Elipsy stałej gęstości prawdopodobieństwa

Ugruntowanie wiedzy

ZMOOG

Edward Preweda

Plan wykładu

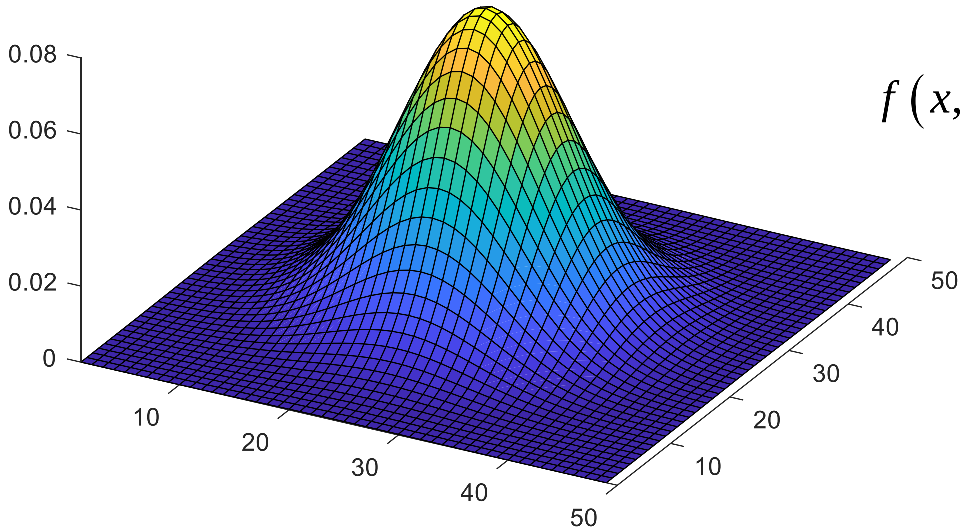
- O co chodzi z tymi elipsami ?
- W jaki sposób wyznaczyć parametry elipsy ?
- Co to jest hiperelipsoida ?
- Czy można porównać pole powierzchni z objętością ?
- Wprowadzenie do przestrzeni wielowymiarowych

Macierz wariancyjno - kowariancyjna

$$\mathbf{Cov}(X,Y) = \sigma^2\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mu_{20} & \mu_{11} \\ \mu_{11} & \mu_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(X) & cov(X,Y) \\ cov(X,Y) & V(Y) \end{bmatrix}$$

momenty centralne drugiego rzędu

Dwuwymiarowy rozkład normalny



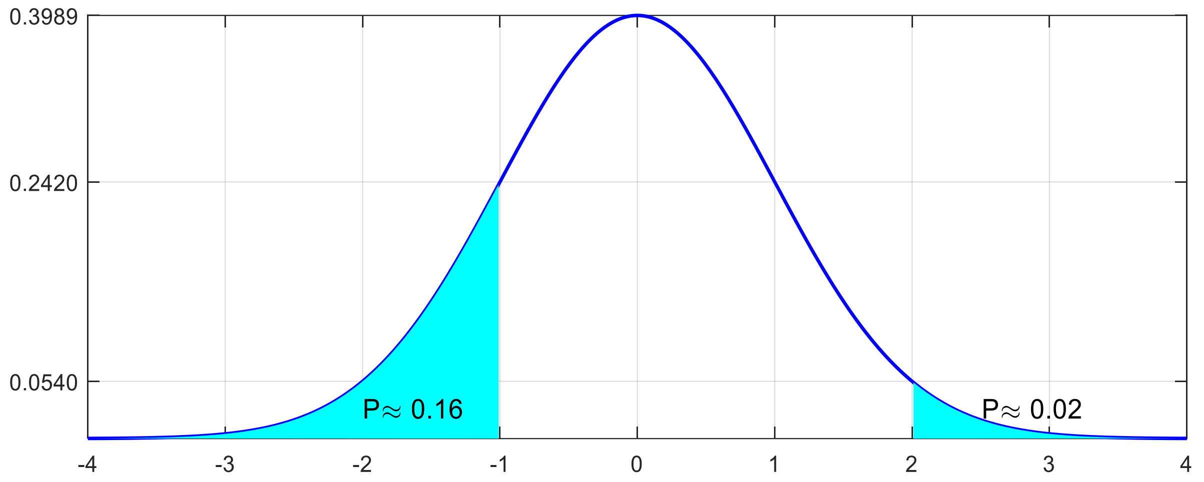
$$f\left(x,y\right)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\,\sigma_y\,\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-r^2\right)}\left[\frac{\left(x-\mu_x\right)^2}{\sigma_x^2}-2r\frac{\left(x-\mu_x\right)\left(y-\mu_y\right)}{\sigma_x\,\sigma_y}+\frac{\left(y-\mu_y\right)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}\qquad \text{dla}\quad \left(x,y\right)\in R$$

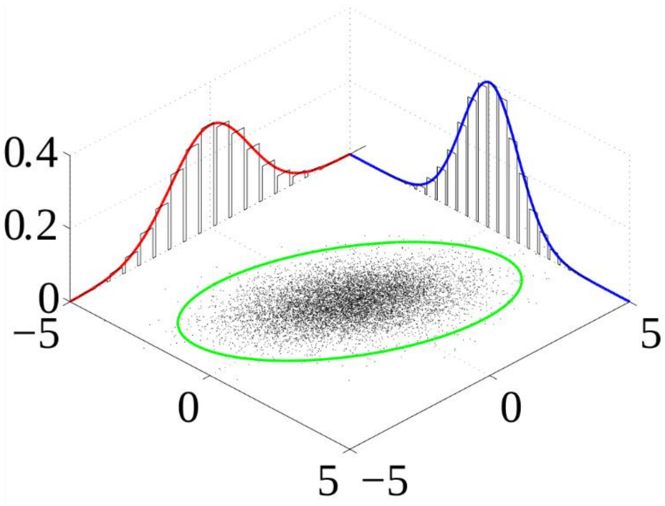
Jeżeli zmienna losowa *(X, Y)* ma dwuwymiarowy rozkład normalny i zmienne *X* i *Y* są nieskorelowane (*r* = 0), wówczas funkcja gęstości ma postać:

$$f\left(x,y\right)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}exp\left[-\frac{\left(x-\mu_x\right)^2}{2\sigma_x^2}-\frac{\left(y-\mu_y\right)^2}{2\sigma_y^2}\right]$$

Dwuwymiarowy rozkład normalny

Rozkłady brzegowe i rozkłady warunkowe w dwuwymiarowym rozkładzie normalnym są jednowymiarowymi rozkładami normalnymi.





Dwuwymiarowy rozkład normalny

Zbiór punktów w przestrzeni R^2 o współrzędnych (x, y) spełniających równania:

$$\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} = r\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \quad \text{lub} \quad \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} = r\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}$$

nazywamy linią regresji I rodzaju zmiennej losowej X względem Y lub

zmiennej losowej Y względem X.

Równanie elipsy

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x \sigma_y \sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2r\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x \sigma_y \sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)} k^2\right\}$$

$$\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - 2r\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} = k^2$$

Elipsa spełnia warunek stałej gęstości z prawdopodobieństwem $p \cong 0.39$, nazywana jest elipsą stałej gęstości prawdopodobieństwa.

Równanie elipsy

Jeżeli przyjmiemy *k* = 1, wtedy parametry elipsy można wyznaczyć według wzorów:

$$\begin{Bmatrix} A^{2} \\ B^{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma^{2}_{\max} \\ \sigma^{2}_{\min} \end{Bmatrix} = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{2}\right)^2 + \left(r\sigma_x\sigma_y\right)^2}$$

$$2\beta = \operatorname{arctg}\frac{2r\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$$

Równanie elipsy

Jeżeli przyjmiemy *k* = 1, wtedy parametry elipsy można wyznaczyć według wzorów:

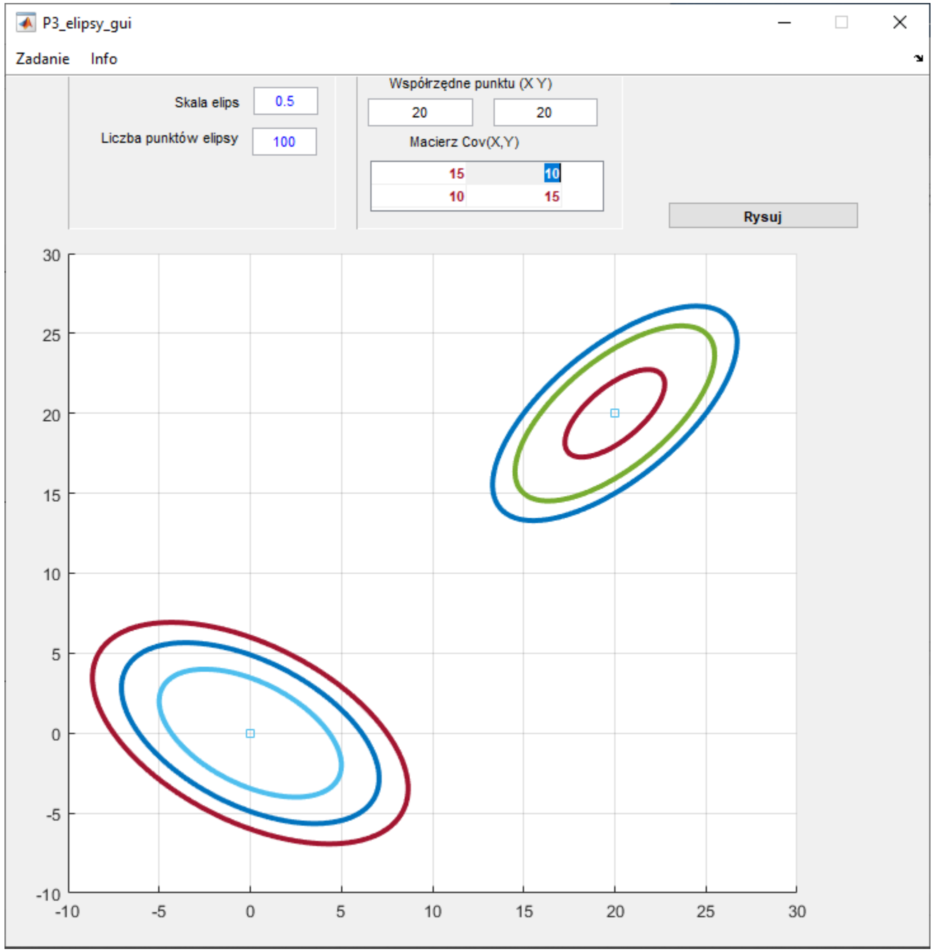
$$\begin{Bmatrix} A^2 \\ B^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma^2_{\max} \\ \sigma^2_{\min} \end{Bmatrix} = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{2}\right)^2 + \left(r\sigma_x\sigma_y\right)^2}$$

$$2\beta = \operatorname{arctg}\frac{2r\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$$

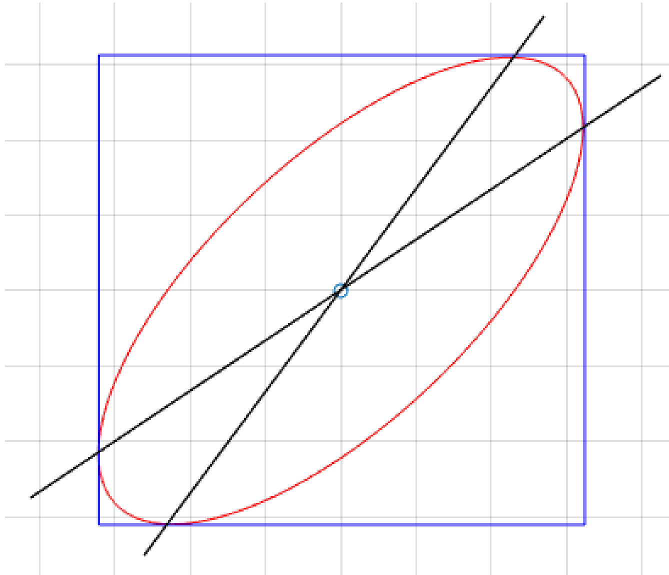
$$\begin{Bmatrix} A^2 \\ B^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_{\max} \\ V_{\min} \end{Bmatrix} = \frac{V(X) + V(Y)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{V(X) - V(Y)}{2}\right)^2 + cov(X,Y)^2}$$

$$2\beta = \operatorname{arctg}\frac{2\,cov(X,Y)}{V(X) - V(Y)}$$

Równanie elipsy



Jeżeli wykreślimy prostokąt styczny do ustalonej elipsy o bokach równoległych do osi współrzędnych, to proste zawierające punkty styczności na przeciwległych bokach stanowią linie regresji I rodzaju.



Macierz równych wariancji (maksymalnych kowariancji)

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\begin{bmatrix} V(X) & \mathrm{cov}(X,Y) \\ \mathrm{cov}(X,Y) & V(Y) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0,49 & 0,20 \\ 0,20 & 0,60 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{MaxCov}(XY)=\left[\begin{array}{c:c} \dfrac{VX+VY}{2} & \sqrt{\left(\dfrac{VX-VY}{2}\right)^2+cov(XY)^2} \\ \hdashline \sqrt{\left(\dfrac{VX-VY}{2}\right)^2+cov(XY)^2} & \dfrac{VX+VY}{2} \end{array}\right]=$$

$$=\begin{bmatrix} 0{,}545 & 0{,}207 \\ 0{,}207 & 0{,}545 \end{bmatrix}$$

Macierz ekstremalnych wariancji (zerowych kowariancji)

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\begin{bmatrix} V(X) & \mathrm{cov}(X,Y) \\ \mathrm{cov}(X,Y) & V(Y) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0,49 & 0,20 \\ 0,20 & 0,60 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{MinCov}(XY)=\left[\begin{array}{c:c} \frac{VX+VY}{2}+\sqrt{\left(\frac{VX-VY}{2}\right)^2+cov(XY)^2} & 0 \\ \hdashline 0 & \frac{VX+VY}{2}-\sqrt{\left(\frac{VX-VY}{2}\right)^2+cov(XY)^2} \end{array}\right]=$$

$$=\begin{bmatrix} 0{,}752 & 0 \\ 0 & 0{,}338 \end{bmatrix}$$

Parametry elipsy stałej gęstości prawdopodobieństwa

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\begin{bmatrix} V(X) & \mathrm{cov}(X,Y) \\ \mathrm{cov}(X,Y) & V(Y) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0,49 & 0,20 \\ 0,20 & 0,60 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{MinCov}(XY)=\begin{bmatrix} V_{\max} & 0 \\ 0 & V_{\min} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0,752 & 0 \\ 0 & 0,338 \end{bmatrix}$$

$V_{\max}, V_{\min}$ - wartości własne macierzy kowariancji

$a=\sqrt{V_{\max}}$	$b=\sqrt{V_{\min}}$	$Az_a=\frac{1}{2}\,arctan\,\frac{2\mathrm{cov}(X,Y)}{V(X)-V(Y)}$
0,87	0,58	58,54 [g]

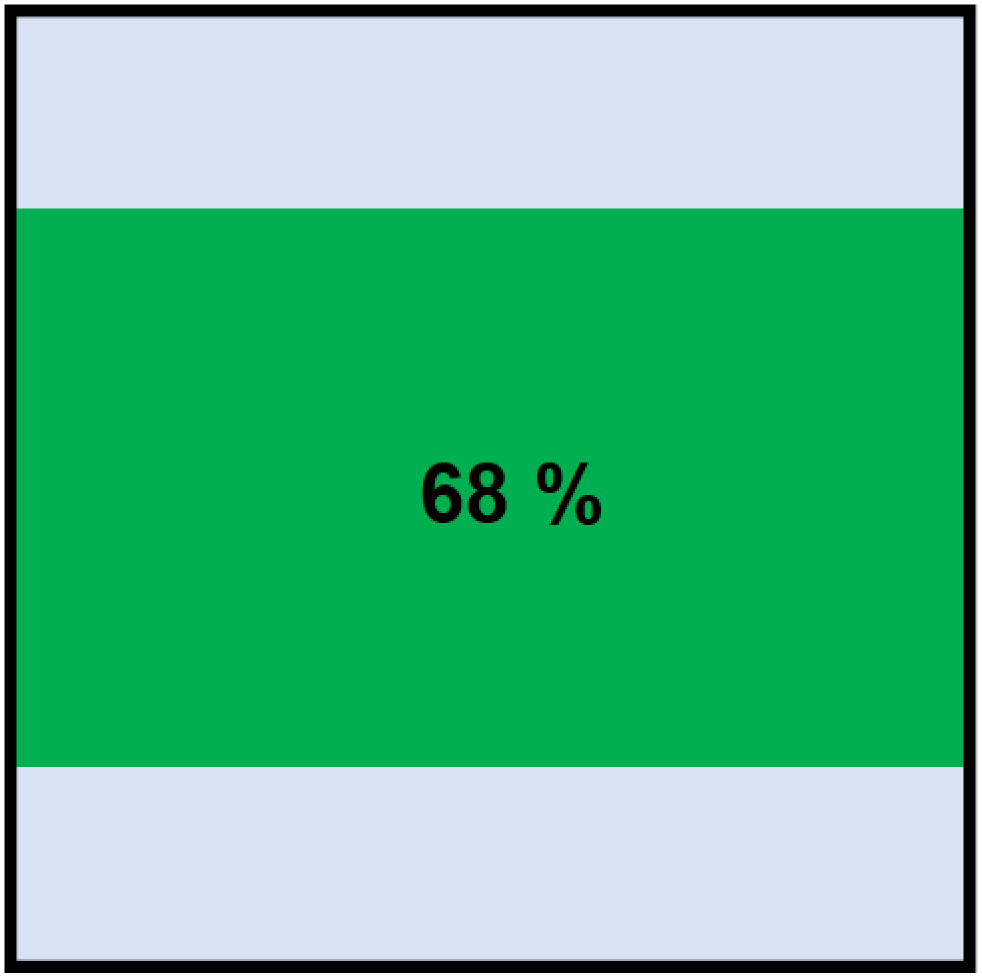
Wielowymiarowe zmienne losowe

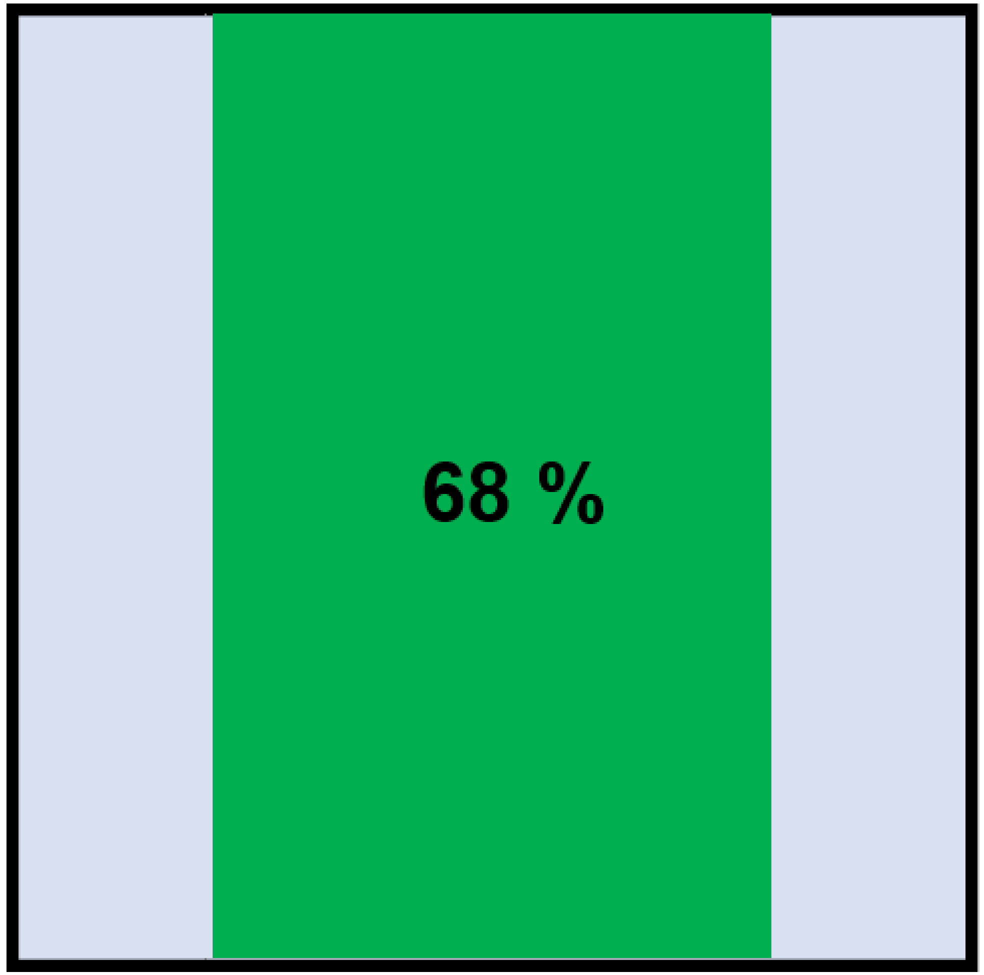
Uogólnieniem wariancji na przypadek n-wymiarowy jest macierz wariancyjno – kowariancyjna (macierz kowariancji, macierz momentów centralnych rzędu drugiego) :

$$\mathbf{Cov}(X_1, X_2, ..., X_n) = \sigma^2 \mathbf{C} = \begin{bmatrix} V(X_1) & cov(X_1, X_2) & \cdots & cov(X_1, X_n) \\ cov(X_2, X_1) & V(X_2) & \cdots & cov(X_2, X_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ cov(X_n, X_1) & cov(X_n, X_2) & \cdots & V(X_n) \end{bmatrix} \qquad (2.101)$$

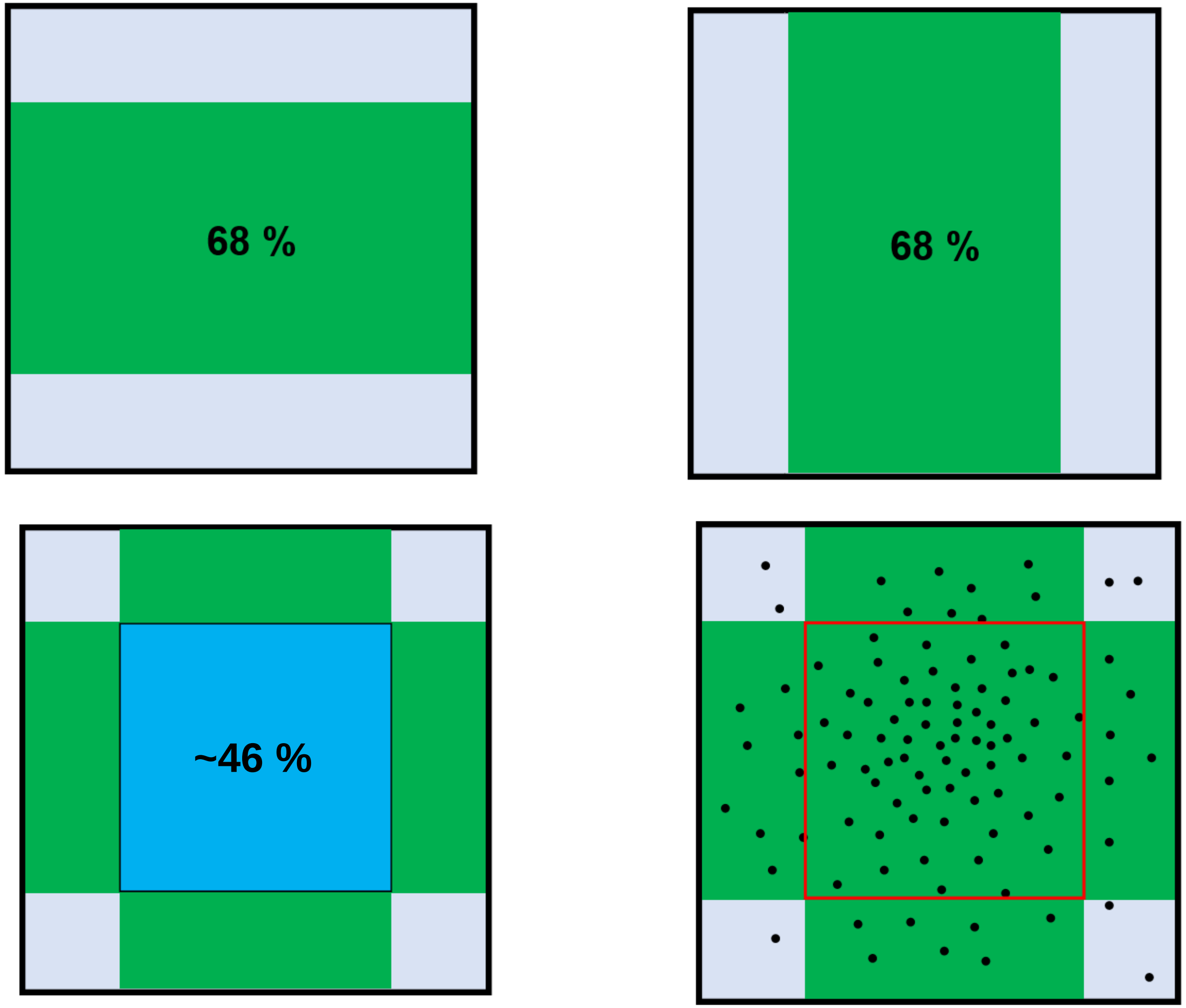
Macierz współczynników kowariancji **C** jest symetryczna o wyznaczniku $\det(\mathrm{C}) \geq 0$.

Elipsy - uzupełnienie

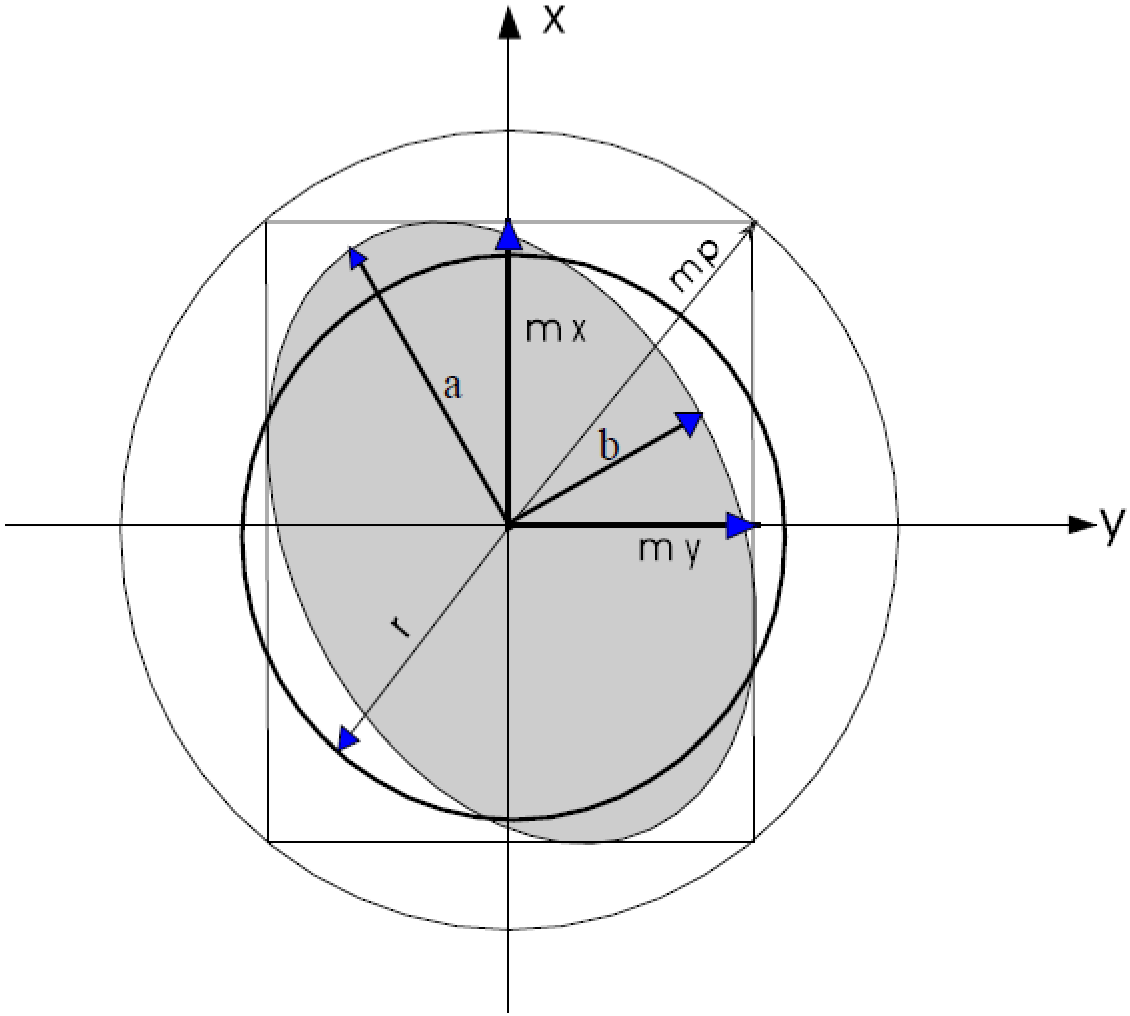




Elipsy - uzupełnienie



Elipsy - uzupełnienie



- Wartości błędów średnich współrzędnych poszczególnych punktów wyznaczone są na poziomie około 0.68.
- Prawdopodobieństwo, że prostokąt o bokach $2m_x \times 2m_y$ obejmuje dany punkt jest znacznie mniejsze (około 0.46).
- Prawdopodobieństwo, że koło o promieniu $m_p = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$ obejmuje dany punkt wynosi około 0.72, ale pamiętać przy tym trzeba, że błąd położenia punktu (m_p) nie uwzględnia kowariancji pomiędzy współrzędnymi *X* i *Y*.
- Elipsa błędów i koło błędów o promieniu *r* wyznaczone są z prawdopodobieństwem P=~0.39.

Elipsy - uzupełnienie

W ogólności, parametry elipsy (elipsoidy, hiperelipsoidy) można wyznaczyć (na zadanym poziomie prawdopodobieństwa) na podstawie wartości własnych macierzy wariancyjno-kowariancyjnej:

$$a_{i\,(1-\alpha)} = \sqrt{\lambda_i \times \left(\chi^2_{n,\,1-\alpha}\right)}$$

i odpowiadających wartościom własnym wersorach kierunkowych $\tau(\lambda)_i$.

Wartości własne λ_i i przyporządkowane im wektory własne s_i wynikają z rozkładu spektralnego podmacierzy macierzy kowariancji $\mathbf{Cov}(\hat{\mathbf{x}})$ dla współrzędnych wybranego punktu P_i , natomiast $\left(\chi^2_{n,\,1-\alpha}\right)$ jest kwantylem rzędu $(1-\alpha)$ rozkładu chi-kwadrat o *n* stopniach swobody (n= stopniowi macierzy kowariancji - w przypadku punktu sieci płaskiej n=2).

Elipsy - uzupełnienie

Elipsy ufności, określające dokładność wzajemnego położenia wybranych par punktów P-K sieci, można wyznaczyć w oparciu o podmacierz, którą wyznaczamy według zasady:

$$C = C_P + C_K - C_{PK} - C_{KP}$$

Poszczególne podmacierze wybieramy z macierzy wariancyjno-kowariancyjnej $\mathbf{Cov}(\hat{\mathbf{x}})$

$$\mathbf{Cov}(\hat{\mathbf{x}}) = \left[\begin{array}{c:c:c:c} \mathbf{C}_P & \dots & \mathbf{C}_{PK} & \dots \\ \hdashline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hdashline \mathbf{C}_{KP} & \dots & \mathbf{C}_K & \dots \\ \hdashline \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right]$$

Elipsy - uzupełnienie

Parametrem oceny dokładności dla wyznaczanych punktów może być promień r koła błędów, który dla pojedynczego punktu sieci jest liczony z zależności

$$r = \left(\det\left[\mathbf{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\right]\right)^{\frac{1}{4}}$$

gdzie $\mathbf{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ jest macierzą wariancyjno-kowariancyjną o wymiarach 2×2 dla współrzędnych i-tego punktu sieci.

Dla porównania globalnie dokładności, na przykład sieci różnych typów, wygodnie jest posłużyć się wartością promienia hiperkuli błędów, liczonego według wzoru:

$$r = \left(\det\left[\mathbf{Cov}(\mathbf{X},\mathbf{Y})\right]\right)^{\frac{1}{4n}}$$

przy czym *n* określa liczbę wyznaczanych punktów, dla których jest określona macierz wariancyjno-kowariancyjna. Pamiętać należy przy tym, o konieczności sprowadzenia promieni do jednej przestrzeni probabilistycznej (porównywać możemy wtedy, jeśli będą wyznaczone z takim samym prawdopodobieństwem).

Elipsy - uzupełnienie

Promień koła (hiperkuli też) ma charakter niezmienniczy, (czyli nie zależy od zmiany układu współrzędnych), a w interpretacji geometrycznej jest to promień koła o powierzchni równej polu elipsy błędów. Promień hiperkuli opisuje moc konstrukcji całej sieci za pomocą jednej wartości. Poziom prawdopodobieństwa uzależniony jest od liczby wyznaczanych punktów, a ściślej od stopnia przestrzeni probabilistycznej (stopnia macierzy wariancyjno-kowariancyjnej).

Można wykazać, że prawdopodobieństwo to wraz ze wzrostem liczby niewiadomych maleje do zera.

Zależność poziomu prawdopodobieństwa od liczby stopni swobody:

Liczba stopni swobody	2	4	6	8	10
Poziom ufności	0.39	0.09	0.014	0.00018	<<0.001

Aby wykorzystać globalne charakterystyki sieci w celu porównywania różnych konstrukcji (na przykład sieci liczących różną liczbę punktów), należy sprowadzić te parametry do jednej przestrzeni probabilistycznej, wykorzystując do tego celu estymację przedziałową (czyli wyznaczyć parametry globalne na jednakowym poziomie ufności).

Dyskusja

Dziękuję za uwagę