Przykładowy projekt (nie wzorcowy)

Projekt nr 1

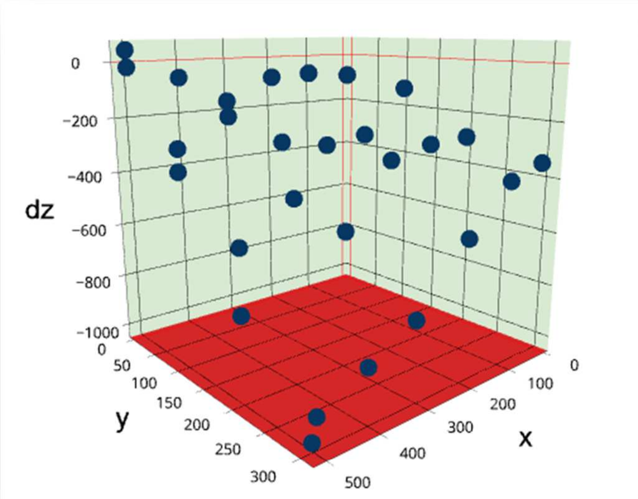
Aproksymacja powierzchni

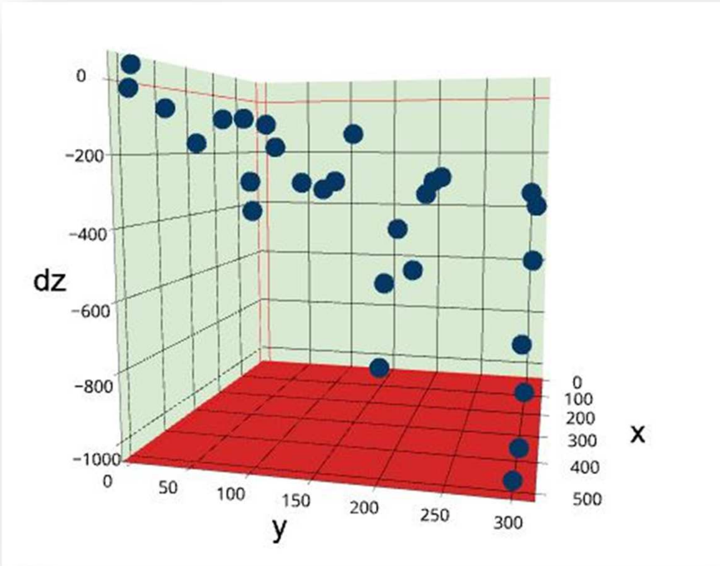
Imię i Nazwisko
Rok.. Grupa Nr
zestawu: ....

....

Spis treści

1. Wizualizacja otrzymanych danych (dane surowe)





2. Sprawozdanie techniczne

2.1 Dane formalno – prawne

2.1.1 Zleceniodawca: ....

2.1.2 Wykonawca: ....

2.1.3 Okres wykonywania zlecenia: ....

2.1.4 Przedmiot zlecenia: Aproksymacja powierzchni – wyznaczenie parametrów 4 modeli prezentujcących przemieszczenia terenu. Prognoza przemieszczenia w punkcie o zadanych współrzdęnych. Ocena dokładnocśi uzyskanych wyników.

2.2 Dane przekazane przez Zleceniodawcę

- przemieszczenia pionowe i przybliżone współrzędne płaskie reperów (zestaw nr ....

Nr	*x[m]*	*y[m]*	*dz[mm]*
1	*0,5*	*0,3*	*-8,8*
2	*0,4*	*10,5*	*-12,6*
3	*0,8*	*20,4*	*-29,0*
4	*0,3*	*30,0*	*-34,6*
5	*10,8*	*0,1*	*-7,2*
6	*10,2*	*10,0*	*-30,2*
7	*10,5*	*20,4*	*-29,8*
8	*10,3*	*30,7*	*-37,9*
9	*20,1*	*0,1*	*-8,1*
10	*20,4*	*10,5*	*-32,0*
11	*20,5*	*20,6*	*-33,1*
12	*20,0*	*30,6*	*-54,2*
13	*30,7*	*0,2*	*-16,5*
14	*30,2*	*10,2*	*-28,9*
15	*30,3*	*20,4*	*-55,4*
16	*30,3*	*30,0*	*-76,9*
17	*40,6*	*0,2*	*-6,3*
18	*40,8*	*10,0*	*-17,8*
19	*40,4*	*20,2*	*-40,6*
20	*40,8*	*30,5*	*-85,0*
21	*50,3*	*0,1*	*-1,8*
22	*50,3*	*10,0*	*-26,9*
23	*50,6*	*20,4*	*-52,5*
24	*50,3*	*30,0*	*-102,4*
25	*50,7*	*0,5*	*4,3*
26	*50,6*	*10,2*	*-34,5*
27	*50,2*	*20,0*	*-75,0*
28	*50,0*	*30,4*	*-93,9*

- współrzędne płaskie punktu, dla którego należało wyznaczyć prognozowane przemieszczenie pionowe: **X = 15m, Y=15m**.

2.3 Przebieg czynności

2.3.1 Model 1: $\Delta \boldsymbol{z} = \boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{a_1 x} + \boldsymbol{a_2 y} + \boldsymbol{\delta}$

Poszukiwane wartości parametrów modelu (a_0, a_1, a_2) obliczone zostały metodą najmniejszych kwadratów (z wykorzystaniem rachunku macierzowego), zgodnie z procedurą zaprezentowaną poniżej.

Układ równań obserwacyjnych w postaci macierzowej: ***Ax* = *L***

Macierz A		
a_0	a_1	a_2
1,0	0,5	0,3
1,0	0,4	10,5
1,0	0,8	20,4
1,0	0,3	30,0
1,0	10,8	0,1
1,0	10,2	10,0
1,0	10,5	20,4
1,0	10,3	30,7
1,0	20,1	0,1
1,0	20,4	10,5
1,0	20,5	20,6
1,0	20,0	30,6
1,0	30,7	0,2
1,0	30,2	10,2
1,0	30,3	20,4
1,0	30,3	30,0
1,0	40,6	0,2
1,0	40,8	10,0
1,0	40,4	20,2
1,0	40,8	30,5
1,0	50,3	0,1
1,0	50,3	10,0
1,0	50,6	20,4
1,0	50,3	30,0
1,0	50,7	0,5
1,0	50,6	10,2
1,0	50,2	20,0
1,0	50,0	30,4

Wektor X
a_0
a_1
a_2

Wektor L
dz
-8,8
-12,6
-29,0
-34,6
-7,2
-30,2
-29,8
-37,9
-8,1
-32,0
-33,1
-54,2
-16,5
-28,9
-55,4
-76,9
-6,3
-17,8
-40,6
-85,0
-1,8
-26,9
-52,5
-102,4
4,3
-34,5
-75,0
-93,9

Obliczenia:

$A^TA =$

28,000000	811,900000	427,500000
811,900000	32680,610000	12346,310000
427,500000	12346,310000	10059,330000

$(A^TA)^{-1} =$

0,195088	-0,003197	-0,004367
-0,003197	0,000109	0,000002
-0,004367	0,000002	0,000283

$\boldsymbol{A^T L} =$

-1027,600000
-34427,050000
-22959,510000

Obliczone parametry modelu:

$\boldsymbol{X = (A^T A)^{-1} A^T L} =$

9,853	a_0
-0,518	a_1
-2,065	a_2

Ocena dokładności wyników:

- odchyłki do modelu: ***V=Ax-L [mm]***

$\boldsymbol{Ax} =$

8,974654
-12,041574
-32,697110
-52,266878
4,053251
-16,084373
-37,720864
-58,891850
-0,763337
-22,399829
-43,313090
-63,709055
-6,459762
-26,855726
-47,975537
-67,804261
-11,587098
-31,932503
-52,793357
-74,275091
-16,404303
-36,852674
-58,489166
-78,162516
-17,437665
-37,421147
-57,455804
-78,833339

$\boldsymbol{V} =$

17,8	δ_1
0,6	δ_2
-3,7	δ_3
-17,7	δ_4
11,3	δ_5
14,1	δ_6
-7,9	δ_7
-21,0	δ_8
7,3	δ_9
9,6	δ_{10}
-10,2	δ_{11}
-9,5	δ_{12}
10,0	δ_{13}
2,0	δ_{14}
7,4	δ_{15}
9,1	δ_{16}
-5,3	δ_{17}
-14,1	δ_{18}
-12,2	δ_{19}
10,7	δ_{20}
-14,6	δ_{21}
-10,0	δ_{22}
-6,0	δ_{23}
24,2	δ_{24}
-21,7	δ_{25}
-2,9	δ_{26}
17,5	δ_{27}
15,1	δ_{28}

- estymator odchylenia standardowego $\widehat{\sigma_0}$

$$\widehat{\sigma_0}^2 = \frac{V^T V}{n-u} = \frac{4497{,}793700}{28-3} = 179{,}911748\ mm^2$$

$$\boldsymbol{\widehat{\sigma_0}} = 13{,}41\ mm$$

- odchylenia standardowe parametrów modelu $\widehat{\boldsymbol{\delta a}}_{\boldsymbol{i}}$
  Cov(X) $= \widehat{\sigma_0}^2 * (A^T A)^{-1}$

35,098606	*-0,575135*	*-0,785724*
-0,575135	*0,019689*	*0,000277*
-0,785724	*0,000277*	*0,050937*

$\widehat{\boldsymbol{\delta a}}_{\boldsymbol{0}}$	*5,924*
$\widehat{\boldsymbol{\delta a}}_{\boldsymbol{1}}$	*0,140*
$\widehat{\boldsymbol{\delta a}}_{\boldsymbol{2}}$	*0,226*

- współczynnik determinacji $\boldsymbol{R^2}$

$$R^2 = 1 - \frac{[vv]}{[L'L']}$$

Lp.	***L' = L_i - $L_{średnie}$ [mm]***	***L'L' [mm^2]***
1	*27,9*	*778,4*
2	*24,1*	*580,8*
3	*7,7*	*59,3*
4	*2,1*	*4,4*
5	*29,5*	*870,3*
6	*6,5*	*42,3*
7	*6,9*	*47,6*
8	*-1,2*	*1,4*
9	*28,6*	*818,0*
10	*4,7*	*22,1*
11	*3,6*	*13,0*
12	*-17,5*	*306,3*
13	*20,2*	*408,0*
14	*7,8*	*60,8*
15	*-18,7*	*349,7*
16	*-40,2*	*1616,0*
17	*30,4*	*924,2*
18	*18,9*	*357,2*
19	*-3,9*	*15,2*
20	*-48,3*	*2332,9*
21	*34,9*	*1218,0*
22	*9,8*	*96,0*
23	*-15,8*	*249,6*
24	*-65,7*	*4316,5*
25	*41,0*	*1681,0*
26	*2,2*	*4,8*
27	*-38,3*	*1466,9*
28	*-57,2*	*3271,8*
	∑ =	***21912,6***

$\boldsymbol{R^2 = 0,79}$

- estymacja przedziałowa dla nieznanej wartości przeciętnej, na poziomie prawdopodobieństwa p = 0,90

  Dla prawdopodobieństwa p = 0,90 poziom istotności α = 0,10. Dla analizowanego modelu liczba stopni swobody jest równa 25. Z tablicy kwantyli rozkładu t-Studenta odczytano zatem kwanty ***t****(1- α/2;n-u)=* ***t****(0,95;25) =* ***1,7081***.
  Estymację wykonano poprzez przemnożenie obliczonych wcześniej odchyleń parametrów przez odczytaną wartość kwantyla.

	p = 0,68	***p = 0,90***
$\hat{\delta}\boldsymbol{a_0}$	*5,924*	*10,119*
$\hat{\delta}\boldsymbol{a_1}$	*0,140*	*0,240*
$\hat{\delta}\boldsymbol{a_2}$	*0,226*	*0,386*

Obliczenie prognozowanej wartości przemieszczenia (z oceną dokładności) dla punktu o zadanych współrzędnych

Ostateczna postać modelu wygląda następująco:

$$\boldsymbol{\Delta z = 9,853 - 0,518x - 2,065y}$$

Dla punktu o zadanych współrzędnych przemieszczenie pionowe wyniosło:

$$\boldsymbol{\Delta z_{(15,15)} = -28,9\ mm}$$

Ocena dokładności – na podstawie prawa narastania kowariancji:

$$\boldsymbol{m_{\Delta z}}^2 = F^T * cov(X) * F,$$

gdzie F – macierz pochodnych cząstkowych

	F
a_0	*1*
a_1	*15*
a_2	*15*

$\boldsymbol{F^T * cov(X) =}$

14,685718	*-0,275649*	*-0,017518*

$m_{\Delta z}{}^2 = 10,288211\ mm^2$

$\boldsymbol{m_{\Delta z} = \pm 3,21\ mm}$

<u>Weryfikacja hipotezy statystycznej o istotności parametrów strukturalnych modelu na zadanych poziomach prawdopodobieństwa p</u>

- Sformułowanie hipotez:
  <u>Hipoteza zerowa „0”</u> zakłada, że parametr przy zmiennej objaśniającej jest równy *0* (szacowany parametr nie jest istotny statystycznie).
  <u>Hipoteza alternatywna „A”</u> zakłada, że parametr przy zmiennej objaśniającej jest różny od zera (szacowany parametr jest istotny statystycznie).
- Wyznaczenie dla każdego parametru wartości sprawdzianu – *t empiryczne,* ze wzoru*:*
  $t_{a_i} = \frac{a_i}{\hat{\delta}_{a_i}},$
  $gdzie\ a_i - szacowana\ wartość\ parametru$
  $\hat{\delta}_{a_i} - wartość\ błędu\ oszacowania\ parametru$
- Określenie wartości parametru *t krytycznego* poprzez odczytanie z tablicy kwantyli rozkładu t-Studenta: ***t****(0,950;25) =* ***1,7081*** *oraz t(0,975;25)=***2,0595**
- Weryfikacja hipotezy
  | *t-empiryczne* | > *t krytyczne* – odrzucamy hipotezę zerową i przyjmujemy alternatywną
  | *t-empiryczne* | ≤ *t krytyczne* – nie daje podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej

parametr	t empiryczne	| t empiryczne |	t krytyczne			
			p=0,90	wynik	p=0,95	wynik
a_0	1,6632	1,6632	1,7081	0	2,0595	0
a_1	-3,6910	3,6910		A		A
a_2	-9,1518	9,1518		A		A

Wynik

0 *hipoteza zerowa: parametr statystycznie nieistotny*

A *hipoteza alternatywna: parametr statystycznie istotny*

2.3.2 Model 2: $\Delta \boldsymbol{z} = \boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{a_1 x} + \boldsymbol{a_2 y} + \boldsymbol{a_3 x^2} + \boldsymbol{a_4 y^2} + \boldsymbol{a_5 xy} + \boldsymbol{\delta}$

Procedura obliczeniowa analogicznie jak dla modelu 1

<u>Obliczenie wartości parametrów a_i</u>

Układ równań obserwacyjnych w postaci macierzowej: ***Ax = L***

Macierz A					
a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1,0	0,5	0,3	0,3	0,1	0,2
1,0	0,4	10,5	0,2	110,3	4,2
1,0	0,8	20,4	0,6	416,2	16,3
1,0	0,3	30,0	0,1	900,0	9,0
1,0	10,8	0,1	116,6	0,0	1,1
1,0	10,2	10,0	104,0	100,0	102,0
1,0	10,5	20,4	110,3	416,2	214,2
1,0	10,3	30,7	106,1	942,5	316,2
1,0	20,1	0,1	404,0	0,0	2,0
1,0	20,4	10,5	416,2	110,3	214,2
1,0	20,5	20,6	420,3	424,4	422,3
1,0	20,0	30,6	400,0	936,4	612,0
1,0	30,7	0,2	942,5	0,0	6,1
1,0	30,2	10,2	912,0	104,0	308,0
1,0	30,3	20,4	918,1	416,2	618,1
1,0	30,3	30,0	918,1	900,0	909,0
1,0	40,6	0,2	1648,4	0,0	8,1
1,0	40,8	10,0	1664,6	100,0	408,0
1,0	40,4	20,2	1632,2	408,0	816,1
1,0	40,8	30,5	1664,6	930,3	1244,4
1,0	50,3	0,1	2530,1	0,0	5,0
1,0	50,3	10,0	2530,1	100,0	503,0
1,0	50,6	20,4	2560,4	416,2	1032,2
1,0	50,3	30,0	2530,1	900,0	1509,0
1,0	50,7	0,5	2570,5	0,3	25,4
1,0	50,6	10,2	2560,4	104,0	516,1
1,0	50,2	20,0	2520,0	400,0	1004,0
1,0	50,0	30,4	2500,0	924,2	1520,0

Wektor X
a_0
a_1
a_2
a_3
a_4
a_5

Wektor L
dz
-8,8
-12,6
-29,0
-34,6
-7,2
-30,2
-29,8
-37,9
-8,1
-32,0
-33,1
-54,2
-16,5
-28,9
-55,4
-76,9
-6,3
-17,8
-40,6
-85,0
-1,8
-26,9
-52,5
-102,4
4,3
-34,5
-75,0
-93,9

Obliczenia:

$A^TA =$

28,000000	811,900000	427,500000	32680,610000	10059,330000	12346,310000
811,900000	32680,610000	12346,310000	1441337,863000	289887,211000	495852,805000
427,500000	12346,310000	10059,330000	495852,805000	261434,865000	289887,211000
32680,610000	1441337,863000	495852,805000	66572808,953300	11620808,277300	21827820,158300
10059,330000	289887,211000	261434,865000	11620808,277300	7189787,693700	7525382,123900
12346,310000	495852,805000	289887,211000	21827820,158300	7525382,123900	11620808,277300

$(A^TA)^{-1}$ =

0,501373	*-0,021712*	*-0,027395*	*0,000233*	*0,000385*	*0,000391*
-0,021712	*0,001991*	*0,000429*	*-0,000031*	*-0,000001*	*-0,000014*
-0,027395	*0,000429*	*0,004318*	*-0,000001*	*-0,000108*	*-0,000025*
0,000233	*-0,000031*	*-0,000001*	*0,000001*	*0,000000*	*0,000000*
0,000385	*-0,000001*	*-0,000108*	*0,000000*	*0,000004*	*0,000000*
0,000391	*-0,000014*	*-0,000025*	*0,000000*	*0,000000*	*0,000001*

$A^T L$ =

-1027,600000
-34427,050000
-22959,510000
-1441787,559000
-593821,655000
-793662,933000

Obliczone parametry modelu:

$X = (A^TA)^{-1} A^T L$ =

-12,989	a_0
0,098	a_1
-0,248	a_2
0,003	a_3
-0,010	a_4
-0,052	a_5

Ocena dokładności wyników:

- odchyłki do modelu: ***V=Ax-L [mm]***

$AX =$

-13,022136
-16,884206
-23,016442
-29,945204
-11,628658
-20,459864
-32,033408
-45,253047
-9,814143
-24,509874
-41,019990
-58,680114
-7,229391
-26,664783
-48,495524
-70,936987
-4,018572
-28,253518
-55,334774
-85,362804
0,047648
-29,405467
-62,664584
-94,937244
-0,941056
-30,050576
-61,101717
-95,983568

V =

-4,2	δ_1
-4,3	δ_2
6,0	δ_3
4,7	δ_4
-4,4	δ_5
9,7	δ_6
-2,2	δ_7
-7,4	δ_8
-1,7	δ_9
7,5	δ_{10}
-7,9	δ_{11}
-4,5	δ_{12}
9,3	δ_{13}
2,2	δ_{14}
6,9	δ_{15}
6,0	δ_{16}
2,3	δ_{17}
-10,5	δ_{18}
-14,7	δ_{19}
-0,4	δ_{20}
1,8	δ_{21}
-2,5	δ_{22}
-10,2	δ_{23}
7,5	δ_{24}
-5,2	δ_{25}
4,4	δ_{26}
13,9	δ_{27}
-2,1	δ_{28}

- estymator odchylenia standardowego $\widehat{\sigma_0}$

  $\widehat{\sigma_0}^2 = \frac{V^T V}{n-u} = \frac{4497,793700}{28-6} = 60,381620\ mm^2$

  $\boldsymbol{\widehat{\sigma_0}} = 7,77\ mm$

- odchylenia standardowe parametrów modelu $\boldsymbol{\hat{\delta} a_i}$

  $\boldsymbol{Cov(X) = \widehat{\sigma_0}^2 * (A^T A)^{-1}}$

30,273741	*-1,311000*	*-1,654147*	*0,014046*	*0,023239*	*0,023606*
-1,311000	*0,120196*	*0,025907*	*-0,001867*	*-0,000063*	*-0,000834*
-1,654147	*0,025907*	*0,260740*	*-0,000048*	*-0,006526*	*-0,001535*
0,014046	*-0,001867*	*-0,000048*	*0,000034*	*0,000001*	*0,000001*
0,023239	*-0,000063*	*-0,006526*	*0,000001*	*0,000213*	*0,000000*
0,023606	*-0,000834*	*-0,001535*	*0,000001*	*0,000000*	*0,000053*

	a_i	$\lvert a_i \rvert$	$\hat{\delta}a_i$	$a_i > \hat{\delta}a_i$
a_0	-12,989	12,989	5,502	Tak
a_1	0,098	0,098	0,347	Nie
a_2	-0,248	0,248	0,511	Nie
a_3	0,003	0,003	0,006	Nie
a_4	-0,010	0,010	0,015	Nie
a_5	-0,052	0,052	0,007	Tak

- współczynnik determinacji R^2

  $$R^2 = 1 - \frac{[vv]}{[L'L']} = 0{,}94$$

- estymacja przedziałowa dla nieznanej wartości przeciętnej, na poziomie prawdopodobieństwa p = 0,90

  t*(0,95;22)* = ***1,7171***

  Estymację wykonano poprzez przemnożenie obliczonych wcześniej odchyleń parametrów przez odczytaną wartość kwantyla.

	p = 0,68	**p = 0,90**
$\hat{\delta}a_0$	5,502	9,448
$\hat{\delta}a_1$	0,347	0,595
$\hat{\delta}a_2$	0,511	0,877
$\hat{\delta}a_3$	0,006	0,010
$\hat{\delta}a_4$	0,015	0,025
$\hat{\delta}a_5$	0,007	0,012

Obliczenie prognozowanej wartości przemieszczenia (z oceną dokładności) dla punktu o zadanych współrzędnych

Ostateczna postać modelu wygląda następująco:

$$\Delta z = -12{,}989 + 0{,}098x - 0{,}248y + 0{,}003x^2 - 0{,}010y^2 - 0{,}052xy$$

Dla punktu o zadanych współrzędnych przemieszczenie pionowe wyniosło:

$\Delta z_{(15,15)} = -28,5\ mm$

Ocena dokładności – na podstawie prawa narastania kowariancji:

$m_{\Delta z}{}^2 = F^T * cov(X) * F,$

gdzie F – macierz pochodnych cząstkowych

F	
1	a_0
15	a_1
15	a_2
225	a_3
225	a_4
225	a_5

$F^T*cov(X) =$

-0,502848	0,258576	0,820859	-0,006552	-0,027232	0,000135

$m_{\Delta z}{}^2 = 8,117708\ mm^2$

$m_{\Delta z} = \pm 2,85\ mm$

Weryfikacja hipotezy statystycznej o istotności parametrów strukturalnych modelu na zadanych poziomach prawdopodobieństwa p

t krytyczne:

t(0,950;22) = ***1,7171*** *oraz t(0,975;22) =* ***2,0739***

parametr	t empiryczne	| t empiryczne |	t krytyczne p = 0,90	wynik	t krytyczne p = 0,95	wynik
a_0	-2,3606	2,3606	1,7171	A	2,0739	A
a_1	0,2812	0,2812		0		0
a_2	-0,4857	0,4857		0		0
a_3	0,5672	0,5672		0		0
a_4	-0,6902	0,6902		0		0
a_5	-7,1829	7,1829		A		A

2.3.3 Model 3: $\Delta z = \boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{a_5 xy} + \boldsymbol{\delta}$

Obliczenie wartości parametrów a_i

Układ równań obserwacyjnych w postaci macierzowej: ***Ax* = *L***

Macierz A	
a_0	a_5
1,0	0,2
1,0	4,2
1,0	16,3
1,0	9,0
1,0	1,1
1,0	102,0
1,0	214,2
1,0	316,2
1,0	2,0
1,0	214,2
1,0	422,3
1,0	612,0
1,0	6,1
1,0	308,0
1,0	618,1
1,0	909,0
1,0	8,1
1,0	408,0
1,0	816,1
1,0	1244,4
1,0	5,0
1,0	503,0
1,0	1032,2
1,0	1509,0
1,0	25,4
1,0	516,1
1,0	1004,0
1,0	1520,0

Wektor X
a_0
a_5

Wektor L
dz
-8,8
-12,6
-29,0
-34,6
-7,2
-30,2
-29,8
-37,9
-8,1
-32,0
-33,1
-54,2
-16,5
-28,9
-55,4
-76,9
-6,3
-17,8
-40,6
-85,0
-1,8
-26,9
-52,5
-102,4
4,3
-34,5
-75,0
-93,9

Obliczenia:

$\boldsymbol{A^T A} =$

28,000000	12346,310000
12346,310000	11620808,277300

$(A^T A)^{-1}$ =

0,067191	-0,000071
-0,000071	0,000000

$A^T L$ =

-1027,600000
-793662,933000

Obliczone parametry modelu:

$X = (A^T A)^{-1} A^T L =$

a_0	-12,389
a_5	-0,055

Ocena dokładności wyników:

- odchyłki do modelu: ***V=Ax-L [mm]***

AX =

-12,397506
-12,620799
-13,289023
-12,885442
-12,448781
-18,012903
-24,198938
-29,823156
-12,500055
-24,198938
-35,672322
-46,131241
-12,727759
-29,372712
-46,468661
-62,506037
-12,836924
-34,883906
-57,382987
-80,997979
-12,666560
-40,121635
-69,300751
-95,586434
-13,786883
-40,844993
-67,743767
-96,192908

V =

-3,6	δ_1
0,0	δ_2
15,7	δ_3
21,7	δ_4
-5,2	δ_5
12,2	δ_6
5,6	δ_7
8,1	δ_8
-4,4	δ_9
7,8	δ_{10}
-2,6	δ_{11}
8,1	δ_{12}
3,8	δ_{13}
-0,5	δ_{14}
8,9	δ_{15}
14,4	δ_{16}
-6,5	δ_{17}
-17,1	δ_{18}
-16,8	δ_{19}
4,0	δ_{20}
-10,9	δ_{21}
-13,2	δ_{22}
-16,8	δ_{23}
6,8	δ_{24}
-18,1	δ_{25}
-6,3	δ_{26}
7,3	δ_{27}
-2,3	δ_{28}

- estymator odchylenia standardowego $\widehat{\sigma_0}$
  $\widehat{\sigma_0}^2 = \frac{V^T V}{n-u} = \frac{4497,793700}{28-2} = 120,634345\ mm^2$
  $\boldsymbol{\widehat{\sigma_0}} = 10,98\ mm$

- odchylenia standardowe parametrów modelu $\boldsymbol{\widehat{\delta a_i}}$
  Cov(X) = $\boldsymbol{\widehat{\sigma_0}^2}$ **** (A^T A)^-1***

8,105570	*-0,008612*
-0,008612	*0,000020*

$\boldsymbol{\widehat{\delta a_0}}$	*2,847*
$\boldsymbol{\widehat{\delta a_5}}$	*0,004*

- współczynnik determinacji $\boldsymbol{R^2}$
  $R^2 = 1 - \frac{[vv]}{[L'L']} = 0,86$

- estymacja przedziałowa dla nieznanej wartości przeciętnej, na poziomie prawdopodobieństwa p = 0,90

  t*(0,95;26) =* ***1,7056***

  Estymację wykonano poprzez przemnożenie obliczonych wcześniej odchyleń parametrów przez odczytaną wartość kwantyla.

	p = 0,68	***p = 0,90***
$\boldsymbol{\widehat{\delta a_0}}$	*2,847*	*4,856*
$\boldsymbol{\widehat{\delta a_5}}$	*0,004*	*0,008*

Obliczenie prognozowanej wartości przemieszczenia (z oceną dokładności) dla punktu o zadanych współrzędnych

Ostateczna postać modelu wygląda następująco:

$\Delta \boldsymbol{z} = \boldsymbol{-12,389 - 0,055xy}$

Dla punktu o zadanych współrzędnych przemieszczenie pionowe wyniosło:

$\Delta \boldsymbol{z}_{(\mathbf{15,15})} = \boldsymbol{-24,8\ mm}$

Ocena dokładności – na podstawie prawa narastania kowariancji:

$\boldsymbol{m_{\Delta z}}^{\mathbf{2}} = F^T * cov(X) * F,$

gdzie F – macierz pochodnych cząstkowych

F	
1	a_0
225	a_5

$F^T * cov(X) =$

6,167958	*-0,004217*

$m_{\Delta z}{}^2 = 5{,}219058\ mm^2$

$\boldsymbol{m_{\Delta z} = \pm 2{,}28\ mm}$

Weryfikacja hipotezy statystycznej o istotności parametrów strukturalnych modelu na zadanych poziomach prawdopodobieństwa p

t krytyczne:

t*(0,950;26) =* ***1,7056*** *oraz t(0,975;26) =* ***2,0555***

	t empiryczne	***| t empiryczne |***	***t krytyczne***			
parametr			***p = 0,90***	***wynik***	***p = 0,95***	***wynik***
$\boldsymbol{a_0}$	*-4,3516*	*4,3516*	*1,7056*	*A*	*2,0555*	*A*
$\boldsymbol{a_5}$	*-12,4758*	*12,4758*		*A*		*A*

2.3.4 Model 4: $\Delta z = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy + a_6x^3 + a_7y^3 + a_8x^2y^2 + \delta$

Obliczenie wartości parametrów a_i

Układ równań obserwacyjnych w postaci macierzowej: ***Ax = L***

Macierz A								
a_0	**a_1**	**a_2**	**a_3**	**a_4**	**a_5**	**a_6**	**a_7**	**a_8**
1,0	0,5	0,3	0,3	0,1	0,15	0,1	0,0	0,0225
1,0	0,4	10,5	0,2	110,3	4,2	0,1	1157,6	17,64
1,0	0,8	20,4	0,6	416,2	16,32	0,5	8489,7	266,3424
1,0	0,3	30,0	0,1	900,0	9,0	0,0	27000,0	81
1,0	10,8	0,1	116,6	0,0	1,08	1259,7	0,0	1,1664
1,0	10,2	10,0	104,0	100,0	102	1061,2	1000,0	10404
1,0	10,5	20,4	110,3	416,2	214,2	1157,6	8489,7	45881,64
1,0	10,3	30,7	106,1	942,5	316,21	1092,7	28934,4	99988,7641
1,0	20,1	0,1	404,0	0,0	2,01	8120,6	0,0	4,0401
1,0	20,4	10,5	416,2	110,3	214,2	8489,7	1157,6	45881,64
1,0	20,5	20,6	420,3	424,4	422,3	8615,1	8741,8	178337,29
1,0	20,0	30,6	400,0	936,4	612	8000,0	28652,6	374544
1,0	30,7	0,2	942,5	0,0	6,14	28934,4	0,0	37,6996
1,0	30,2	10,2	912,0	104,0	308,04	27543,6	1061,2	94888,6416
1,0	30,3	20,4	918,1	416,2	618,12	27818,1	8489,7	382072,3344
1,0	30,3	30,0	918,1	900,0	909	27818,1	27000,0	826281
1,0	40,6	0,2	1648,4	0,0	8,12	66923,4	0,0	65,9344
1,0	40,8	10,0	1664,6	100,0	408	67917,3	1000,0	166464
1,0	40,4	20,2	1632,2	408,0	816,08	65939,3	8242,4	665986,5664
1,0	40,8	30,5	1664,6	930,3	1244,4	67917,3	28372,6	1548531,36
1,0	50,3	0,1	2530,1	0,0	5,03	127263,5	0,0	25,3009
1,0	50,3	10,0	2530,1	100,0	503	127263,5	1000,0	253009
1,0	50,6	20,4	2560,4	416,2	1032,24	129554,2	8489,7	1065519,418
1,0	50,3	30,0	2530,1	900,0	1509	127263,5	27000,0	2277081
1,0	50,7	0,5	2570,5	0,3	25,35	130323,8	0,1	642,6225
1,0	50,6	10,2	2560,4	104,0	516,12	129554,2	1061,2	266379,8544
1,0	50,2	20,0	2520,0	400,0	1004	126506,0	8000,0	1008016
1,0	50,0	30,4	2500,0	924,2	1520	125000,0	28094,5	2310400

Wektor X
a_0
a_1
a_2
a_3
a_4
a_5
a_6
a_7
a_8

Wektor L
dz
-8,8
-12,6
-29,0
-34,6
-7,2
-30,2
-29,8
-37,9
-8,1
-32,0
-33,1
-54,2
-16,5
-28,9
-55,4
-76,9
-6,3
-17,8
-40,6
-85,0
-1,8
-26,9
-52,5
-102,4
4,3
-34,5
-75,0
-93,9

Obliczenia:

$A^T A =$

28,000000	811,900000	427,500000	32680,610000	10059,330000	12346,310000	1441337,863000	261434,865000	11620808,277300
811,900000	32680,610000	12346,310000	1441337,863000	289887,211000	495852,805000	66572808,953300	7525382,123900	510875012,688310
427,500000	12346,310000	10059,330000	495852,805000	261434,865000	289887,211000	21827820,158300	7189787,693700	301325641,529650
32680,610000	1441337,863000	495852,805000	66572808,953300	11620808,277300	21827820,158300	3157330440,797590	301325641,529650	23527972201,180700
10059,330000	289887,211000	261434,865000	11620808,277300	7189787,693700	7525382,123900	510875012,688310	204538216,943850	8271649825,614690
12346,310000	495852,805000	289887,211000	21827820,158300	7525382,123900	11620808,277300	1006404249,642370	206782847,265070	13236373544,091300
1441337,863000	66572808,953300	21827820,158300	3157330440,797590	510875012,688310	1006404249,642370	152246967311,271000	13236373544,091300	1112669855615,040000
261434,865000	7525382,123900	7189787,693700	301325641,529650	204538216,943850	206782847,265070	13236373544,091300	5944065884,285790	234923288285,929000
11620808,277300	510875012,688310	301325641,529650	23527972201,180700	8271649825,614690	13236373544,091300	1112669855615,040000	234923288285,929000	16702771003896,600000

$(A^T A)^{-1} =$

0,776362	-0,060294	-0,074785	0,001622	0,002641	0,001477	-0,000015	-0,000033	-0,000001
-0,060294	0,011500	0,003184	-0,000475	-0,000073	-0,000106	0,000005	0,000000	0,000000
-0,074785	0,003184	0,027936	-0,000047	-0,001967	-0,000196	0,000000	0,000038	0,000000
0,001622	-0,000475	-0,000047	0,000023	0,000001	0,000002	0,000000	0,000000	0,000000
0,002641	-0,000073	-0,001967	0,000001	0,000167	0,000005	0,000000	-0,000003	0,000000
0,001477	-0,000106	-0,000196	0,000002	0,000005	0,000007	0,000000	0,000000	0,000000
-0,000015	0,000005	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
-0,000033	0,000000	0,000038	0,000000	-0,000003	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
-0,000001	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

$A^T L =$

-1027,600000
-34427,050000
-22959,510000
-1441787,559000
-593821,655000
-793662,933000
-64828195,780900
-16307663,896500
-879885667,484510

Obliczone parametry modelu:

$X = (A^T A)^{-1} A^T L =$

a_0	-7,082
a_1	-0,442
a_2	-1,492
a_3	0,015
a_4	0,051
a_5	-0,024
a_6	0,000
a_7	-0,001
a_8	0,000

Ocena dokładności wyników:

- odchyłki do modelu: ***V=Ax-L [mm]***

$AX =$

-7,746387
-18,494101
-24,861153
-30,964899
-10,333925
-23,496283
-33,140387
-43,642263
-10,575257
-27,477050
-40,784593
-55,695994
-8,835067
-28,547065

$V =$

1,1	δ_1
-5,9	δ_2
4,1	δ_3
3,6	δ_4
-3,1	δ_5
6,7	δ_6
-3,3	δ_7
-5,7	δ_8
-2,5	δ_9
4,5	δ_{10}
-7,7	δ_{11}
-1,5	δ_{12}
7,7	δ_{13}
0,4	δ_{14}

-47,047700
-68,145995
-5,343946
-28,278125
-52,995218
-85,250541
-0,523621
-27,543938
-60,294266
-99,063408
-1,406194
-28,083570
-58,620322
-100,408733

8,4	δ_{15}
8,8	δ_{16}
1,0	δ_{17}
-10,5	δ_{18}
-12,4	δ_{19}
-0,3	δ_{20}
1,3	δ_{21}
-0,6	δ_{22}
-7,8	δ_{23}
3,3	δ_{24}
-5,7	δ_{25}
6,4	δ_{26}
16,4	δ_{27}
-6,5	δ_{28}

- estymator odchylenia standardowego $\widehat{\sigma_0}$

  $$\widehat{\sigma_0}^2 = \frac{V^T V}{n-u} = \frac{4497{,}793700}{28-9} = 62{,}155636\,mm^2$$

  $$\boldsymbol{\widehat{\sigma_0}} = 7{,}88\,mm$$

- odchylenia standardowe parametrów modelu $\boldsymbol{\hat{\delta} a_i}$

  $$\boldsymbol{Cov(X) = \widehat{\sigma_0}^2 * (A^T A)^{-1}}$$

48,255305	*-3,747618*	*-4,648338*	*0,100827*	*0,164152*	*0,091790*	*-0,000923*	*-0,002026*	*-0,000041*
-3,747618	*0,714761*	*0,197891*	*-0,029530*	*-0,004522*	*-0,006607*	*0,000339*	*0,000008*	*0,000004*
-4,648338	*0,197891*	*1,736387*	*-0,002893*	*-0,122235*	*-0,012154*	*0,000007*	*0,002358*	*0,000006*
0,100827	*-0,029530*	*-0,002893*	*0,001424*	*0,000067*	*0,000098*	*-0,000018*	*0,000000*	*0,000000*
0,164152	*-0,004522*	*-0,122235*	*0,000067*	*0,010375*	*0,000293*	*0,000000*	*-0,000217*	*0,000000*
0,091790	*-0,006607*	*-0,012154*	*0,000098*	*0,000293*	*0,000404*	*0,000000*	*-0,000001*	*0,000000*
-0,000923	*0,000339*	*0,000007*	*-0,000018*	*0,000000*	*0,000000*	*0,000000*	*0,000000*	*0,000000*
-0,002026	*0,000008*	*0,002358*	*0,000000*	*-0,000217*	*-0,000001*	*0,000000*	*0,000005*	*0,000000*
-0,000041	*0,000004*	*0,000006*	*0,000000*	*0,000000*	*0,000000*	*0,000000*	*0,000000*	*0,000000*

	$\hat{\delta} a_i$
a_0	*6,947*
a_1	*0,845*
a_2	*1,318*
a_3	*0,038*
a_4	*0,102*
a_5	*0,020*
a_6	*0,000*
a_7	*0,002*
a_8	*0,000*

- współczynnik determinacji R^2

  $$R^2 = 1 - \frac{[vv]}{[L'L']} = 0,95$$

- estymacja przedziałowa dla nieznanej wartości przeciętnej, na poziomie prawdopodobieństwa p = 0,90

  t*(0,95;19) =* ***1,7291***

  Estymację wykonano poprzez przemnożenie obliczonych wcześniej odchyleń parametrów przez odczytaną wartość kwantyla.

	p = 0,68	***p = 0,90***
$\hat{\delta} a_0$	*6,947*	*12,011*
$\hat{\delta} a_1$	*0,845*	*1,462*
$\hat{\delta} a_2$	*1,318*	*2,278*
$\hat{\delta} a_3$	*0,038*	*0,065*
$\hat{\delta} a_4$	*0,102*	*0,176*
$\hat{\delta} a_5$	*0,020*	*0,035*
$\hat{\delta} a_6$	*0,000*	*0,001*
$\hat{\delta} a_7$	*0,002*	*0,004*
$\hat{\delta} a_8$	*0,000*	*0,000*

Obliczenie prognozowanej wartości przemieszczenia (z oceną dokładności) dla punktu o zadanych współrzędnych

Ostateczna postać modelu wygląda następująco:

$$\Delta z = -7{,}082 - 0{,}442x - 1{,}492y + 0{,}015x^2 + 0{,}051y^2 - 0{,}024xy - 0{,}0001x^3 - 0{,}001y^3 - 0{,}00002x^2y^2$$

Dla punktu o zadanych współrzędnych przemieszczenie pionowe wyniosło:

$$\boldsymbol{\Delta z_{(15,15)} = -30{,}9\ mm}$$

Ocena dokładności – na podstawie prawa narastania kowariancji:

$$\boldsymbol{m_{\Delta z}}^{\mathbf{2}} = F^T * cov(X) * F,$$

gdzie F – macierz pochodnych cząstkowych

	F
a_0	*1*
a_1	*15*
a_2	*15*
a_3	*225*
a_4	*225*
a_5	*225*
a_6	*3375*
a_7	*3375*
a_8	*50625*

F^T*cov(X) =

-9,448462	*2,143685*	*1,786246*	*-0,089857*	*-0,063546*	*-0,026025*	*0,000997*	*0,000370*	*0,000016*

$m_{\Delta z}{}^2 = 14{,}554578\ mm^2$

$\boldsymbol{m_{\Delta z} = \pm 3{,}82\ mm}$

Weryfikacja hipotezy statystycznej o istotności parametrów strukturalnych modelu na zadanych poziomach prawdopodobieństwa p

t krytyczne:

t*(0,950;19) =* ***1,7291*** *oraz t(0,975;19) =* ***2,0930***

parametr	t empiryczne	| t empiryczne |	t krytyczne			
			p = 0,90	wynik	p = 0,95	wynik
a_0	-1,0196	1,0196	1,7291	0	2,0930	0
a_1	-0,5230	0,5230		0		0
a_2	-1,1322	1,1322		0		0
a_3	0,4083	0,4083		0		0
a_4	0,4960	0,4960		0		0
a_5	-1,2108	1,2108		0		0
a_6	-0,1640	0,1640		0		0
a_7	-0,4135	0,4135		0		0
a_8	-1,4924	1,4924		0		0

2.4 Prezentacja graficzna

W programie *Surfer Demo wersja 13.0.383* sporządzono wizualizację wszystkich modeli oraz odchyłek do modeli. Wyniki zamieszczono w dalszej części opracowania.

.................Data Podpis

APROKSYMACJA POWIERZCHNI

Zestaw nr:	..	Przedmiot	
.... *Imię i Nazwisko:*		Data:	Rok grupa

W dwóch okresach czasu wyznaczono wysokości reperów reprezentujących pewną powierzchnię. Dane są przemieszczenia pionowe oraz przybliżone współrzędne płaskie reperów. Metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć następujące modele przemieszczeń reperów:

Model 1. $\Delta z = a_o + a_1 x + a_2 y + \delta$

Model 2. $\Delta z = a_o + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2 + a_5 xy + \delta$

Model 3. Jak model 2, ale z pominięciem parametrów statystycznie (P=0.68) nieistotnych

Model 4. Własna propozycja modelu (zapisać postać modelu): $\Delta z = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2 + a_5 xy + a_6 x^3 + a_7 y^3 + a_8 x^2 y^2 + \delta$

Wyznaczyć dla każdego modelu:

1. Estymator odchylenia standardowego $\hat{\sigma}_o$
2. Współczynnik determinacji R^2
3. Parametry a_i modelu
4. Odchylenia standardowe parametrów modelu
5. Przedziały ufności dla wektora parametrów na poziomie ufności $1-\alpha=0.90$
6. Odchyłki losowe do modelu
7. Wartość przemieszczenia i odchylenie standardowe w punkcie o współrzędnych płaskich (15.0, 15,0) (wg. poszczególnych modeli)

Obliczenia należy udokumentować $\left(\mathbf{A}, \mathbf{L}, \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}, \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}, \mathbf{Cov}(\hat{\mathbf{x}}), \delta, \Delta_Z\right)$

Wybrane wyniki wpisać poniżej

Model 1			**Model 2**			**Model 3** (wpisać zastosowane parametry a_i)		
Odchylenie standardowe $\hat{\delta}_o$ = 13,41			Odchylenie standardowe $\hat{\delta}_o$ = 7,77			Odchylenie standardowe $\hat{\delta}_o$ = 10,98		
Współczynnik determinacji R^2 = 0,79			Współczynnik determinacji R^2 = 0,94			Współczynnik determinacji R^2 = 0,86		
Parametry modelu $\hat{a}_i$	Odch. standard. parametrów $\hat{\sigma}_{a_i}$	Przedziały ufności na poziomie $1-\alpha=0.90$ $\hat{\sigma}_{a_i(1-\alpha)}$	Parametry modelu $\hat{a}_i$	Odch. standard. parametrów $\hat{\sigma}_{a_i}$	Przedziały ufności na poziomie $1-\alpha=0.90$ $\hat{\sigma}_{a_i(1-\alpha)}$	Parametry modelu $\hat{a}_i$	Odch. standard. parametrów $\hat{\sigma}_{a_i}$	Przedziały ufności na poziomie $1-\alpha=0.90$ $\hat{\sigma}_{a_i(1-\alpha)}$
9,853	5,924	10,119	-12,989	5,502	9,448	-12,389	2,847	4,856
-0,518	0,140	0,240	0,098	0,347	0,595	-	-	-
-2,065	0,226	0,386	-0,248	0,511	0,877	-	-	-
			0,003	0,006	0,010	-	-	-
			-0,010	0,015	0,025	-	-	-
			-0,052	0,007	0,012	-0,055	0,004	0,008
$\Delta z(15,15)$ = -28,9 mm	$\sigma_{\Delta z(15,15)}$ = 3,21 mm		$\Delta z(15,15)$ = -28,5 mm	$\sigma_{\Delta z(15,15)}$ = 2,85 mm		$\Delta z(15,15)$ = -24,8 mm	$\sigma_{\Delta z(15,15)}$ = 2,28 mm	

Model 4

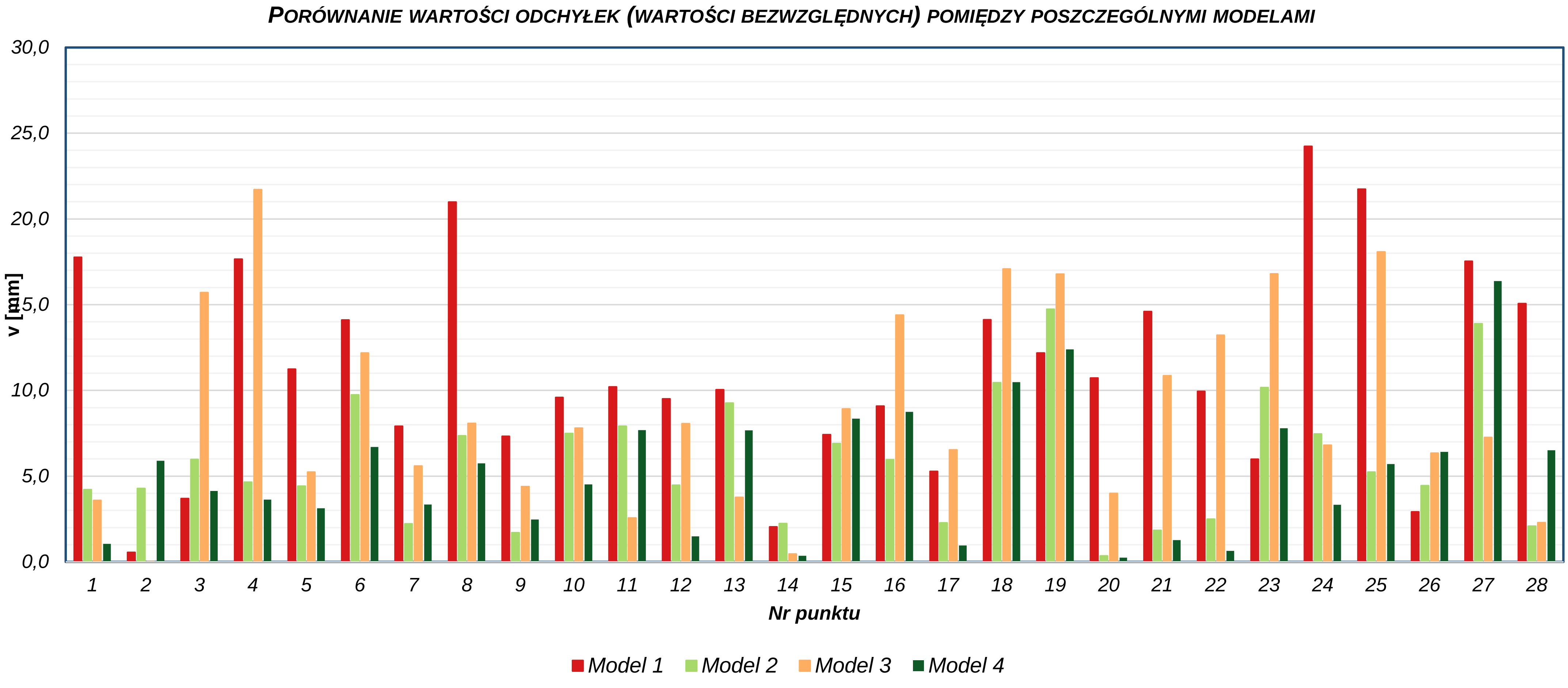
Odchylenie standardowe $\hat{\delta}_o$ = 7,88	Współczynnik determinacji R^2 = 0,95
Parametry modelu: **a_0** = -7,082; **a_1**= -0,442; **a_2**= -1,492; **a_3**= 0,015; **a_4**= 0,051; **a_5**= -0,024; **a_6**= 0,000; **a_7**= -0,001; **a_8**= 0,000	
Odch. stand. parametrów: $\hat{\delta}_{a_0} = 6{,}947$; $\hat{\delta}_{a_1} = 0{,}845$; $\hat{\delta}_{a_2} = 1{,}318$; $\hat{\delta}_{a_3} = 0{,}038$; $\hat{\delta}_{a_4} = 0{,}102$; $\hat{\delta}_{a_5} = 0{,}020$; $\hat{\delta}_{a_6} = 0{,}000$; $\hat{\delta}_{a_7} = 0{,}002$; $\hat{\delta}_{a_8} = 0{,}000$;	
Przedziały ufności $1-\alpha=0.90$: $\hat{\delta}_{a_0} = 12{,}011$; $\hat{\delta}_{a_1} = 1{,}462$; $\hat{\delta}_{a_2} = 2{,}278$; $\hat{\delta}_{a_3} = 0{,}065$; $\hat{\delta}_{a_4} = 0{,}176$; $\hat{\delta}_{a_5} = 0{,}035$; $\hat{\delta}_{a_6} = 0{,}001$; $\hat{\delta}_{a_7} = 0{,}004$; $\hat{\delta}_{a_8} = 0{,}000$;	

	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7	δ_8	δ_9	δ_{10}	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}
Odchyłki do modelu 1	17,8	0,6	-3,7	-17,7	11,3	14,1	-7,9	-21,0	7,3	9,6	-10,2	-9,5	10,0	2,0
Odchyłki do modelu 2	-4,2	-4,3	6,0	4,7	-4,4	9,7	-2,2	-7,4	-1,7	7,5	-7,9	-4,5	9,3	2,2
Odchyłki do modelu 3	-3,6	0,0	15,7	21,7	-5,2	12,2	5,6	8,1	-4,4	7,8	-2,6	8,1	3,8	-0,5
Odchyłki do modelu 4	1,1	-5,9	4,1	3,6	-3,1	6,7	-3,3	-5,7	-2,5	4,5	-7,7	-1,5	7,7	0,4

cd.

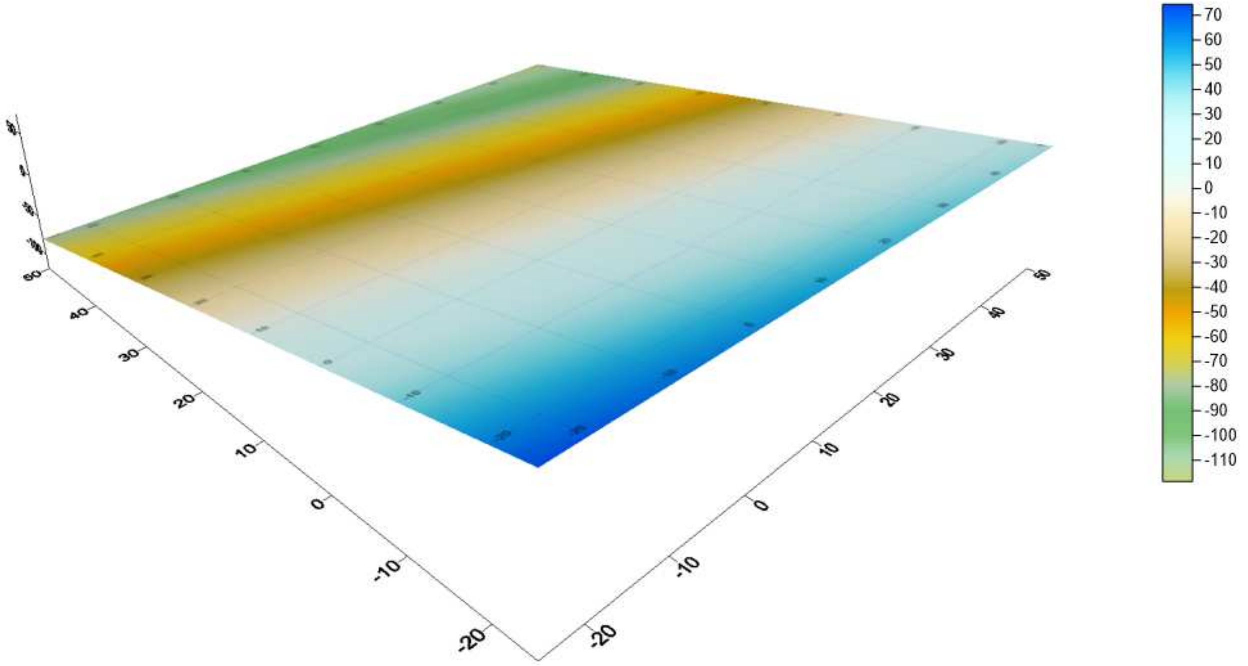
	δ_{15}	δ_{16}	δ_{17}	δ_{18}	δ_{19}	δ_{20}	δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}	δ_{24}	δ_{25}	δ_{26}	δ_{27}	δ_{28}	$\sum\delta$	$\sum\delta\delta$
Odchyłki do modelu 1	7,4	9,1	-5,3	-14,1	-12,2	10,7	-14,6	-10,0	-6,0	24,2	-21,7	-2,9	17,5	15,1	0,0	4497,8
Odchyłki do modelu 2	6,9	6,0	2,3	-10,5	-14,7	-0,4	1,8	-2,5	-10,2	7,5	-5,2	4,4	13,9	-2,1	0,0	1328,4
Odchyłki do modelu 3	8,9	14,4	-6,5	-17,1	-16,8	4,0	-10,9	-13,2	-16,8	6,8	-18,1	-6,3	7,3	-2,3	0,0	3136,5
Odchyłki do modelu 4	8,4	8,8	1,0	-10,5	-12,4	-0,3	1,3	-0,6	-7,8	3,3	-5,7	6,4	16,4	-6,5	0,0	1181,0

WNIOSKI

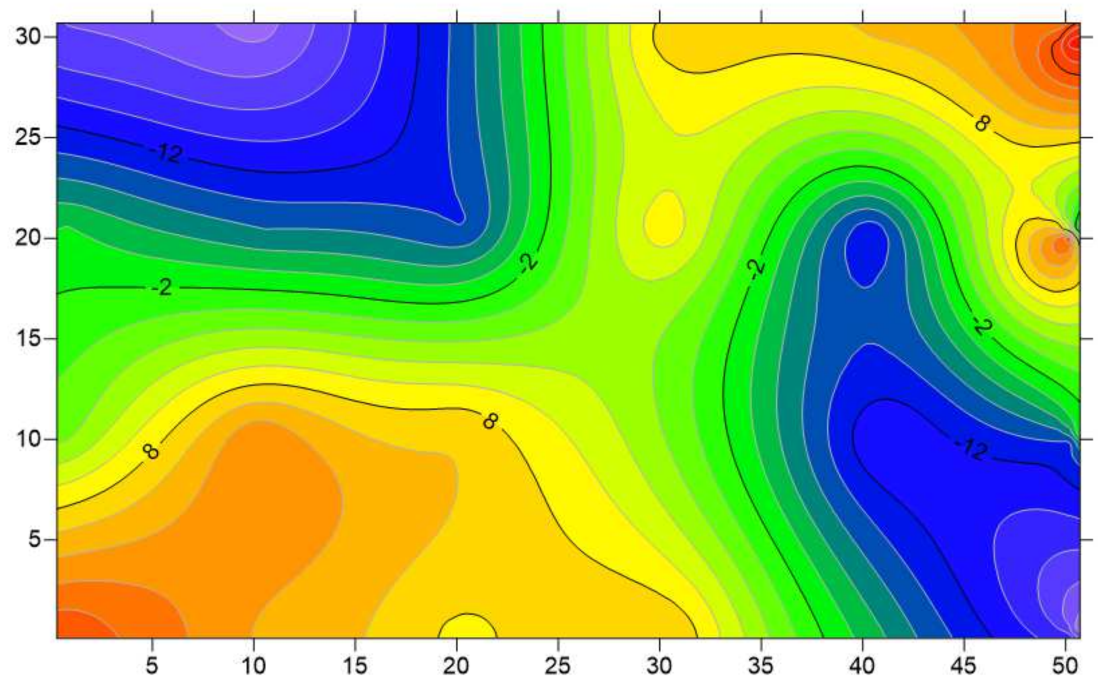


1. Najwierniej przebieg zjawiska opisywany jest przez modele nr 2 oraz 4. Wskazuje na to wartość współczynnika determinacji R^2, który precyzuje, na ile nasze założone parametry wyjaśniają to, co chcemy wyznaczyć. W wymienionych przypadkach wartość ta oscyluje w granicach 94 – 95%. Ponadto w modelach tych uzyskano najmniejsze (co do wartości bezwzględnej) wartości odchyłek. Dodatkowo wyniki wyróżniają się większą precyzją, są bardziej skupione – odchylenie standardowe nie przekracza 8 mm (w innych modelach są to wartości powyżej 10 mm). Z drugiej strony należy zaznaczyć, że modele te nie są najlepszymi, jeżeli chodzi o wiarygodność prognozy. Powierzchnie opisywane przez wielomiany wyższych stopni dobrze wpasowują się w punkty, ale mogą dać zafałszowane (w sposób skrajny) wyniki prognozy. W tym przypadku najlepszą wartość przewidywaną wyznacza model 3, gdzie błąd przemieszczenia punktu szacowany jest na ±2,28 mm.
2. Podczas oceny istotności uzyskanych parametrów strukturalnych poszczególnych modeli duże znaczenie miał przyjęty poziom prawdopodobieństwa. Zauważono, że przy zwiększaniu tego poziomu, zmniejsza się liczba parametrów statystycznie istotnych (zaostrzone zostaje kryterium). Przykładowo, dla modelu 1, przy $p = 0,68$, oceniono, że wszystkie parametry są statystycznie istotne, podczas gdy w weryfikacji na poziomie $p = 0,90$ i $p = 0,95$ uznano, że jeden z nich (a_0) należałoby odrzucić, gdyż zmienna objaśniająca, przy której stoi ten parametr, nie wywiera statystycznie istotnego wpływu na zmienną objaśnianą.

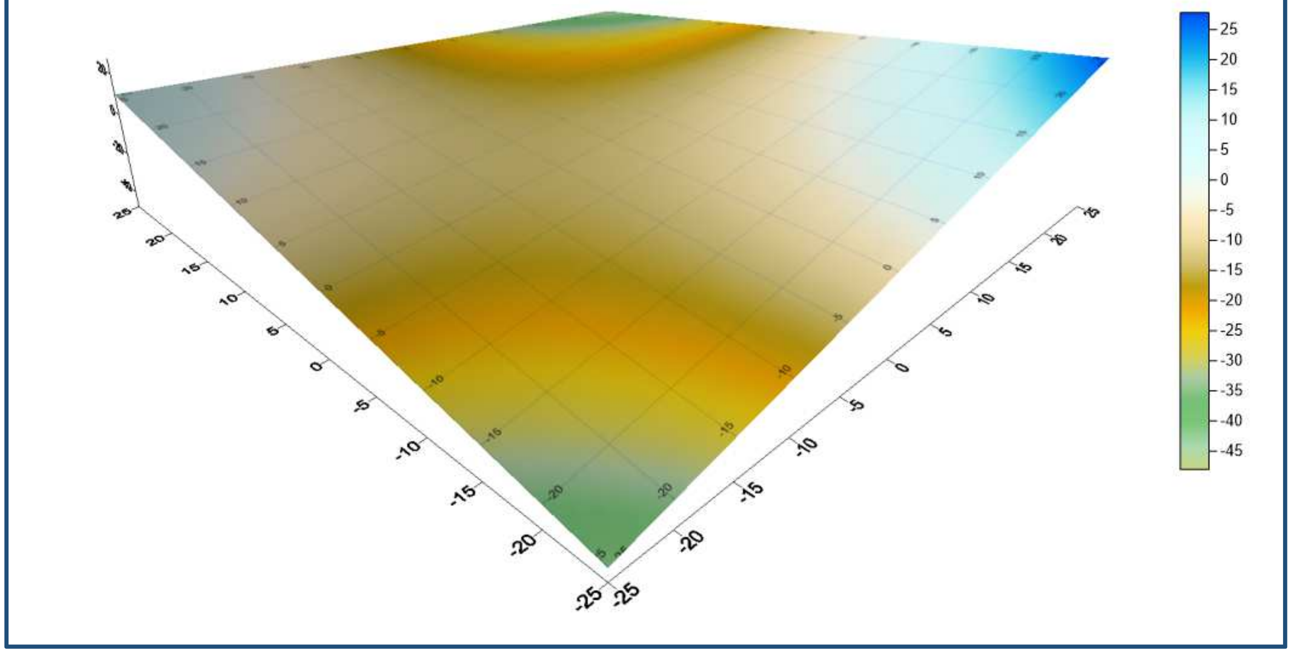
MODEL 1 - WIZUALIZACJA



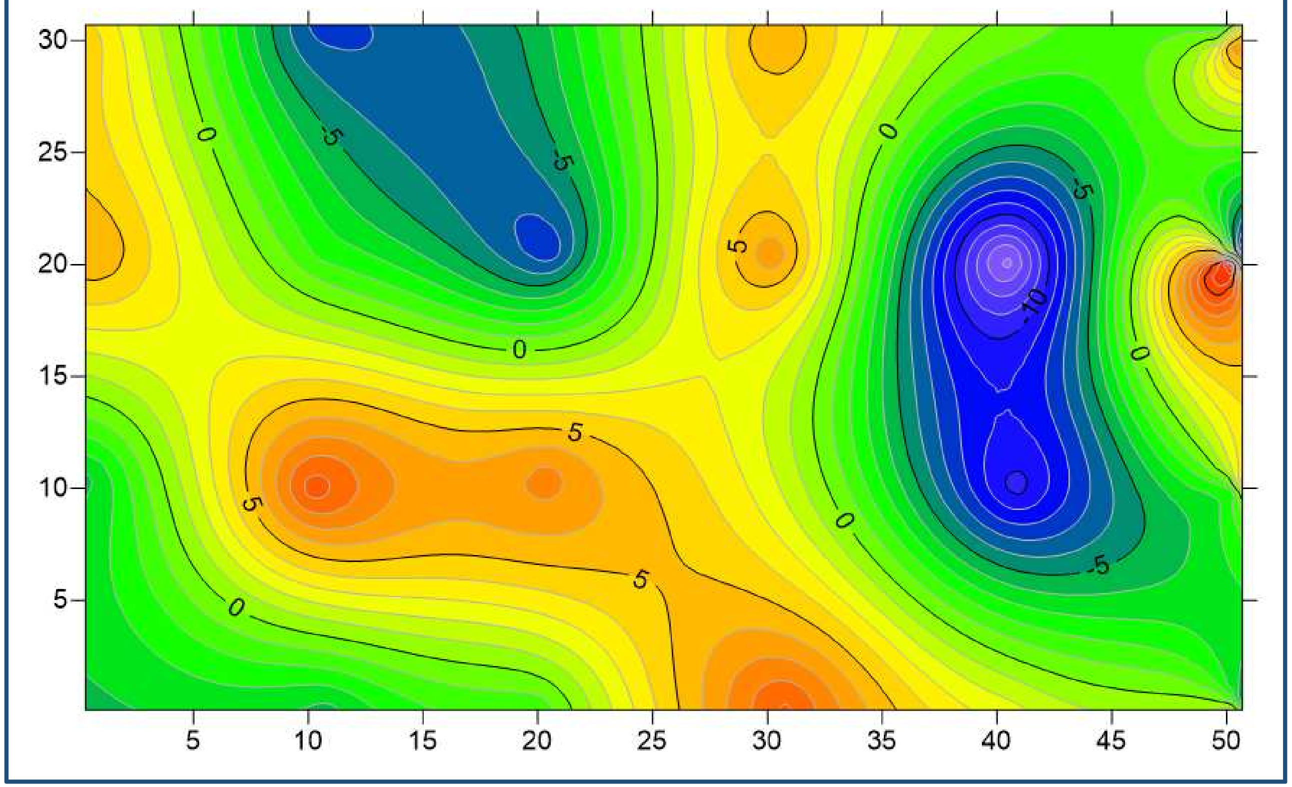
MODEL 1 – MAPA ODCHYŁEK



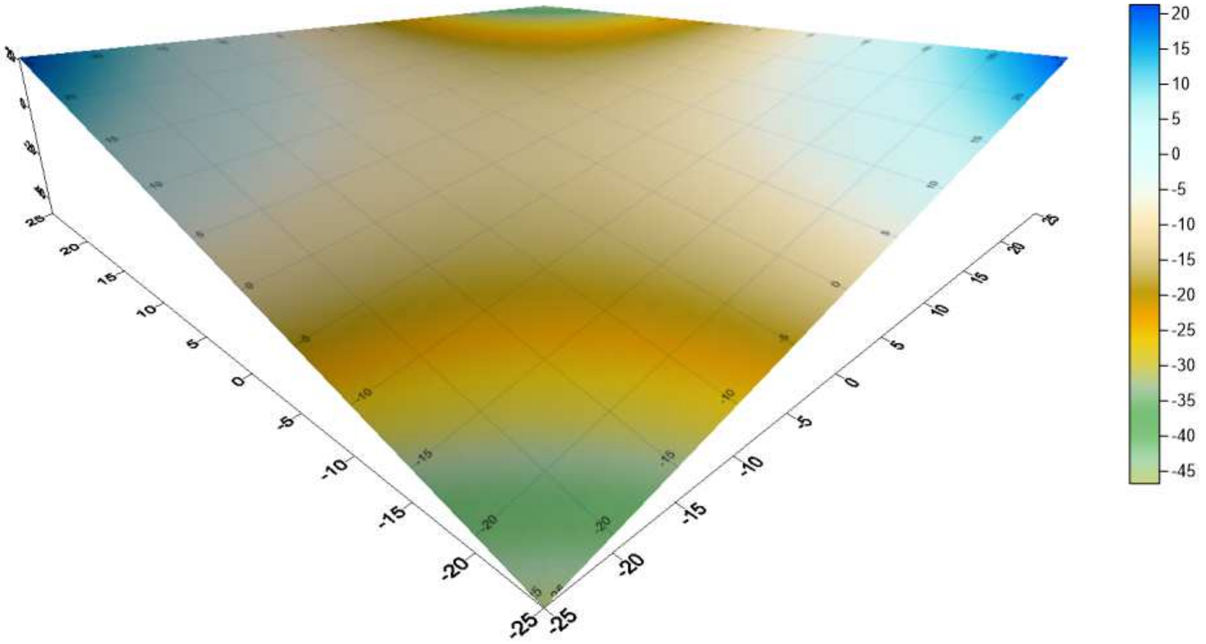
MODEL 2 - WIZUALIZACJA



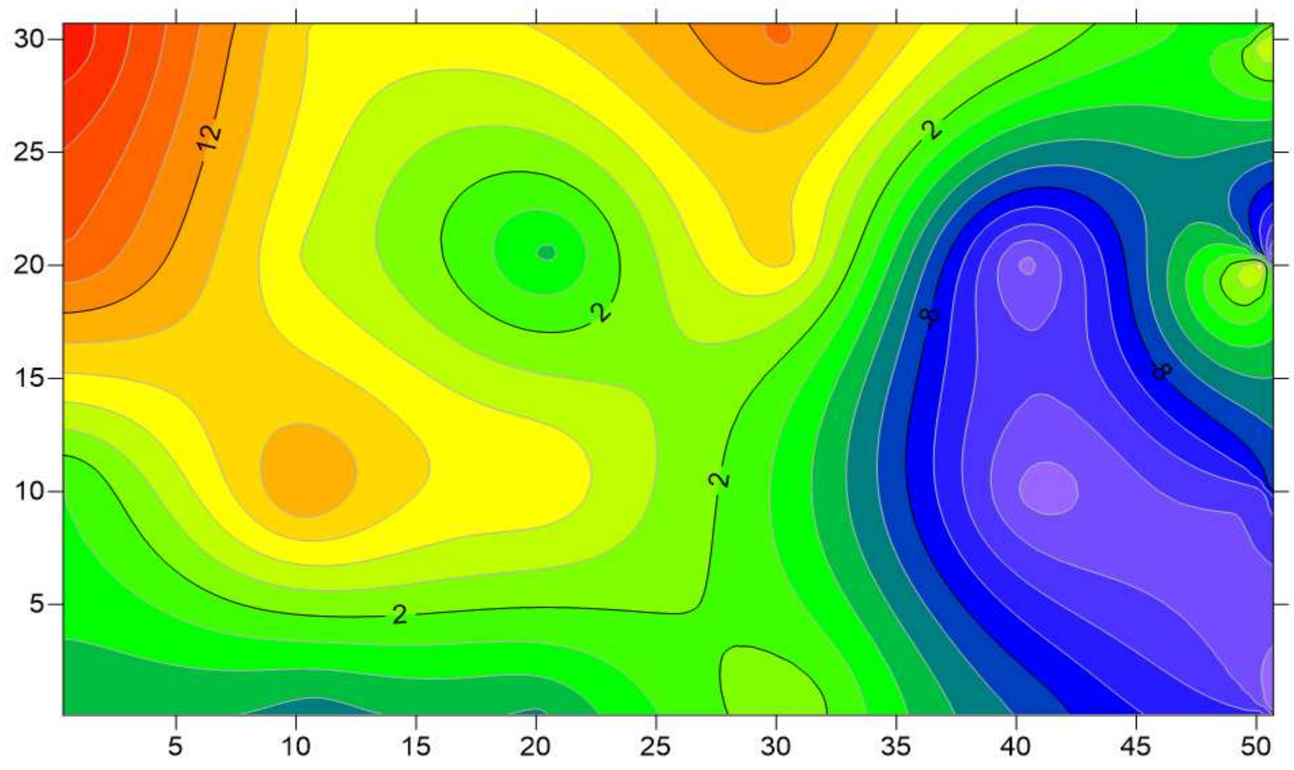
MODEL 2 – MAPA ODCHYŁEK



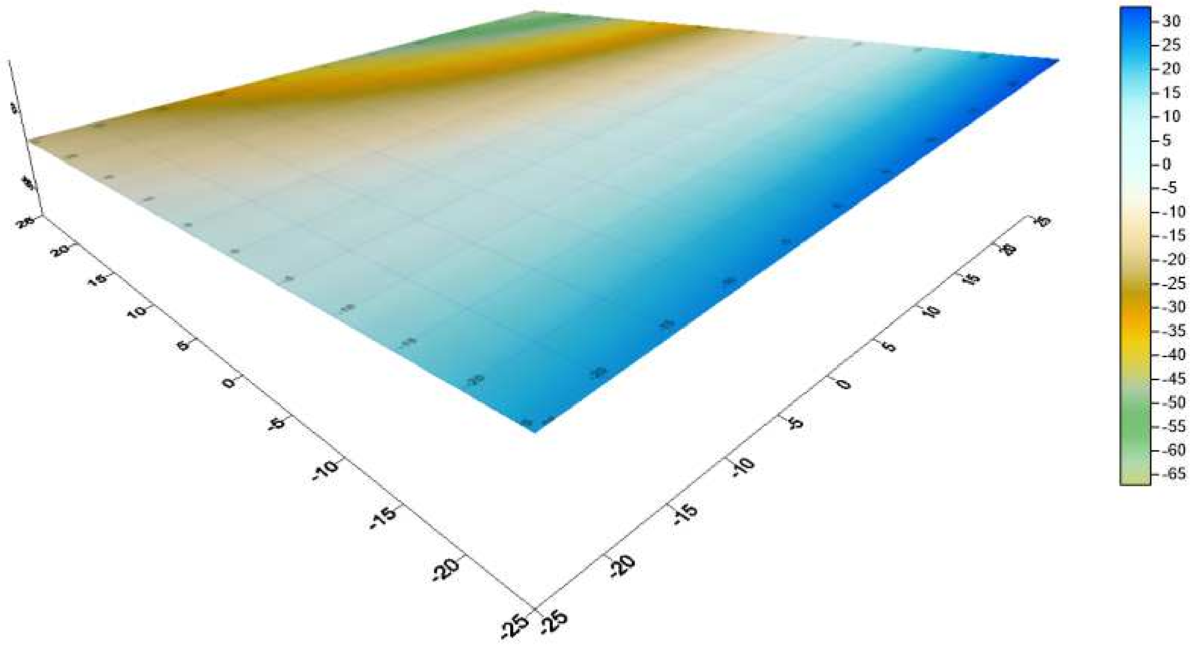
MODEL 3 – WIZUALIZACJA



MODEL 3 – MAPA ODCHYŁEK



MODEL 4 – WIZUALIZACJA



MODEL 4 – MAPA ODCHYŁEK