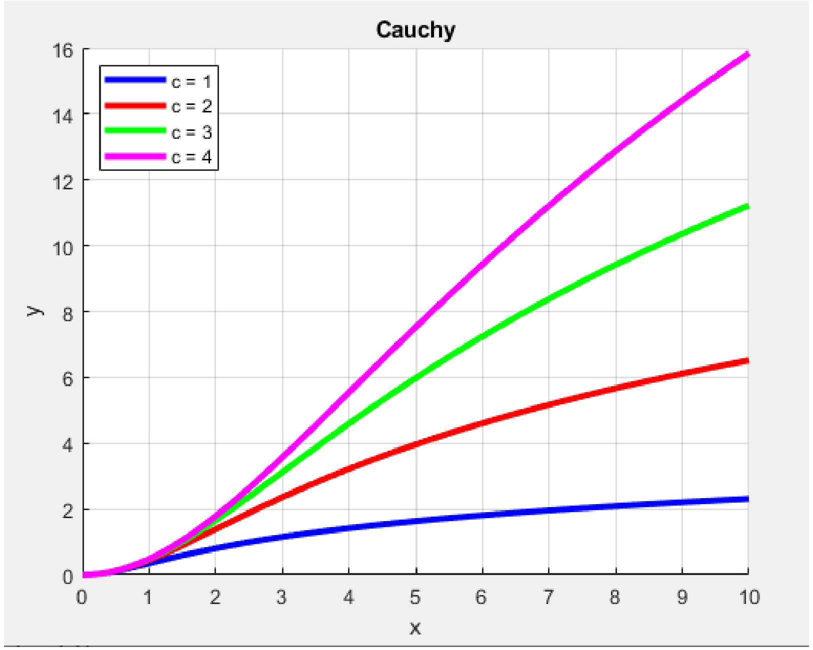
Niestety wpływ bardzo dużych błędów maleje w jej przypadku bardzo wolno.

Inne krzywe to funkcje gęstości rozkładów opracowane przez takich autorów jak: Cauchy, Welsch, Tukey, Huber czy Andrew.

Przykładowe funkcje - Cauchy

$$f(x) = \frac{c^2 \log\left(1 + \left(\frac{x}{c}\right)^2\right)}{2}$$

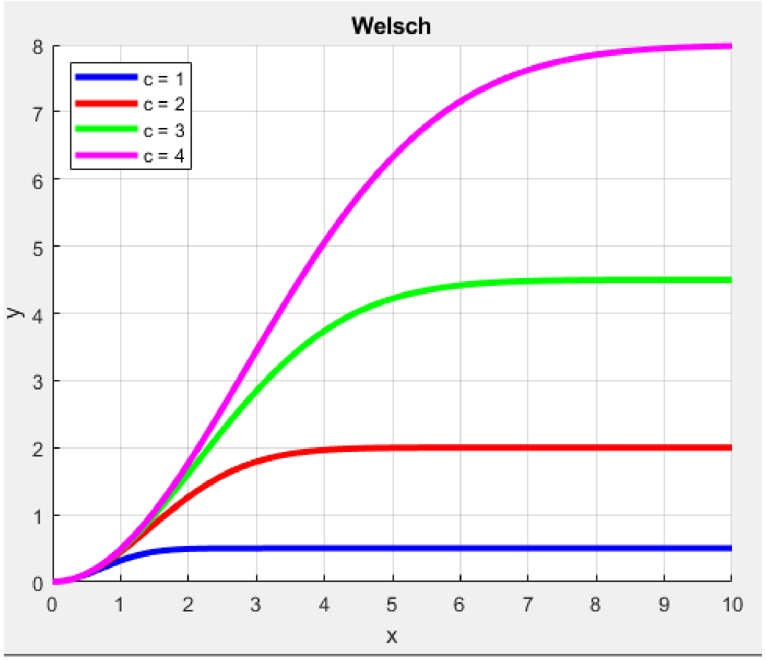
```
c=1; k=0;
for i=0:0.1:10
    k=k+1;
    x(k)=i;
    y(k)=(c^2*log(1+(x(k)/c)^2))/2;
end;
```



Przykładowe funkcje - Welsch

$$f(x) = \frac{c^2\left[1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{c}\right)^2\right)\right]}{2}$$

```
c=1;  k=0;
for i=0:0.1:10
     k=k+1;
     x(k)=i;
     y(k)=(c^2*(1-exp(-(x(k)/c)^2)))/2;
end;
```

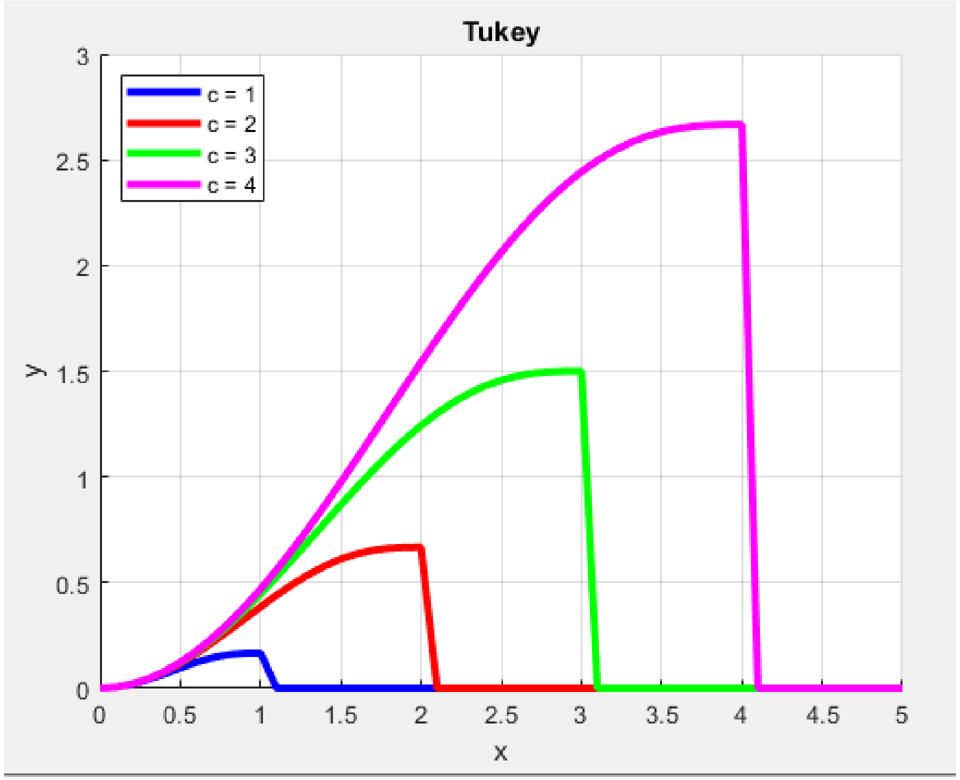


Przykładowe funkcje - Tukey

$$if\ |x| \le c\ \ f(x) = \frac{c^2\left[1-\left(1-\left(\frac{x}{c}\right)^2\right)^3\right]}{6}$$

$$if\ |x| > c\ \ f(x) = 0$$

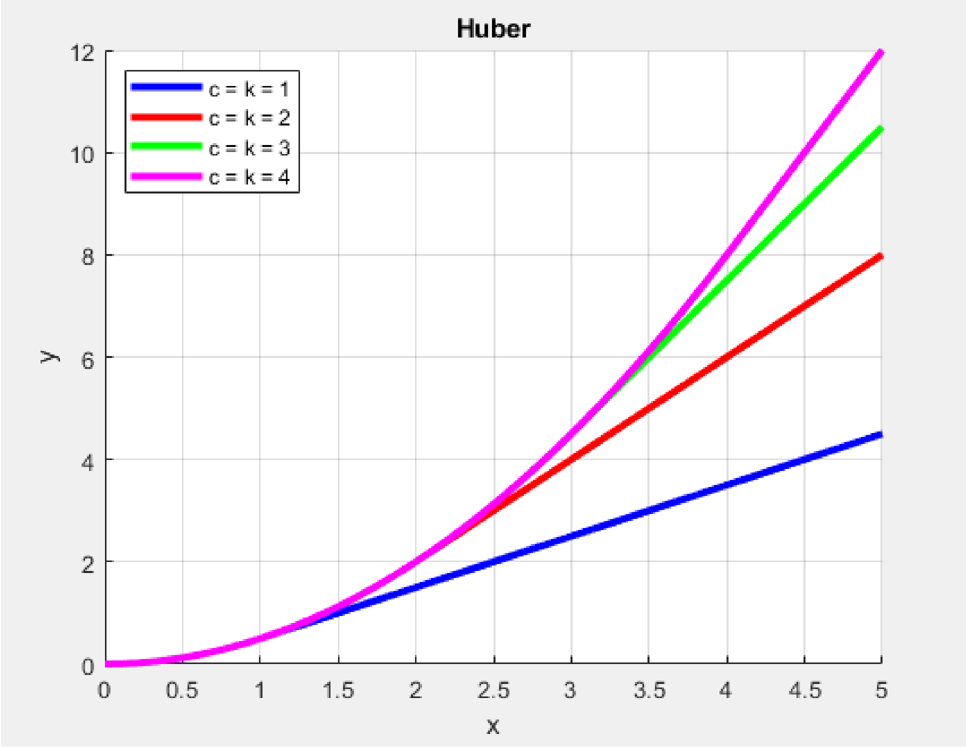
```
c=1; k=0;
for i=0:0.1:5
    k=k+1;
    x(k)=i;
    y(k)=(c^2*(1-(1-(x(k)/c)^2)^3))/6;
    if x(k)>c
        y(k)=0;
    end;
end;
```



Przykładowe funkcje - Huber

$$if\ |x| \le c \qquad f(x) = \frac{x^2}{2} \qquad\qquad if\ |x| > c \quad f(x) = k\left(|x| - \frac{k}{2}\right)$$

```
c=1; k=1; n=0;
for i=0:0.1:5
     n=n+1;
     x(n)=i;
     if x(n)<= c
         y(n)=x(n)^2/2;
     else
         y(n)=k*(x(n)-(k/2));
     end;
end;
```



Metoda Duńska

Metoda opiera się na założeniu, że duża poprawka do obserwacji może wskazywać na jej obciążenie błędem grubym. Wyrównanie przebiega iteracyjnie. Wagi w kolejnej (n+1) iteracji wyznacza się według zasady:

$$p_i^{n+1} = \begin{cases} p_i^n & \text{dla} \quad |v_i| \le k \\ p_i^n \cdot f(v_i) & \text{dla} \quad |v_i| > k \end{cases}$$

f – funkcja tłumienia,

k – parametr sterującym, który określa dopuszczalny przedział wartości odchyłek v.

Metoda Duńska

Po *n*-tej iteracji dla każdej obserwacji weryfikuje się kryterium:

$$\frac{\left|\hat{v}_i^n\right|}{\sigma_0^n}\sqrt{p_i^n} < c$$

$\hat{v}_i^n$ - poprawka i-tej obserwacji w n-tej iteracji

σ_0^n - odchylenie standardowe w n-tej iteracji

p_i^n - waga i-tej obserwacji z poprzedniej iteracji (w pierwszej iteracji ustalona jest a'priori).

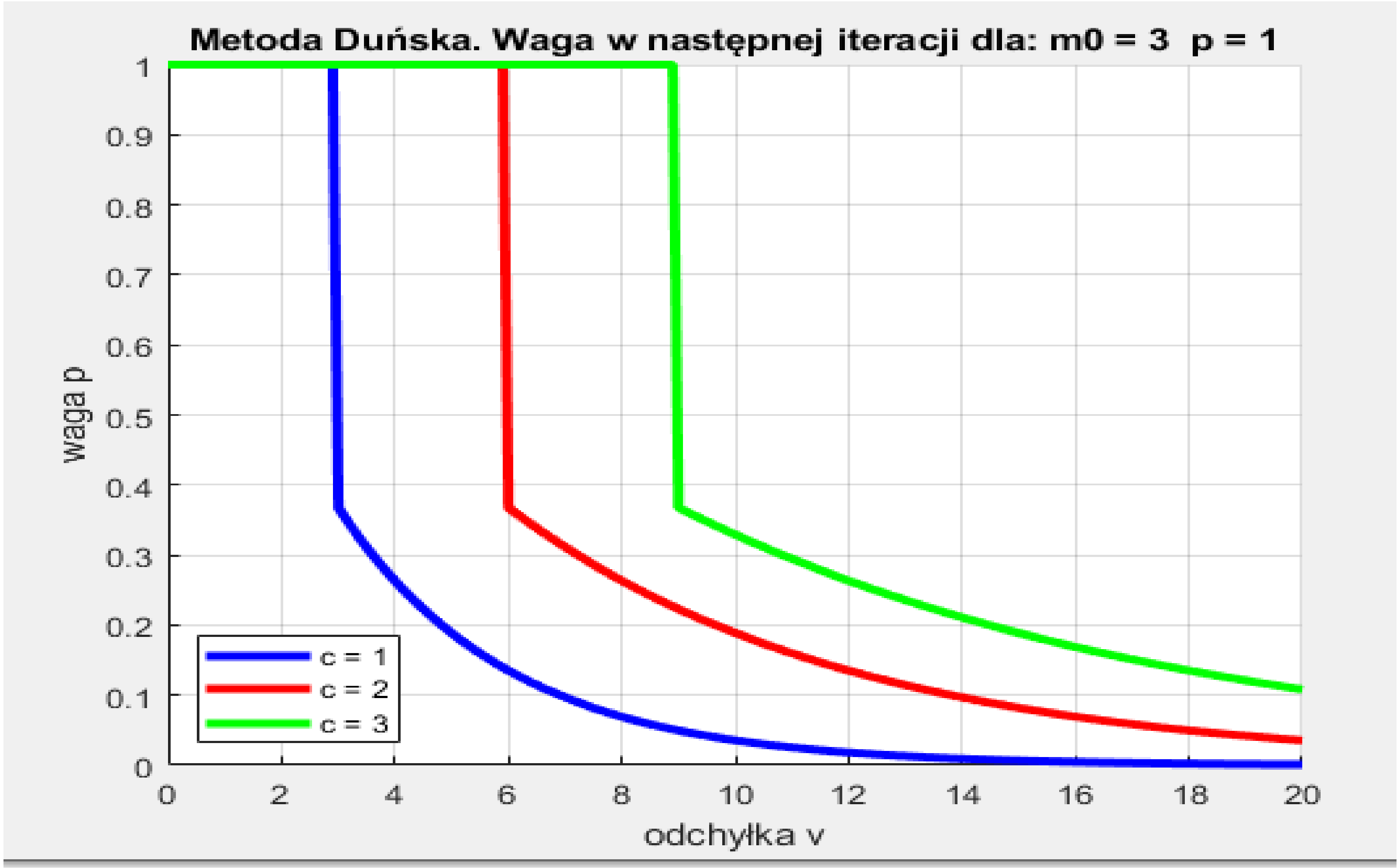
Metoda Duńska

W kolejnych iteracjach, jeśli kryterium jest spełnione, waga obserwacji pozostaje bez zmian, w przeciwnym wypadku:

$$p_i^{n+1} = p_i^n \exp\left(-\frac{1}{c} \times \frac{\left|\hat{v}_i^n\right|}{\sigma_0^n} \sqrt{p_i^n} \right)$$

c - stała z przedziału 1÷3, w pewnym sensie symbolizująca przyjmowany poziom prawdopodobieństwa.

Metoda Duńska – wagi w kolejnej iteracji



Metoda Duńska – przykład liczbowy 1

Dane są wyniki obserwacji zmiennej losowej jednowymiarowej:

x_i	p_i
$1,0$	1
$3,0$	1
$1,5$	1
$2,5$	1
$2,0$	1
$3,5$	1
$20,0$	1
$40,0$	1
$100,0$	1

Obliczyć wartość oczekiwaną $\hat{x}$

i odchylenie standardowe wartości oczekiwanej $\sigma_{\hat{x}}$

Zastosować Metodę Duńską,
przyjmując parametr c = 2

Obliczenia należy przeprowadzić iteracyjnie, do czasu uzyskania różnicy pomiędzy wartością oczekiwaną z dwóch ostatnich iteracji nie przekraczającą wartości 0,01.

Metoda Duńska – przykład liczbowy 1

Iteracja 1

x_i	p_i	Odchyłka v_i	$p_i v_i v_i$	Kryterium	Waga p_i po 1 iteracji
1,0	1	-18,28	334,08	1,66	1
3,0	1	-16,28	264,97	1,48	1
1,5	1	-17,78	316,05	1,62	1
2,5	1	-16,78	281,49	1,53	1
2,0	1	-17,28	298,52	1,57	1
3,5	1	-15,78	248,94	1,44	1
20,0	1	0,72	0,52	0,07	1
40,0	1	20,72	429,41	1,89	1
100,0	1	80,72	6516,08	7,35	0,0254
Σ	9	Σ	8690,06		

$\hat{x} = 19.28$	$\sigma_{\hat{x}} = 10.99$

Metoda Duńska – przykład liczbowy 1

Iteracja 2

x_i	p_i	Odchyłka v_i	$p_i v_i v_i$	Kryterium	Waga p_i po 2 iteracji
1,0	1	-8,47	71,82	1,71	1
3,0	1	-6,47	41,92	1,31	1
1,5	1	-7,97	63,60	1,61	1
2,5	1	-6,97	48,65	1,41	1
2,0	1	-7,47	55,87	1,51	1
3,5	1	-5,97	35,70	1,21	1
20,0	1	10,53	110,78	2,13	0,3448
40,0	1	30,53	931,79	6,18	0,0456
100,0	0,0254	90,53	207,98	2,92	0,0059
$\sum$	8,0254	$\sum$	1568,11		

$\hat{x} = 9{,}47$	$\sigma_{\hat{x}} = 4{,}94$

Metoda Duńska – przykład liczbowy 1

Iteracja 3

x_i	p_i	Odchyłka v_i	$p_i v_i v_i$	Kryterium	Waga p_i po 3 iteracji
1,0	1	-2,57	6,58	1,23	1
3,0	1	-0,57	0,32	0,27	1
1,5	1	-2,07	4,27	0,99	1
2,5	1	-1,07	1,14	0,51	1
2,0	1	-1,57	2,45	0,75	1
3,5	1	-0,07	0,00	0,03	1
20,0	0,3448	16,43	93,12	4,62	0,0342
40,0	0,0456	36,43	60,50	3,72	0,0071
100,0	0,0059	96,43	54,86	3,55	0,0010
Σ	6,3963	Σ	223,2484		

$\hat{x} = 3,57$	$\sigma_{\hat{x}} = 2,09$

... itd.

Metoda Duńska – przykład liczbowy 1

Iteracja 6

x_i	p_i	Odchyłka v_i	$p_i v_i v_i$	Kryterium	Waga p_i po 6 iteracji
1,0	0,2304	-1,26	0,37	2,06	0,0824
3,0	1	0,74	0,54	2,51	0,2852
1,5	1	-0,76	0,58	2,59	0,2743
2,5	1	0,24	0,06	0,81	1
2,0	1	-0,26	0,07	0,89	1
3,5	0,2437	1,24	0,37	2,08	0,0863
20,0	0,0012	17,74	0,37	2,07	0,0004
40,0	0,0003	37,74	0,37	2,07	0,00009
100,0	0,00004	97,74	0,37	2,06	0,00001
$\sum$	4,4756	$\sum$	3,1020		

$\hat{x} = 2,26$	$\sigma_{\hat{x}} = 0,29$

Metoda Duńska – przykład liczbowy 1

Wnioski:

Proszę porównać iterację 3 i 6.

W iteracji 6, tylko 2 spośród 9 wartości
zachowały wagę ustaloną na wstępie.
O czym może to świadczyć ?

Proszę obliczyć średnią i błąd średniej ważonej
z iteracji 3, po wyeliminowaniu 3 ostatnich wartości,
a następnie porównać z wynikami uzyskanymi po
6 iteracjach.

Metoda Duńska – przykład liczbowy 2

Dane są wyniki obserwacji zmiennej losowej jednowymiarowej:

x_i	p_i
1	2
1	1
1	2
3	4
4	1

Obliczyć wartość oczekiwaną $\hat{x}$

i odchylenie standardowe wartości oczekiwanej $\sigma_{\hat{x}}$

Zastosować Metodę Duńską,
przyjmując parametr c = 1

Obliczenia należy przeprowadzić iteracyjnie, do czasu uzyskania różnicy pomiędzy wartością oczekiwaną z dwóch ostatnich iteracji nie przekraczającą wartości 0,01.

Metoda Duńska – przykład liczbowy 2

Iteracja 1

x_i	p_i	Odchyłka v_i	$p_i v_i v_i$	Kryterium	Waga p_i po 1 iteracji
1	2	−1,10	2,42	2,74	0,1292
1	1	−1,10	1,21	1,94	0,1441
1	2	−1,10	2,42	2,74	0,1292
3	4	0,90	3,24	3,17	0,1681
4	1	1,90	3,61	3,35	0,0352
$\sum$	10	$\sum$	12,90		

$\hat{x} = 2,10$	$\sigma_{\hat{x}} = 0,57$

Metoda Duńska – przykład liczbowy 2

Iteracja 2

x_i	p_i	Odchyłka v_i	$p_i v_i v_i$	Kryterium	Waga p_i po 2 iteracji
1	0,1292	-0,73	0,0687	0,50	bez zmian
1	0,1441	-0,73	0,0767	0,53	bez zmian
1	0,1292	-0,73	0,0687	0,50	bez zmian
3	0,1681	1,27	0,2714	0,99	bez zmian
4	0,0352	2,27	0,1817	0,81	bez zmian
$\sum$	0,6059	$\sum$	0,6672		

$\hat{x} = 1,73$	$\sigma_{\hat{x}} = 0,52$

Metoda Duńska – przykład liczbowy 2

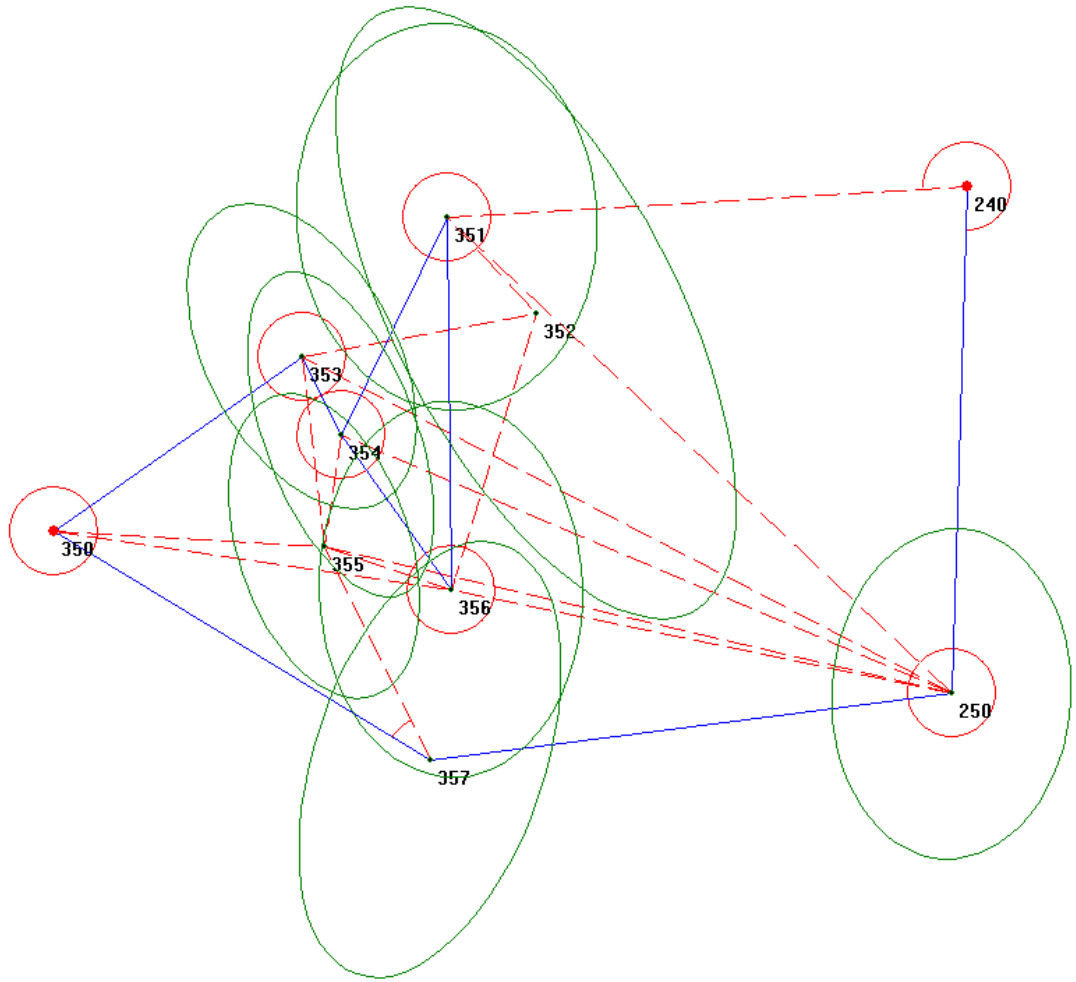
Wnioski:

Po pierwszej iteracji zmianie uległy wszystkie wagi.

Proszę zastanowić się, o czym może to świadczyć.

Proszę przeprowadzić obliczenia dla parametru c = 2 oraz c = 3.

Autorska metoda wykrywania błędów grubych w sieciach kątowo - liniowych



Autorska metoda wykrywania błędów grubych w sieciach kątowo - liniowych

Proponowane rozwiązanie polega na analizowaniu wpływu eliminacji poszczególnych obserwacji na długość przedziału ufności dla wariancji resztowej, która ma niesymetryczny rozkład χ^2.

Czynnikiem decydującym o zakończeniu procesu iteracyjnego jest weryfikacja hipotezy dotyczącej ilorazu długości przedziałów ufności dla wariancji resztowych z dwóch kolejnych iteracji.

Iteracja 1 m0 = 6,61

Wyrównanie

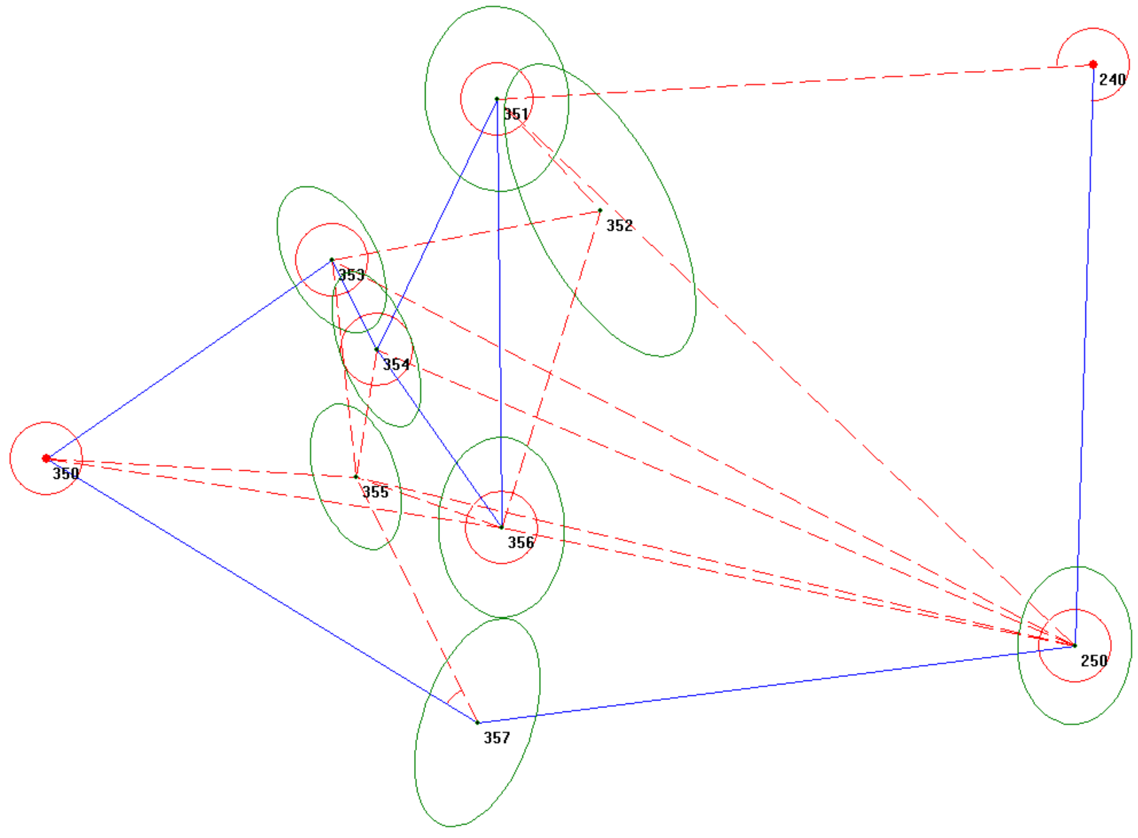
Wyrównaj sieć | Zapisz punkty | Ilość iteracji: 1 m0 = 6,61

Punkty | Boki | Kąty

Nr	X wyr. [m]	Y wyr. [m]	DX [m]	DY [m]	mx [mm]	my [mm]	mp [mm]	A [mm]	B [mm]	f [g]
250	5355635,7017	4509147,0066	-0,3045	-0,0844	50,9	70,3	86,8	70,4	50,9	3,30050
351	5357666,2932	4506993,9886	0,0803	-0,0657	64,2	82,3	104,3	82,4	64,0	-5,30870
352	5357254,8642	4507378,3575	0,0495	-0,0674	130,3	85,4	155,8	143,8	60,1	-30,76910
353	5357070,1696	4506378,8891	0,1296	-0,0931	65,0	48,9	81,3	70,7	40,1	-31,88510
354	5356737,5317	4506546,0089	0,1060	-0,1074	69,2	39,8	79,8	73,0	32,3	-23,09940
355	5356264,2154	4506472,1886	0,1082	-0,1368	64,8	40,8	76,6	67,2	36,7	-20,47040
356	5356076,6979	4507010,6962	0,0673	-0,1430	80,2	56,2	97,9	80,2	56,1	-1,70740
357	5355353,1750	4506923,2898	-0,1067	-0,1066	92,8	55,8	108,3	96,7	48,9	20,98550

Iteracja 2 **m0 = 2,75**

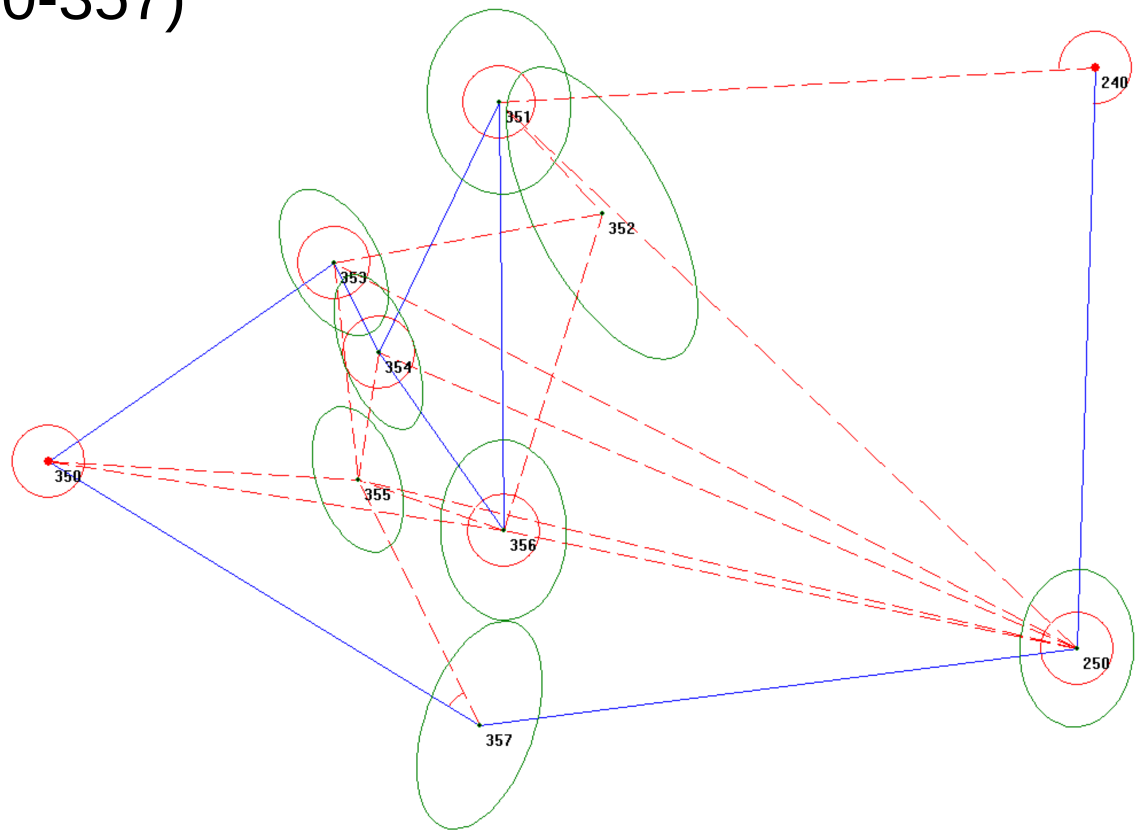
Eliminacja obserwacji kątowej (357-350-353)



Iteracja 3 **m0 = 1,99**

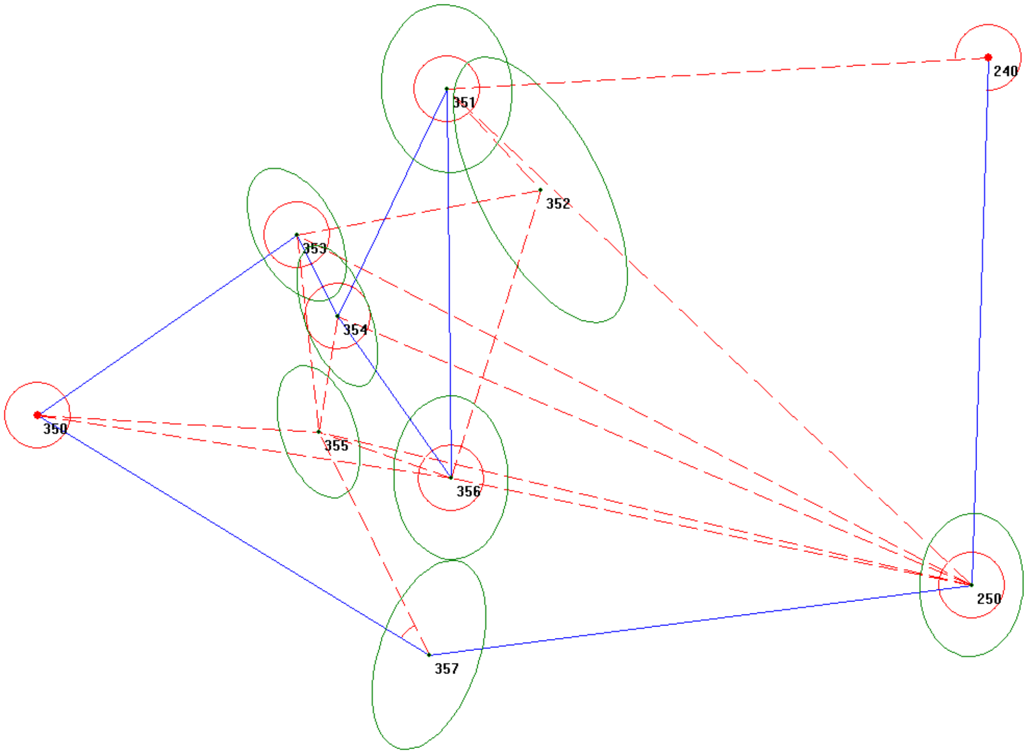
Eliminacja obserwacji kątowych (357-350-353)

i (356-350-357)



Iteracja 4 **m0 = 1,99**

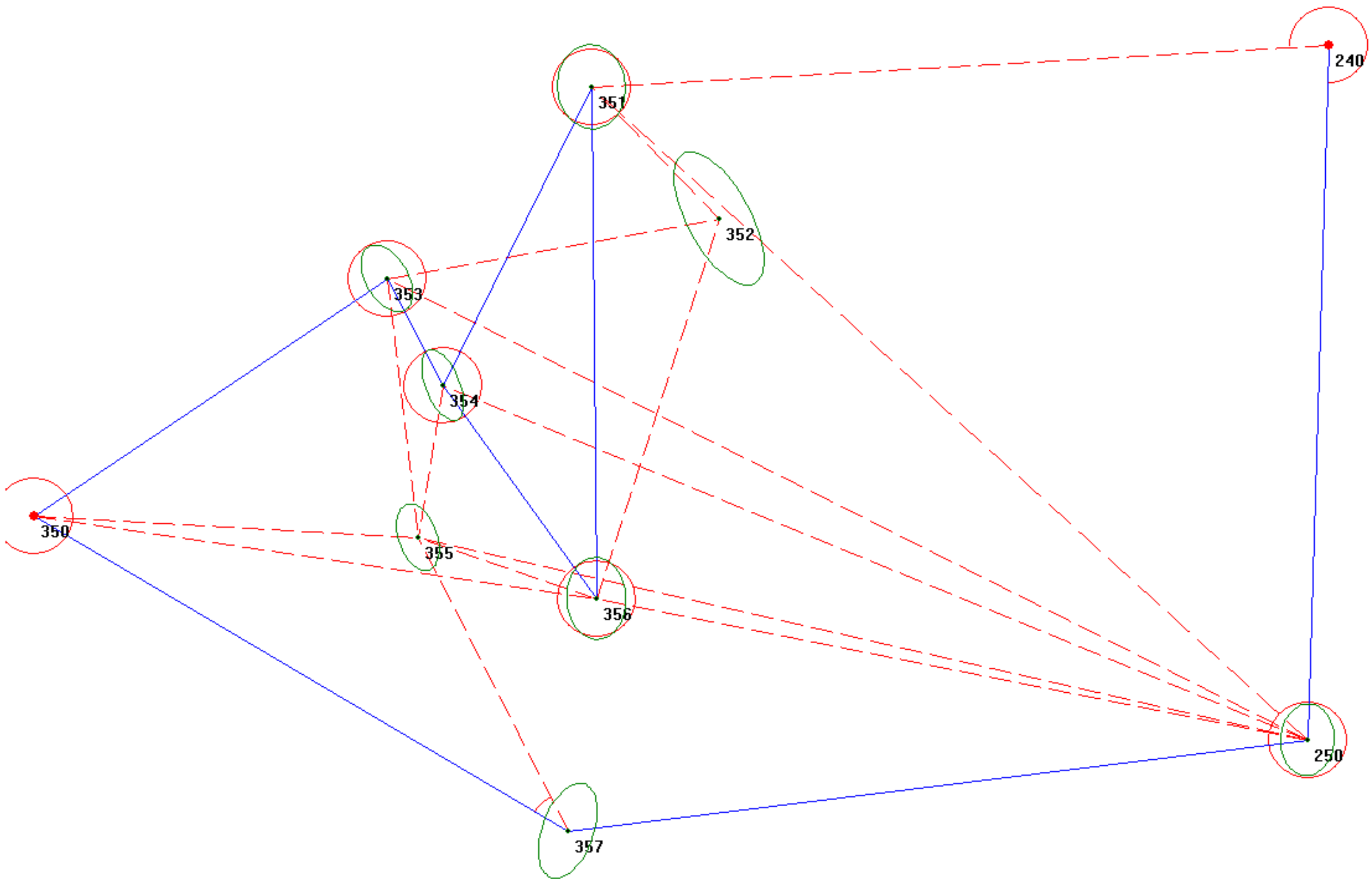
Eliminacja obserwacji kątowych (357-350-353) i (356-350-357) oraz długości (240-250)



Itd..

Iteracja 7

m0 = 1,05



Literatura

- Baarda, W., 1968. A testing procedure for use in geodetic network. Netherlands Geodetic Commission, Publications on geodesy, Vol. 2, No.5, Delft, 97 pp.
- Caspary, W.F., 1988. Concept of Network and Deformation Analysis. Mon. 11, School of Surveying, University of New South Wales, Kensington, 183 pp.
- Ding, X. and Coleman, R., 1996, Sensitivity Analysis in Gauss-Markov Models, *Journal of Geodesy*, Vol. 70 (8), pp.480-488.
- Kadaj R. , 1980: Rozwinięcie koncepcji niestandardowej metody estymacji. GiK , Vol. XXIX, nr ¾.
- Koch, K.-R., 1987. Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models. Springer, New York, 378 pp.
- Pope, A. J., 1976. The Statistics of Residuals and the Detection of Outliers. Tech. Rep. NOS65 NGS1, Rockville, Md., 617 pp.
- Preweda E., 2013, Rachunek wyrównawczy ⇒ modele statystyczne [Adjustment computations ⇒ statistical models]. Kraków, Wyd. PROGRES, 2013 r., 387 pp
- Prószyński W., Kwaśniak M., 2002. Niezawodność sieci geodezyjnych. Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa 144 pp.

Dyskusja

Dziękuję za uwagę