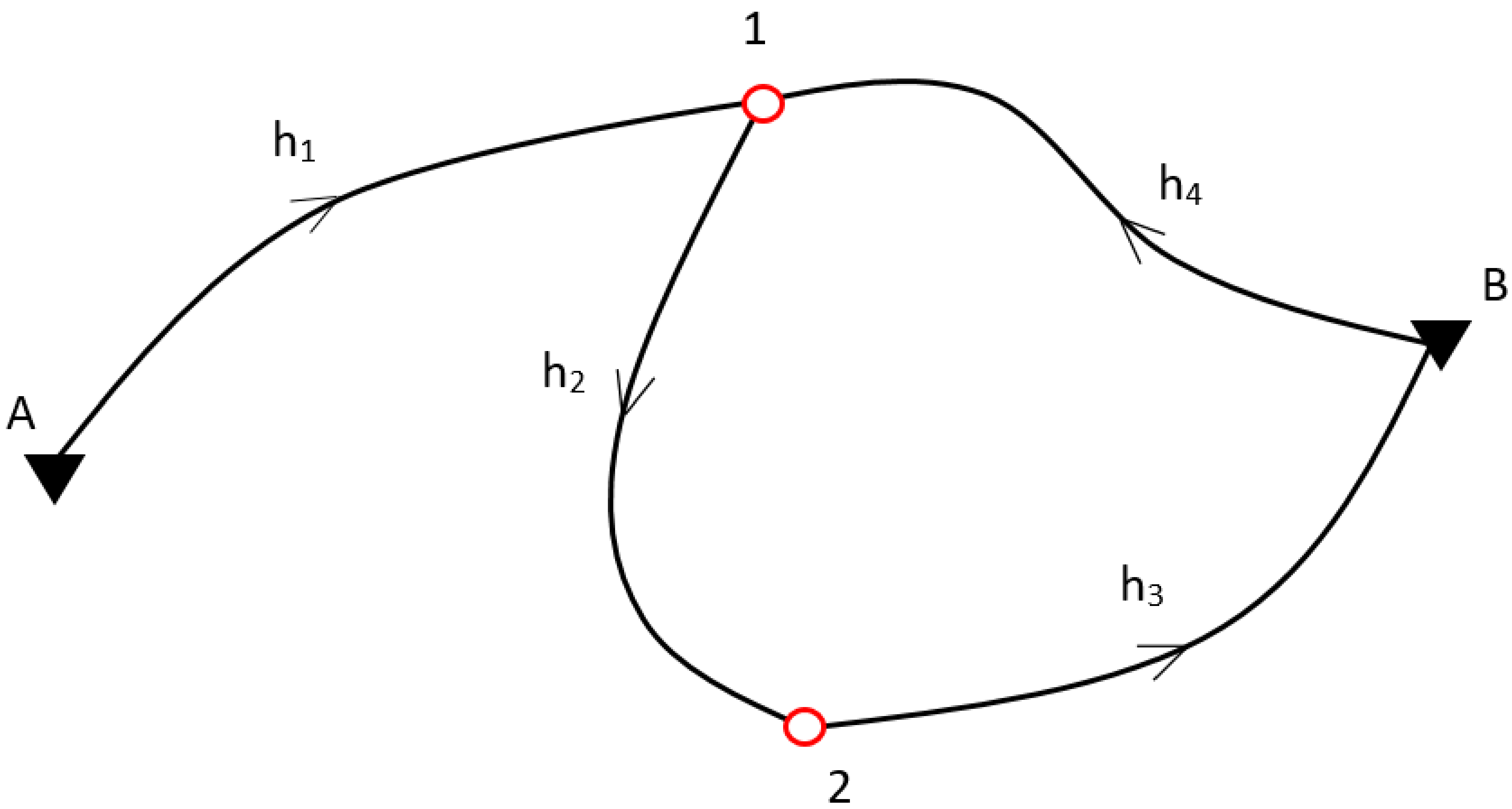
Zastosowanie algebry macierzy w geodezji

Sieć wysokościowa

ZMOOG

Edward Preweda

Sieć niwelacyjna (wysokościowa)

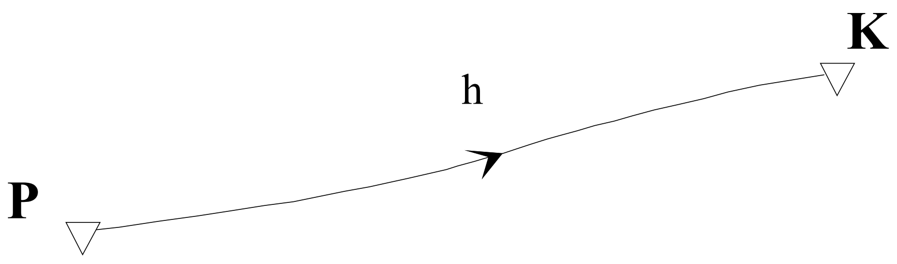


Czym różni się forma pierwotna od różniczkowej?

Równanie obserwacyjne –

wyrażenie obserwacji jako funkcji niewiadomych, przy czym dotyczy obserwacji i niewiadomych wyrównanych (uzgodnionych).

Dla przewyższenia (różnicy wysokości pomiędzy dwoma reperami) równanie obserwacyjne w formie pierwotnej ma postać:



$$\hat{Z}_K - \hat{Z}_P = \hat{h}$$

„Daszek” nad zmienną oznacza estymator

Jak obliczyć $\hat{\mathrm{h}}$?

$$\hat{Z}_K - \hat{Z}_P = h^{pomierzone} + v_h$$

$$1 \times \left(\hat{Z}_K\right) - 1 \times \left(\hat{Z}_P\right) = h^{pomierzone} + v_h$$

Współczynniki przy niewiadomych tworzą macierz A układu równań, a wartości które potrafimy obliczyć – wyrazy wolne L układu równań, który w postaci macierzowej zapisać można jako

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{L} \quad \Leftarrow \quad \mathbf{P}$$

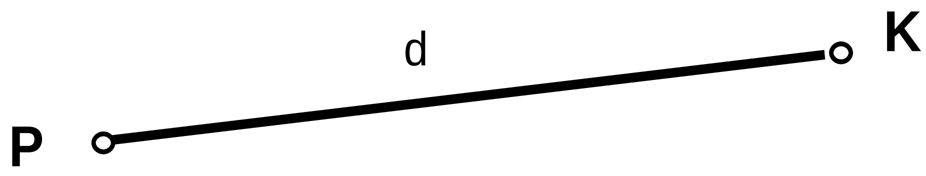
Jak wyznaczyć poprawki v_{h} ?

Ponieważ rozwiązanie układu wykonujemy metodą najmniejszych kwadratów
(minimalizujemy sumę kwadratów poprawek v),
poprawki obliczamy dopiero po wyznaczeniu estymatora niewiadomych.

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{L} + \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{L}$$

Równanie obserwacyjne dla odcinka



$$\sqrt{\Delta\hat{X}^2 + \Delta\hat{Y}^2} = \sqrt{\left(\hat{X}_K - \hat{X}_P\right)^2 + \left(\hat{Y}_K - \hat{Y}_P\right)^2} = \hat{d}$$

Niewiadome w przypadku równia obserwacyjnego dla długości **nie są w postaci liniowej**!

Postać różniczkowa równania obserwacyjnego

Postać różniczkową zalecam stosować również dla wprost liniowych układów równań, w tym przypadku dla sieci wysokościowej.

Dlaczego?

Ponieważ stosowanie postaci różniczkowej umożliwia w prosty sposób wykrywanie ewidentnych obserwacji odstających na podstawie wartości wyrazów wolnych układu równań.

Postać różniczkowa równania obserwacyjnego

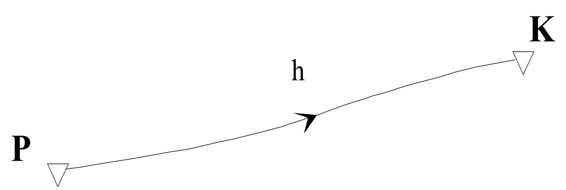
Najpierw zastanówmy się, w jaki sposób wyznaczymy estymatory (wyrównane wysokości reperów).

$$\hat{Z}_P = Z_P^o + dZ_P$$

$$\hat{Z}_K = Z_K^o + dZ_K$$

$$\hat{Z}_K - \hat{Z}_P = h^{pom} + v_h$$

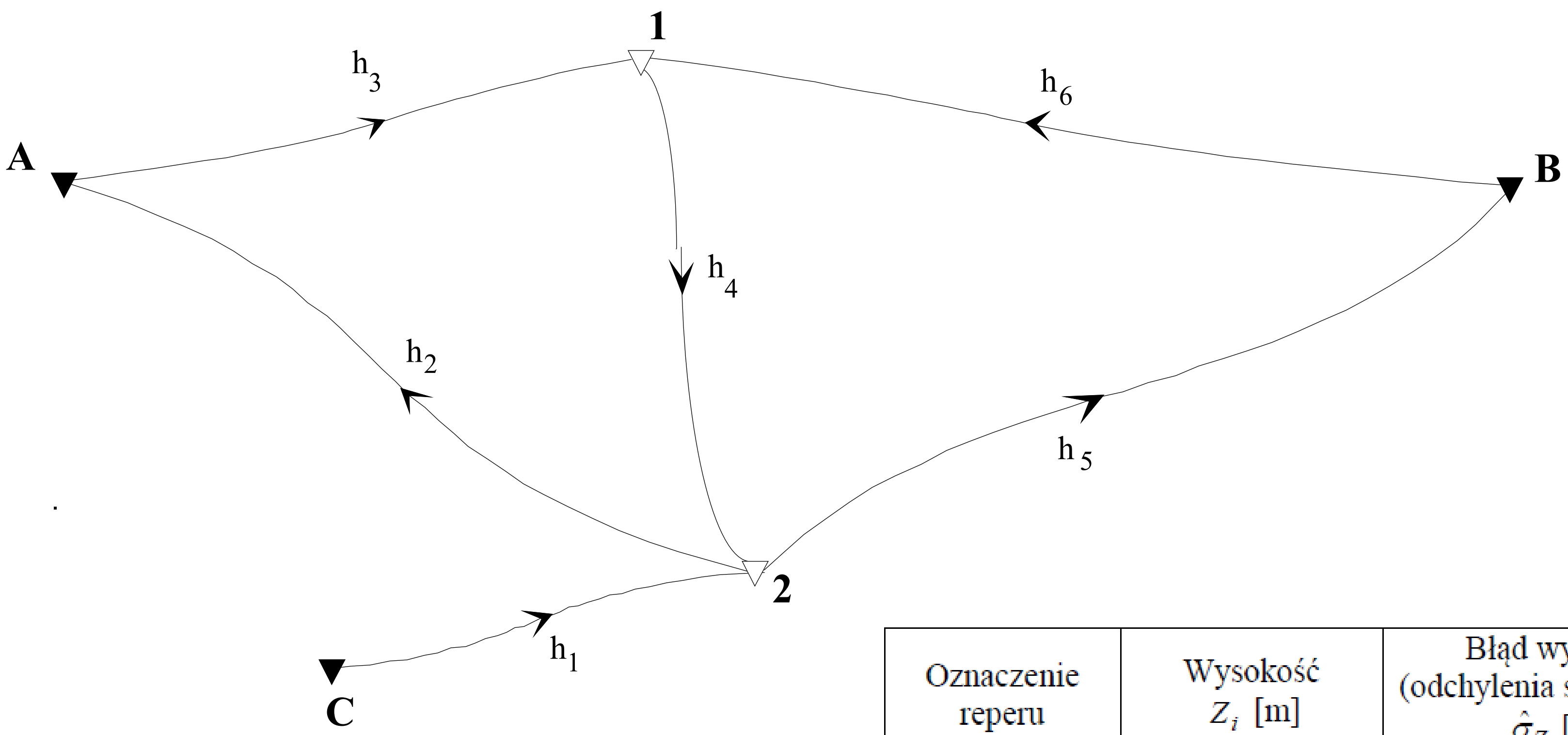
$$\left(Z_K^o + dZ_K\right) - \left(Z_P^o + dZ_P\right) = h^{pom} + v_h$$



$$dZ_K - dZ_P = h^{pom} - \left(Z_K^o - Z_P^o\right) + v_h$$

$$dZ_K - dZ_P = \left(h^{pom} - h^o\right) + v_h$$

Przykład



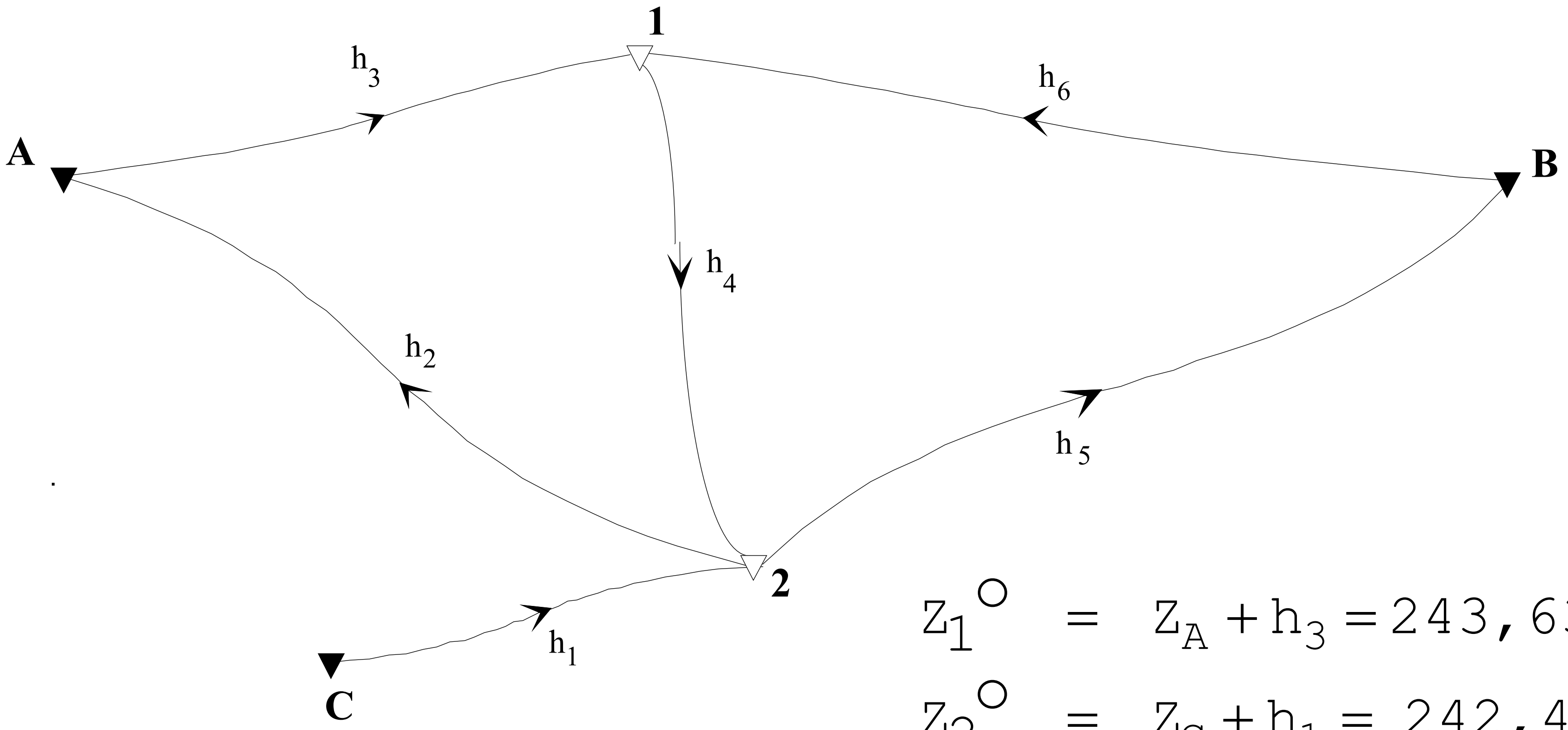
Oznaczenie reperu	Wysokość Z_i [m]	Błąd wysokości (odchylenia standardowe) $\hat{\sigma}_{Z_i}$ [mm]
A	242,5248	0,0
B	246,8684	0,0
C	238,0526	0,0

Przykład

W celu wyznaczenia wysokości reperów 1 i 2 wykonano niwelację precyzyjną.
Wyniki pomiaru przewyższeń oraz długości ciągów:

Oznaczenie przewyższenia	od - do	Przewyższenie [m]	Długość ciągu [km]
h_1	C - 2	4,41085	0,6
h_2	2 - A	0,06128	1,2
h_3	A - 1	1,11083	1,0
h_4	1 - 2	-1,17060	1,0
h_5	2 - B	4,40645	1,5
h_6	B - 1	-3,23680	1,5

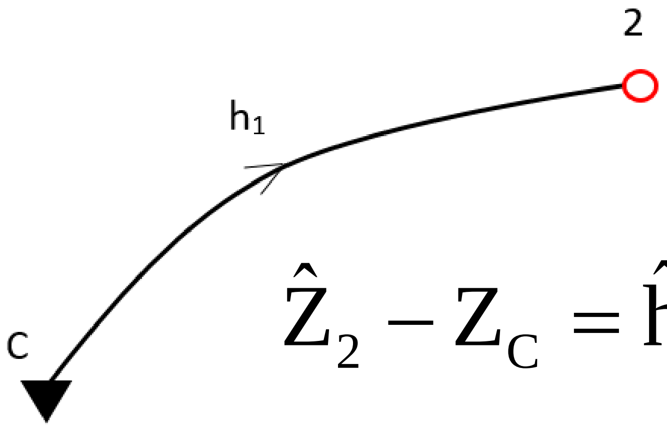
Rozwiązanie metodę różniczkową



$$Z_1^{\circ} = Z_A + h_3 = 243,6356\,m$$

$$Z_2^{\circ} = Z_C + h_1 = 242,4635\,m$$

Równania obserwacyjne



$$\hat{Z}_2 - Z_C = \hat{h}_1$$

n = 6
u = 2
----
n – u = 4

$$\left(Z_2^o + dZ_2\right) - Z_C = h_1^{pom} + v_{h1}$$

$$dZ_2 = h_1^{pom} - \left(Z_2^o - Z_C\right)$$

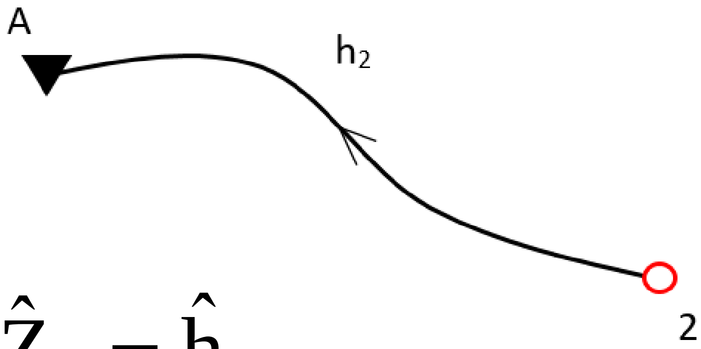
$$dZ_2 = h_1^{pom} - h_1^{o}$$

$\mathbf{A}(n,u)$ =

	dZ_1	dZ_2
v_{h1}	0	1
v_{h2}		
v_{h3}		
v_{h4}		
v_{h5}		
v_{h6}		

$$\mathbf{L}(n,1) = \begin{bmatrix} h_1^{pom} - h_1^{o} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} \; [mm]$$

Równania obserwacyjne



$$Z_A - \hat{Z}_2 = \hat{h}_2$$

$$Z_A - \left(Z_2^o + dZ_2\right) = h_2^{pom} + v_{h2}$$

$$-dZ_2 = h_2^{pom} - \left(Z_A - Z_2^o\right)$$

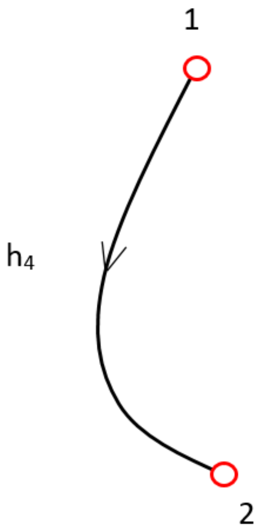
$$-dZ_2 = h_2^{pom} - h_2^{o}$$

$\mathbf{A}(n,u) =$

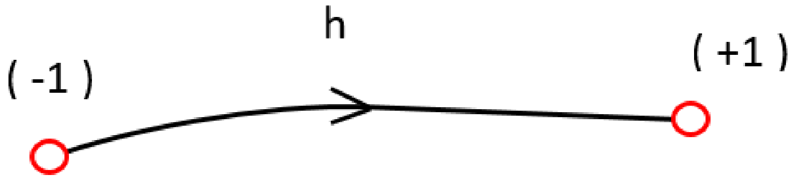
	dZ_1	dZ_2
v_{h1}	0	1
v_{h2}	0	-1
v_{h3}		
v_{h4}		
v_{h5}		
v_{h6}		

$$\mathbf{L}(n,1) = \begin{bmatrix} h_1^{pom} - h_1^{o} \\ h_2^{pom} - h_2^{o} \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix} [mm]$$

Równania obserwacyjne



$$\hat{Z}_2 - \hat{Z}_1 = \hat{h}_4$$



$$\left(Z_2^o + dZ_2\right) - \left(Z_1^o + dZ_1\right) = h_4^{pom} + v_{h4}$$

$$-dZ_1 + dZ_2 = h_4^{pom} - \left(Z_2^o - Z_1^o\right)$$

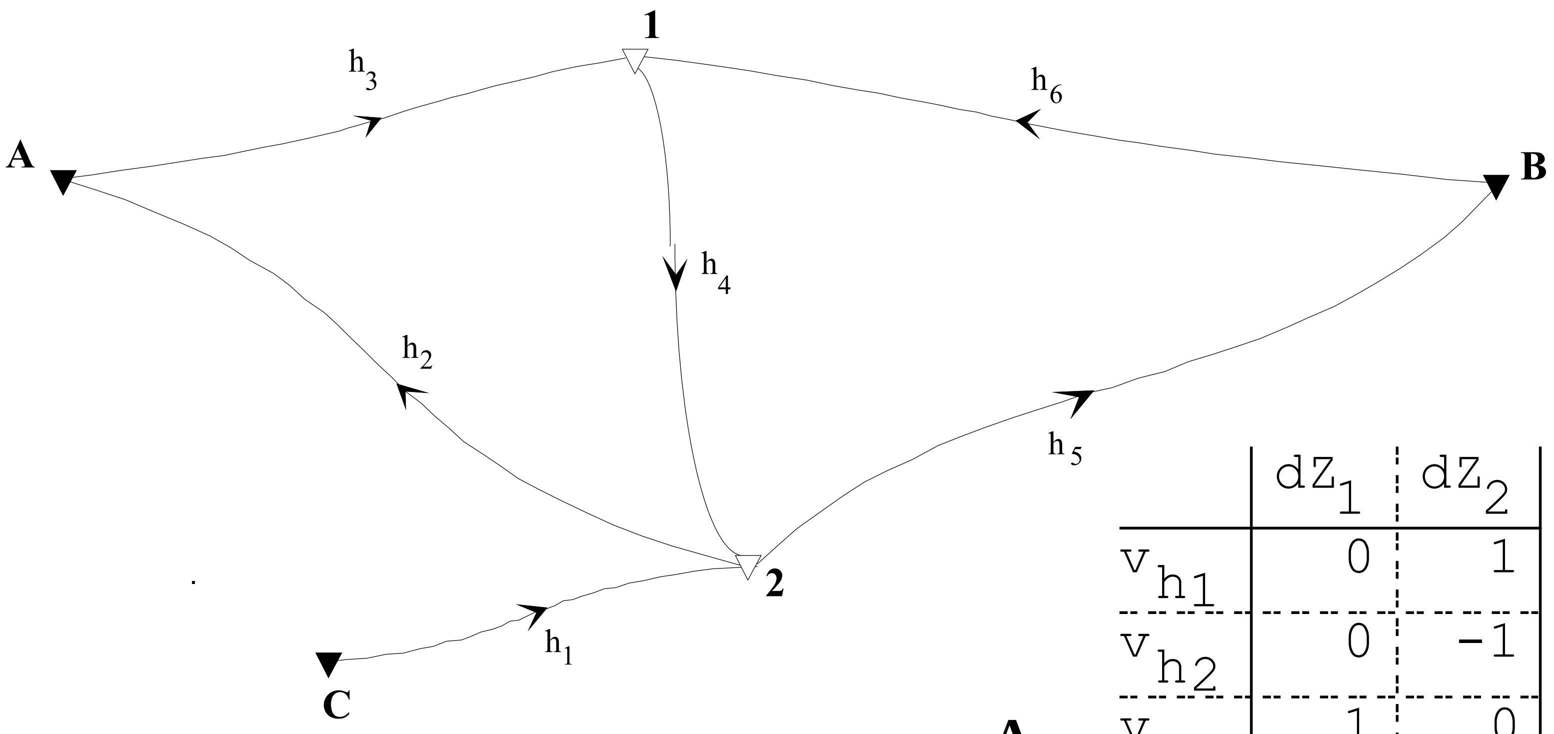
$$-dZ_1 + dZ_2 = h_4^{pom} - h_4^o$$

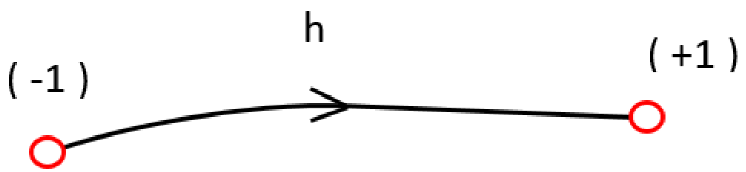
$\mathbf{A}(n,u) =$

	dZ_1	dZ_2
v_{h1}	0	1
v_{h2}	0	-1
v_{h3}		
v_{h4}	-1	1
v_{h5}		
v_{h6}		

$$\mathbf{L}(n,1) = \begin{bmatrix} h_1^{pom} - h_1^o \\ h_2^{pom} - h_2^o \\ \\ h_4^{pom} - h_4^o \\ \\ \\ \end{bmatrix} [mm]$$

Równania obserwacyjne – na podstawie szkicu





$$\mathbf{A} = \begin{array}{c|c:c} & dZ_1 & dZ_2 \\ \hline v_{h1} & 0 & 1 \\ \hdashline v_{h2} & 0 & -1 \\ \hdashline v_{h3} & 1 & 0 \\ \hdashline v_{h4} & -1 & 1 \\ \hdashline v_{h5} & 0 & -1 \\ \hdashline v_{h6} & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} h_1^{pom} - h_1^{o} \\ h_2^{pom} - h_2^{o} \\ h_3^{pom} - h_3^{o} \\ h_4^{pom} - h_4^{o} \\ h_5^{pom} - h_5^{o} \\ h_6^{pom} - h_6^{o} \end{bmatrix} \ [mm]$$

Wyrazy wolne

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} h_1^{pom} - h_1^{o} \\ h_2^{pom} - h_2^{o} \\ h_3^{pom} - h_3^{o} \\ h_4^{pom} - h_4^{o} \\ h_5^{pom} - h_5^{o} \\ h_6^{pom} - h_6^{o} \end{bmatrix} [mm] \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 4,41085 \\ 0,06128 \\ 1,11083 \\ -1,17060 \\ 4,40645 \\ -3,23680 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4,41085 \\ 0,06135 \\ 1,11083 \\ -1,17218 \\ 4,40495 \\ -3,23277 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00 \\ -0,07 \\ 0,00 \\ 1,58 \\ 1,50 \\ -4,03 \end{bmatrix} [mm]$$

Wagi – odchylenie standardowe na 1 km niwelacji

Z definicji $p_i = \dfrac{m_0^2}{m_i^2}$ $\qquad p_i = \dfrac{m_0^2}{m_i^2} = \dfrac{m^2}{m_i^2}$

| - 1 km - | - 3 km - |

m $\qquad \sqrt{m^2 + m^2 + m^2} = \sqrt{3}\, m$

$$p_1 = \frac{m^2}{m^2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$p_3 = \frac{m^2}{\left(\sqrt{3}m\right)^2} = \frac{m^2}{3m^2} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{p_i = \frac{1}{L_i}}$$

Wagi – odchylenie standardowe na *n* km niwelacji

$$p_i = \frac{m_0^2}{m_i^2} = \frac{m^2}{m_i^2}$$

lub np.

$$p_i = \frac{n \times m^2}{m_i^2}$$

wtedy

$$\boxed{\mathbf{p_i} = \frac{\mathrm{n}}{\mathbf{L_i}}} \Rightarrow \boxed{m_{0/\ \mathrm{n}\ km}}$$

$$m_{0/1\,km} = \frac{m_{0/n\,km}}{\sqrt{n}}$$

Wracamy do przykładu – macierz P

Oznaczenie przewyższenia	Długość ciągu [km]
h_1	0,6
h_2	1,2
h_3	1,0
h_4	1,0
h_5	1,5
h_6	1,5

W tym przypadku wygodnie będzie obliczyć wagi jako

$$p_i = \frac{6}{L_i}$$

$$\mathbf{P} = \mathrm{diag}\{10, 5, 6, 6, 4, 4\}$$

Rozwiązanie układu równań obserwacyjnych

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\,\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\,\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -1{,}695 \\ -0{,}254 \end{bmatrix} [mm]$$

Proszę wykonać obliczenia z uwzględnieniem trzech sposobów wyznaczenia odwrotności macierzy:

- *dopełnień algebraicznych*
- *rozkładu na czynniki trójkątne*
- *pierwiastka macierzy*

Wyrównane wysokości reperów

$$\hat{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}^{o} + \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 243,6356 \\ 242,4635 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,001695 \\ -0,000254 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 243,633935 \\ 242,463196 \end{bmatrix} [\mathrm{m}]$$

Odchyłki losowe do obserwacji

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{L} = \begin{bmatrix} -0,254 \\ 0,254 \\ -1,695 \\ 1,441 \\ 0,254 \\ -1,695 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,00 \\ -0,07 \\ 0,00 \\ 1,58 \\ 1,50 \\ -4,03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,254 \\ 0,324 \\ -1,695 \\ -0,139 \\ -1,246 \\ 2,335 \end{bmatrix} [\mathrm{mm}]$$

Wyrównane (uzgodnione) przewyższenia

$$\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{h}^{\text{pomierzone}} + \hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 4{,}41085 \\ 0{,}06128 \\ 1{,}11083 \\ -1{,}17060 \\ 4{,}40645 \\ -3{,}23680 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}000254 \\ 0{,}000324 \\ -0{,}001695 \\ -0{,}000139 \\ -0{,}001246 \\ 0{,}002335 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}410596 \\ 0{,}061604 \\ 1{,}109135 \\ -1{,}170739 \\ 4{,}405204 \\ -3{,}234465 \end{bmatrix} [\text{m}]$$

Kontrola poprawności wyrównania sieci

Prawidłowo obliczone wyniki końcowe, w tym przypadku wyrównane wysokości reperów i przewyższeń, gwarantują, że rozwiązany został właściwy układ równań, oraz że nie popełniono przy tym żadnych błędów obliczeniowych. Kontrola składa się z dwóch etapów.

W pierwszej kolejności należy sprawdzić czy nie popełniono błędów numerycznych

$$\hat{\sigma}_0^{\,2} = \hat{m}_0^{\,2} = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P}\, \hat{\mathbf{v}}}{n-u} = \frac{\mathbf{L}^T \mathbf{P}\, \mathbf{L} - \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P}\, \mathbf{L}}{n-u}$$

Spełnienie warunku: $\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P}\, \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{L}^T \mathbf{P}\mathbf{L} - \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P}\, \mathbf{L}$

gwarantuje, że nie popełniono błędów obliczeniowych podczas wyznaczania wektora niewiadomych i wektora odchyłek.

Kontrola poprawności wyrównania sieci

$$\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P}\, \hat{\mathbf{v}} \overset{?}{=} \mathbf{L}^T \mathbf{P} \mathbf{L} - \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P}\, \mathbf{L}$$

$$\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P}\, \hat{\mathbf{v}} = 46{,}5431$$

$$\mathbf{L}^T \mathbf{P} \mathbf{L} = 88{,}9665 \qquad \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P}\, \mathbf{L} = 42{,}4234$$

$$\mathbf{L}^T \mathbf{P} \mathbf{L} - \hat{\mathbf{x}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P}\, \mathbf{L} = 46{,}5431$$

Kontrola poprawności wyrównania sieci

Weryfikacja poprawności obliczeń nie gwarantuje, że wyniki wyrównania sieci są prawidłowe.

Drugi etap kontroli – porównanie wyrównanych przewyższeń z przewyższeniami obliczonymi z wyrównanych wysokości.

$$\hat{\mathbf{h}} = \mathrm{f}(\hat{\mathbf{Z}}) = \begin{bmatrix} \hat{Z}_2 - \hat{Z}_C \\ \hat{Z}_A - \hat{Z}_2 \\ \hat{Z}_1 - \hat{Z}_A \\ \hat{Z}_2 - \hat{Z}_1 \\ \hat{Z}_B - \hat{Z}_2 \\ \hat{Z}_1 - \hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}410596 \ \checkmark \\ 0{,}061604 \ \checkmark \\ 1{,}109135 \ \checkmark \\ -1{,}170739 \ \checkmark \\ 4{,}405204 \ \checkmark \\ -3{,}234465 \ \checkmark \end{bmatrix} [\mathrm{m}]$$

Ocena dokładności

Wariancja resztowa $\hat{\sigma}_0^{\ 2} = m_0^{\ 2} = \dfrac{\mathbf{v}^T\mathbf{P}\ \mathbf{v}}{\mathbf{n} - \mathbf{u}} = 11{,}635769\,\mathrm{mm}^2$

Odchylenie standardowe $\hat{\sigma}_{0/6km} = m_{0/6km} = 3{,}411\,\mathrm{mm}$

Ocena dokładności

Wariancja resztowa $\hat{\sigma}_0{}^2 = m_0{}^2 = \dfrac{\mathbf{v}^T\mathbf{P}\,\mathbf{v}}{n-u} = 11{,}635769\,\mathrm{mm}^2$

Odchylenie standardowe $\hat{\sigma}_{0/6km} = m_{0/6km} = 3{,}411\,\mathrm{mm}$

Odchylenie standardowe na 1 kilometr niwelacji

$$\hat{\sigma}_{0/1\,km} = \frac{m_{0/6\,km}}{\sqrt{6}} = 1{,}393\,\mathrm{mm}$$

Ocena dokładności

Macierz kowariancji dla wyrównanych wysokości :

$$\mathbf{Cov}(\hat{\mathbf{Z}}) = \hat{\sigma}_o{}^2\left(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}799160 & 0{,}191798 \\ 0{,}191798 & 0{,}511462 \end{bmatrix}[\mathrm{mm}^2]$$

Odchylenia standardowe wyrównanych wysokości reperów:

$$\sigma_{\hat{Z}_i} = \begin{bmatrix} 0{,}894 \\ 0{,}715 \end{bmatrix}[\mathrm{mm}], \text{ czyli}$$

$$m_{\hat{Z}_1} = \pm 0{,}894\,\mathrm{mm}$$

$$m_{\hat{Z}_2} = \pm 0{,}715\,\mathrm{mm}$$

Ocena dokładności

Macierz kowariancji dla wyrównanych (uzgodnionych) przewyższeń :

$$\mathbf{Cov}(\hat{\mathbf{h}}) = \mathbf{A}\,\sigma_o^2\left(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\,\mathbf{Cov}(\hat{\mathbf{Z}})\,\mathbf{A}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}511462 & -0{,}511462 & 0{,}191798 & 0{,}319664 & -0{,}511462 & 0{,}191798 \\ -0{,}511462 & 0{,}511462 & -0{,}191798 & -0{,}319664 & 0{,}511462 & -0{,}191798 \\ 0{,}191798 & -0{,}191798 & 0{,}799160 & -0{,}607362 & -0{,}191798 & 0{,}799160 \\ 0{,}319664 & -0{,}319664 & -0{,}607362 & 0{,}927026 & -0{,}319664 & -0{,}607362 \\ -0{,}511462 & 0{,}511462 & -0{,}191798 & -0{,}319664 & 0{,}511462 & -0{,}191798 \\ 0{,}191798 & -0{,}191798 & 0{,}799160 & -0{,}607362 & -0{,}191798 & 0{,}799160 \end{bmatrix} [mm^2]$$

Ocena dokładności

Odchylenia standardowe wyrównanych przewyższeń:

$$\sigma_{\hat{h}i} = \begin{bmatrix} 0,715 \\ 0,715 \\ 0,894 \\ 0,963 \\ 0,715 \\ 0,894 \end{bmatrix} [\mathrm{mm}], \text{ czyli}$$

$$m_{h1} = \pm 0,715 \text{ mm}$$

$$m_{h2} = \pm 0,715 \text{ mm}$$

$$m_{h3} = \pm 0,894 \text{ mm}$$

$$m_{h4} = \pm 0,963 \text{ mm}$$

$$m_{h5} = \pm 0,715 \text{ mm}$$

$$m_{h6} = \pm 0,894 \text{ mm}$$

Ocena dokładności – estymacja przedziałowa
zasygnalizowanie problemu

Zestawienie wyników				
Wariancja resztowa i odchylenie standardowe:			$\hat{\sigma}_0{}^2{}_{/6km} = 11,6358$ $\hat{\sigma}_0{}^2{}_{/1km} = 1,9393$	$\hat{\sigma}_{0/6km} = 3,41$ mm $\hat{\sigma}_{0/1km} = 1,39$ mm
Przedziały ufności na poziomie $(1-\alpha) = 0,95$:			$4,0720 < \sigma_0{}^2{}_{/6km} < 96,1634$ $0,6961 < \sigma_0{}^2{}_{/1km} < 16,0272$	$2,04 < \sigma_{0/6km} < 9,81$ $0,83 < \sigma_{0/1km} < 4,00$
Przewyższenie	Odchyłki do obserwacji $\hat{v}_i$ [mm]	Wyrównane przewyższenia $\hat{h}_i = h + \hat{v}_i$ [m]	Odchylenia standardowe wyrównanych przewyższeń $\hat{\sigma}_{h_i}$ [mm]	Przedziały ufności dla wektora $\hat{\mathbf{h}}$ na poziomie $1-\alpha=0.95$ $\hat{\sigma}_{h_i\,(1-\alpha)}$ [mm]
h_1	-0,25	4,41060	0,72	1,99
h_2	0,32	0,06160	0,72	1,99
h_3	-1,70	1,10913	0,89	2,48
h_4	-0,14	-1,17074	0,96	2,67
h_5	-1,25	4,40520	0,72	1,99
h_6	2,33	-3,23447	0,89	2,48

Ocena dokładności – estymacja przedziałowa
zasygnalizowanie problemu

Reper	Wyrównane wysokości $\hat{Z}_i$ [m]	Odchylenia standardowe wyrównanych wysokości $\hat{\sigma}_{Z_i}$ [mm]	Przedziały ufności dla wyrównanych wysokości na poziomie $1-\alpha=0.95$ $\hat{\sigma}_{Z_i\,(0,95)}$ [mm]
1	243,63393	0,89	2,48
2	242,46320	0,72	1,99

Macierz kowariancji dla wyrównanych wysokości:

$$\mathbf{Cov}(\hat{Z}_1, \hat{Z}_2) = \begin{bmatrix} 0,799160 & 0,191798 \\ 0,191798 & 0,511462 \end{bmatrix} [\mathrm{mm}^2]$$

Dyskusja

Dziękuję za uwagę